III. INDICAȚII ŞI SOLUȚII

1.

a) Afirmația nu este adevărată. Pentru graful reprezentat în figura 7 şirul de vârfuri adiacente $x_1, x_3, x_4, x_6, x_4, x_3, x_1$ determină un marşrut, ce nu conține ciclu elementar.

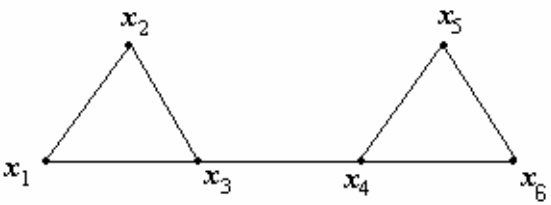

Figura 7

b) Afirmația este adevărată.

c) Afirmațiea este adevărată. Reuniunea a două lanțuri elementare diferite, ce unesc două vârfuri ale unui graf, este un marşrut închis ce conține unele muchii ale grafului o singură dată. De aici rezultă existența ciclului elementar.

2. Drept exemplu de graf cu proprietățile date poate servi graful din figura 8.

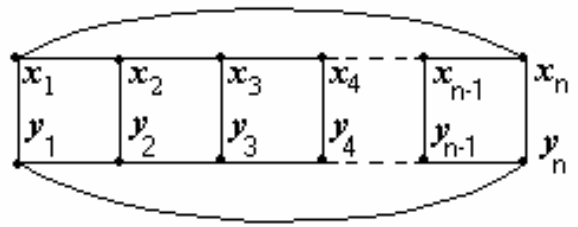

Figura 8

3. Fie graful G are $k \geq 2$ componente conexe $G_1, G_2, ..., G_k$. Conform definiției în graful complementar $\overline{G}$ orice vârf din componenta G_i $\left(i = \overline{1,k}\right)$ va fi adiacent cu toate

vârfurile din $G_1, G_2, ..., G_{i-1}, G_{i+1}, ..., G_k$. Aceasta garantează conexitatea grafului $\overline{G}$.

4. Remarcăm mai întâi, că dacă un graf conține două cicluri C_1, C_2 astfel încât $\left|X_{C_1} \cap X_{C_2}\right| \geq 2$, atunci reuniunea lor conține un ciclu de lungime pară.

Fie acum $C = (x_1, x_2, ..., x_{2k+1}, x_1)$, $k \geq 2$, un ciclu de lungime impară dintr-un graf G ce nu conține cicluri elementare de lungime pară. Eliminând din G toate muchiile de tipul (x_i, x_{i+1}) pentru $i = 3,5,7,...,2k-1$ şi adăugând muchiile de tipul (x_i, x_1), (x_{i+1}, x_i) obținem un graf nou cu un număr mai mare de muchii în care de asemenea nu sunt cicluri de lungime pară. Prin urmare, orice graf ce posedă proprietățile indicate în problemă conține numai cicluri de lungimea trei (triunghiuri). Orice vârf x din acest graf aparține la $\left\lfloor \left|\Gamma(x)\right| / 2 \right\rfloor$ triunghiuri, iar subgraful, generat de mulțimea $\{x\} \cup \Gamma(x)$ conține $3 \cdot \frac{\left|\Gamma(x)\right|}{2}$ muchii, dacă $\left|\Gamma(x)\right|$ este par, sau $3 \cdot \frac{\left|\Gamma(x)\right| - 1}{2} + 1$ muchii, dacă $\left|\Gamma(x)\right|$ este impar. Dacă în graful analizat ar exista cel puțin două vârfuri suspendate x, y, atunci prin suprimarea muchiei incidente vârfului x şi adăugarea a două muchii noi (x, y) şi (x, z), unde z este vârful incident cu y, obținem un graf nou cu un număr mai mare de muchii.

De aici rezultă, că toate blocurile grafului ce posedă proprietățile formulate în problemă sunt triunghiuri, dacă numărul de vârfuri n este impar, sau un bloc este determinat de o muchie suspendată şi toate celelalte blocuri sunt triunghiuri, dacă numărul de vârfuri n este par. Prin urmare numărul de

muchii m a unui astfel de graf este:

$$m = \begin{cases} 3 \cdot \dfrac{n-1}{2}, \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ 3 \cdot \left[\dfrac{n-1}{2} \right] + 1, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

5. Graful cu un număr maxim de muchii, ce nu conține cicluri elementare, este un arbore, pentru care numărul de muchii este cu o unitate mai mic decât numărul de vârfuri.

6. a) Dacă G_1 este un graf p-regulat cu n_1 vârfuri, iar G_2 este un graf k-regulat cu n_2 vârfuri, atunci $G_1 + G_2$ conține $n_1 + n_2$ vârfuri, în care orice vârf din subgraful G_1 are valența $p + n_2$, iar orice vârf din subgraful G_2 are valența $k + n_1$. Este clar, că în caz general $p + n_2 \neq k + n_1$. Prin urmare graful $G_1 + G_2$ nu este regulat.

Dacă G_1 este un graf p-regulat, iar G_2 este un graf k-regulat, atunci graful $G_1 \times G_2$ este un graf $(p + k)$-regulat.

b) $G_1 + G_2$ nu este bipartit;

$G_1 \times G_2$ este bipartit.

7. Graful cu proprietățile indicate în problemă este reprezentat în figura 9

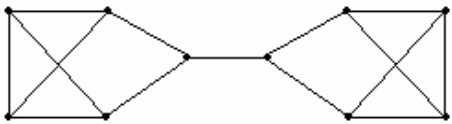

Figura 9

8. a) Orice arbore $T=(X_T;U_T)$ poate fi privit ca un graf bipartit $G=(X_1,X_2;U)$, în care mulțimea X_1 este formată dintr-un vârf arbitrar $x\in X_T$ şi toate vârfurile din T ce se află la o distanță pară de la x, iar $X_2=X_t\setminus X_1$.

b) Afirmația este adevărată numai în cazul când arborele T conține $|X_T|-1$ vârfuri suspendate.

c) Afirmația este adevărată.

d) Afirmația este adevărată, deoarece arborele nu conține cicluri şi, prin urmare, orice muchie a sa este istm.

10. În calitate de graf cu proprietățile indicate poate fi luat graful $G=(X\cup Y;U)$, în care $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ şi fiecare dintre submulțimile de vârfuri X, Y generează în G subgrafuri complete K_5. În afară de aceasta graful G mai conține muchiile (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) şi (x_3,y_4).

11. a) Pentru orice graf cubic $G=(X,U)$ este adevărată inegalitatea $1\le\chi(G)\le 3$.

Fie $\chi(G)=1$, adică graful G conține un punct de articulație x. Dacă $\Gamma(x)=\{z_1,z_2,z_3\}$, atunci la eliminarea vârfului x din G obținem un graf neconex, în care două vârfuri ale mulțimii $\Gamma(x)$, spre exemplu z_1, z_2, aparțin diferitor componente de conexitate G_1 şi G_2. Dacă al treilea vârf nu aparține acestor componente conexe, atunci fiecare dintre muchiile (x,z_1) şi (x,z_2) este istm în G. Dacă $z_3\in X_{G_1}$ (sau $z_3\in X_{G_2}$) atunci muchia (x,z_2) (muchia (x,z_1)) este istm în G. Prin urmare $\lambda(G)=1$.

Fie $\mathrm{H}(G)=2$. În mod analog cu cazul cercetat se

demonstrează că $\lambda(G)=3$.

În cazul $\mathrm{H}(G)=3$ egalitatea $\mathrm{H}(G)=\lambda(G)$ este evidentă.

b) În condiția $\mathrm{H}(G)=1$ graful G conține un punct de articulație x şi $\deg x=k$. La eliminarea lui x din G obținem un graf neconex în care există o componentă de conexitate ce conține cel mult $[k/2]$ vârfuri ale mulțimii $\Gamma(x)$. Dacă din G se elimină muchiile ce unesc aceste vârfuri cu x, atunci ca rezultat se obține un graf neconex. Aceasta înseamnă că $\lambda(G)\le[k/2]$.

12. Graful muchiilor unui graf $G=(X;U)$ este regulat dacă şi numai dacă pentru oricare două muchii $u_1=(x_1,x_2)$ şi $u_2=(y_1,y_2)$ din G are loc egalitatea:

$$\deg x_1+\deg x_2=\deg y_1+\deg y_2.$$

13. Cel mai simplu graf cu proprietățile date este graful $G=(X;U)$ în care

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$
$$U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)\}.$$

14. Acesta ar putea fi graful $G=(X;U)$ cu mulțimile:

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$
$$U=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_1)\}.$$

15. Vezi graful din problema precedentă.

16. Cel mai simplu graf ce posedă proprietatea dată este graful complet K_n.

17. a) Deoarece orice vârf $x\in X_{G_2}$ în graful G_1+G_2 este adiacent cu toate vârfurile din X_{G_1}, rezultă că x nu poate fi colorat în culorile grafului G_1. Aceasta implică egalitatea

$$\chi(G_1+G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2).$$

b) Notăm $G = G_1 \cap G_2$. Deoarece $G \subseteq G_1$ şi $G \subseteq G_2$, sunt adevărate inegalităţile

$$\chi(G) \le \chi(G_1),$$
$$\chi(G) \le \chi(G_2),$$

de unde

$$\chi(G) \le \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}.$$

18. Toate vârfurile $x_1, x_2, ..., x_n$ ale grafului plan $G = (X;U)$ aparţin frontierei unei feţe. Considerăm $x_1 \sim x_2 \sim$ $\sim \ldots \sim x_n \sim x_1$. Dacă graful nu conţine alte muchii, atunci $\chi(G) \le 3$. Fie $x_i \sim x_j$, $j > i+1$. Atunci subgrafurile, generate de submulţimile de vârfuri $X_1 = \{x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_j, ..., x_n\}$ şi $X_2 = \{x_i, x_{i+1}, ..., x_j\}$, pot fi colorate în cel mult 3 culori astfel încât în ambele sugbrafuri vârfurile x_i şi x_j sunt colorate în aceeaşi culoare. Aceasta înseamnă că $\chi(G) \le 3$.

19. Pentru grafurile din figura 5b matricile de adiacenţă şi respectiv de incidenţă sunt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

20. a) Deoarece graful complet este neorientat, fără bucle şi cu număr maxim de muchii, acest număr este egal cu numărul submulţimilor de 2 elemente ale mulţimii de vârfuri, care are n elemente. Deci numărul de muchii al grafului complet este C_n^2.

b) Un poligon convex cu n vârfuri reprezintă un graf neorientat cu n vârfuri şi n muchii. Adăugând toate diagonalele sale se obține graful K_n. Deci numărul diagonalelor poligonului este:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

21. a) Notăm prin PA mulțimea tuturor perechilor de elemente din X ce pot fi considerate muchii. Cardinalul lui PA coincide cu numărul muchiilor unui graf complet cu mulțimea de vârfuri X, adică C_n^2. Orice submulțime a mulțimii PA poate fi privită ca mulțimea de muchii a unui graf oarecare G. Prin urmare numărul grafurilor căutate coincide cu numărul tuturor submulțimilor mulțimii PA, adică cu $2^{|PA|} = 2^{C_n^2}$.

b) Deoarece graful e orientat, $|PA| = A_n^2$. Urmând acelaşi raționament deducem că numărul cerut este $2^{A_n^2}$.

c) Considerăm mulțimea $PA = \{(i,j) | 1 \le i < j \le n\}$. Este evident că $|PA| = C_n^2$.

Între mulțimile $A = \{f : PA \to \{-1,0,1\}\}$ şi $\{U | G = (X,U)\ e\ antisimetric\}$ se poate stabili o bijecție g: $g(f) = \{(i,j) | f(i,j) = 1\} \cup \{(j,i) | f(i,j) = -1\}$. Deci numărul grafurilor orientate şi antisimetrice este egal cu numărul funcțiilor din mulțimea A, adică $|\{-1,0,1\}|^{|PA|} = 3^{\left(\frac{n}{2}\right)}$.

d) Se aplică acelaşi raționament ca la c. pentru izomorfizmul: $g : \{f : PA \to \{-1,1\}\} \to \{U | G = (X,U)\ e\ turnir\}$, $g(f) = \{(i,j) | f(i,j) = 1\} \cup \{(j,i) | f(i,j) = -1\}$.

Numărul turnirurilor este $2^{C_n^2}$.

22. Pentru orice $x_i \in X$ avem $g^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $g^-(x_i) =$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$ (a_{ij} sunt elementele matricii de adiacență a grafului).

Deci $\sum_{x_i \in X} g^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{x_i \in X} g^-(x_i)$.

23. În problema precedentă s-a demonstrat relația $\sum_{x_i \in X} g^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} g^-(x_i) = m$. Deci, $\sum_{x_i \in X}\left(g^+(x_i) - g^-(x_i)\right) = 0$.

Facem notațiile $g^+(x_i) - g^-(x_i) = d_i$, $I_+ = \{x_i \in X | d_i \geq 0\}$, $I_- = \{x_i \in X | d_i < 0\}$.

Din $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$ rezultă $\sum_{i \in I} d_i = -\sum_{i \in I} d_i = \sum_{i \in I}(-d_i) = r$.

Prin urmare $\sum_{i=1}^{n} |d_i| = \sum_{i \in I} d_i + \sum_{i \in I}(-d_i) = 2r$.

24. a) Relația rezultă imediat din faptul că ignorând orientarea arcelor lui G obținem un graf complet.

b) Prima egalitate a fost deja demonstrată în problema 22. Neglijând orientarea arcelor în G obținem un graf complet, care are C_n^2 muchii. Deci numărul arcelor lui G este C_n^2.

c. Vom calcula diferența:

$$\sum_{x_i \in X}\left(g^+(x_i)\right)^2 - \sum_{x_i \in X}\left(g^-(x_i)\right)^2 = \sum_{x_i \in X}\left(g^+(x_i)\right)^2 - \left(g^-(x_i)\right)^2$$

$$\sum_{x_i \in X}\left(g^+(x_i) + g^-(x_i)\right)\left(g^+(x_i) - g^-(x_i)\right) =$$

$$(n-1)\sum_{x_i \in X}\left(g^+(x_i) - g^-(x_i)\right) = (n-1)\left(\left(C_n^2\right) - \left(C_n^2\right)\right) = 0.$$

d) Din a) rezultă $g^-(i) = n - 1 - g^+(i)$. Folosind această

relație în c) obținem imediat d).

25. Considerăm graful neorientat $G=(X,U)$. Deoarece graful este simplu au loc inegalitățile: $0 \le g(x_i) \le n-1, \forall x_i \in X$. Dacă vârfurile grafului au grade distincte atunci acestea formează şirul $0,1,2,...,n-1$. Prin urmare în G există un vârf care este adiacent cu toate celelalte vârfuri din X. Aceasta contrazice existența în graful G a unui vârf izolat (de grad 0). Deci dacă $n>1$, atunci nu există grafuri în care gradele vârfurilor sunt distincte.

26. Într-un graf neorientat are loc relația:

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) = 2m.$$

Facem notațiile:

$$I_k = \{x_i \in X | g(x_i) = k\},\ I_{k+1} = \{x_i \in X | g(x_i) = k+1\},\ |I_k| = r.$$

Atunci

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) = \sum_{i \in I_k} k + \sum_{i \in I_{k+1}} (k+1) = rk + (n-r)(k+1) = 2m.$$

Deci $r = -2m + n(k+1)$.

27. Fie un graf $G=(X,U) \in \mathsf{F}$ cu $|U| = m$. S-a demonstrat deja, în problema 22, că $\sum_{x_i \in X}^{n} g^+(x_i) = \sum_{x_i \in X}^{n} g^-(x_i) = m$.

Pe de altă parte, din ipoteză rezultă imediat că $\sum_{x_i \in X}^{n} g^+(x_i) \le np$ şi $\sum_{x_i \in X}^{n} g^-(x_i) \le nq$. Ultimele trei relații implică inegalitatea $m \le \{np, nq\}$, ceea ce conduce la concluzia că o majorantă a numărului căutat este $\min\{np, nq\}$.

Să presupunem că $p \le q$. Atunci $\min\{np, nq\} = np$. În plus, următoarea matrice de adiacență:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

în care pe fiecare coloană sunt p elemente de valoarea 1, descrie un graf care satisface inegalitățile din enunț şi are exact np arce. Deci $\max\{|U| : G = (X,U) \in \mathsf{F}\} = np$.

Dacă $p > q$, atunci $\max\{|U| : G = (X,U) \in \mathsf{F}\} = nq$. Egalitatea se demonstrează ca şi în cazul $p \le q$. Un graf cu nq arce este cel reprezentat prin acelaşi tip de matrice de adiacență în care fiecare coloană conține q elemente de valoarea 1.

28. Din egalitatea $g^+(x_i) = g^-(x_i)$ pentru orice $x_i \in X$ deducem

$$\sum_{x_i \in A} g^+(x_i) = \sum_{x_i \in A} g^-(x_i). \qquad (*)$$

Dacă din graful G eliminăm un arc care are ambele extremități în A, atunci sumele din (*) rămân egale şi scad fiecare cu o unitate. În consecință, eliminând din G toate arcele care au ambele extremități în A, (*) rămâne adevărată. Mai mult, după eliminare, membrul stâng al egalității va reprezenta numărul arcelor care au extremitatea inițială în A şi cea finală în afara lui A, iar membrul drept – numărul arcelor care au extremitatea inițială în $X \setminus A$, iar cea finală în A.

29. Fie $G = (X, U)$, $|X| = n$, $|U| = m$. Are loc relația

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) = 2m.$$

Facem notațiile

$$I_e = \{x_i \in X | g(x_i)\, e\ par\} \text{ şi } I_o = \{x_i \in X | g(x_i)\, e\ impar\}.$$

Deoarece

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) = \sum_{x_i \in I_e} g(x_i) + \sum_{x_i \in I_o} g(x_i),$$

are loc egalitatea

$$\sum_{x_i \in I_o} g(x_i) = 2m - \sum_{x_i \in I_e} g(x_i).$$

Membrul drept al relației precedente este un număr par, iar membrul stâng este o sumă de numere impare. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă numărul termenilor sumei din membrul stâng este par. Deci $|I_o|$ este un număr par.

30. Să presupunem că numărul $k = g(x_i)$ este impar $\forall x_i \in X$. Conform problemei 29, numărul vârfurilor de grad impar este par. Deoarece gradele tuturor vârfurilor sunt egale şi impare obținem imediat că $|X|$ e un număr par, ceea ce contrazice ipoteza.

31. Dacă notăm cu m_A numărul muchiilor care au ambele extremități în A, atunci suma gradelor vârfurilor din A este

$$\sum_{x_i \in A} g^+(x_i) = k + 2m_A.$$

Pe de altă parte,

$$\sum_{x_i \in A} g(x_i) = \sum_{x_i \in A_p} g(x_i) + \sum_{x_i \in A_i} g(x_i),$$

unde $A_p = \{x_i \in A | g(x_i) \text{este par}\}$ şi $A_i = \{x_i \in A | g(x_i) \text{este impar}\}$.

Deci are loc egalitatea:

$$k + 2m_A = \sum_{x_i \in A_p} g(x_i) + \sum_{x_i \in A_i} g(x_i) \Leftrightarrow k = \left(\sum_{x_i \in A_p} g(x_i) - 2m_A \right) + \sum_{x_i \in A_i} g(x_i)$$

Din relația precedentă rezultă imediat că numerele k şi $|A_i|$ au aceeaşi paritate.

32. a) Fie $\overline{G} = (X, \overline{U})$ graful complementar al grafului $G = (X, U)$ $(|X| = n)$. Din definiția grafului complementar obținem egalitatea $|U| + |\overline{U}| = \frac{n(n-1)}{2}$. Din izomorfismul grafurilor G şi $\overline{G}$ rezultă egalitatea $|U| + |\overline{U}| = \frac{n(n-1)}{4}$. Acest număr este întreg dacă şi numai dacă $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$. Deci $|X| \equiv 0 \pmod 4$ sau $|X| \equiv 1 \pmod 4$.

b) Din inegalitatea $|X| > 1$, ținând cont de rezultatul din punctul a), rezultă că graful autocomplementar cu cele mai puține vârfuri are patru vârfuri. În figura10 este reprezentat un astfel de graf.

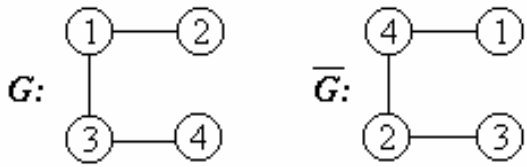

Figura 10

33. Numărul ciclomatic al unui astfel de graf este $\gamma(G) = n - n + 1 = p \geq 1$, ceea ce înseamnă că G conține cel puțin un ciclu.

34. Fie $\overline{G} = (X, \overline{U})$ graful complementar al grafului $G = (X, U)$ $(|X| = n \geq 5)$. Deoarece graful cu număr maxim de muchii şi fără cicluri este arbore (în care $m = n - 1$), pentru a rezolvă problema e suficient să arătăm că unul dintre aceste grafuri conține cel puțin n muchii.

Ținând cont de faptul că $|U| + |\overline{U}| = \frac{n(n-1)}{2}$ (vezi rezolvarea problemei 32) deducem că numărul de muchii în unul din grafurile G şi $\overline{G}$ este mai mare sau egal cu $\frac{n(n-1)}{4}$.

Rezolvând inecuația $\frac{n(n-1)}{4} > n - 1$ în N obținem $n > 4$. Deci dacă graful $G = (X, U)$ conține mai mult de 4 vârfuri, atunci G sau $\overline{G}$ conține un ciclu.

35. Fie l_1 şi l_2 două lanțuri de lungime maximă, egală cu t, se unesc perechile de vârfuri x_1, y_1 şi respectiv x_2, y_2. Presupunem că aceste două lanțuri nu au vârfuri comune. Atunci, deoarece graful este conex, există un lanț l_3 între vârfurile $j \in l_1$ şi $i \in l_2$. Fără a pierde din generalitate putem presupune că $l_3 \cap l_1 = \{j\}$ şi $l_3 \cap l_2 = \{i\}$. Notăm lungimea acestui lanț prin $p \geq 1$.

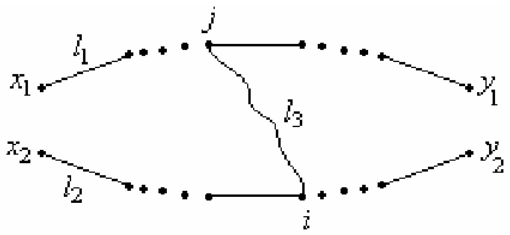

Figura 11

Fie $l_1^{'}$, $l_1^{''}$, $l_2^{'}$ şi $l_2^{''}$ sublanţurile din l_1, l_2, care unesc perechile de vârfuri (x_1, j), (j, y_1), respectiv (i, y_2) (vezi figura 11). Notăm lungimile acestor lanţuri prin s, r, k şi d. Au loc egalităţile $s + r = t$ şi $k + d = t$. Deoarece $s, r, k, t, d \in N$ rezultă $\max\{s,t\} \geq t/2$ şi $\max\{k,d\} \geq 2$. Să presupunem că $\max\{s,t\} = s$ şi $\max\{k,d\} = k$ (orice altă situaţie se tratează la fel). Atunci lanţul $l_1^{'} \cup l_3 \cup l_2^{'}$ are lungimea mai mare decât $t/2 + 1 + t/2$, ceea ce contrazice presupunerea că lungimea celui mai lung lanţ din G este t.

36. Considerăm un lanţ l de lungime maximă în acest graf şi fie $x_i \in X$ unul din extremităţile lui. Vârful x_i este adiacent numai cu vârfuri ale lanţului l. Dacă am presupune contrariul, atunci am ajunge cu uşurinţă la contradicţie cu maximalitatea lanţului ales. Mai departe, deoarece, $g(x_i) \geq 3$, se formează astfel cel puţin trei cicluri dintre care cel puţin unul este de lungime pară, oricare ar fi paritatea lungimilor lanţurilor de la x_i la x_{j_1} şi de la x_{j_1} la x_{j_2} (vezi figura 12).

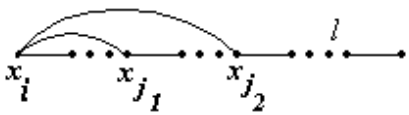

Figura 12

37. "$\Rightarrow$". Considerăm graful $G = (X, U)$ unde $X = Y \cup Z$ şi există muchii numai între Y şi Z. Atunci orice ciclu C este de forma $\{y_o, z_o, y_1, z_1, ..., y_k, z_k, y_o\}$, unde $y_i \in Y$, $i = 0,1,...,k$ şi $z_i \in Z$, $i = 0,1,...,k$. Este clar că lungimea lui C este $2k$.

"$\Leftarrow$". Să presupunem că G are toate ciclurile de lungime pară şi este conex. În caz contrar raţionamentul se aplică pentru

fiecare componentă conexă în parte.

Fie $v \in X$ un vârf oarecare. Vom considera mulțimile $Y = \{v\} \cup \{y \in X | d(v, y) \text{ e par}\}$ şi $Z = X \setminus Y$. Fie $v_1, v_2 \in Y \setminus \{v\}$ (sau $v_1, v_2 \in Z$). Să presupunem că $(v_1, v_2) \in U$. Şi să notăm cu $D(v, v_1)$ şi $D(v, v_2)$ cele mai scurte lanțuri între v şi v_1, respectiv între v şi v_2. $D(v, v_1) \cup D(v, v_2) \cup \{(v_1, v_2)\}$ formează un ciclu C de lungime impară deoarece, din definiția mulțimii Y rezultă că lungimile lanțurilor $D(v, v_1)$ şi $D(v, v_2)$ coincid cu $d(v, v_1)$ şi $d(v, v_2)$ şi deci sunt numere pare (impare).

Existența unui astfel de ciclu contrazice ipoteza şi deci $(v_1, v_2) \notin U$, de unde deducem că graful e bipartit.

38. Să presupunem că există un ciclu elementar C de lungimea α. Facem notația $X = X_1 \cup X_2$, unde $|X_1| = \alpha / 2 - 1$, $|X_2| = \beta$. Deoarece G este bipartit, deducem că jumătate din vârfurile lui C sunt în X_1, iar cealaltă jumătate în X_2. Ținând seama că ciclul C este elementar, având lungime α, deducem că C conține $\alpha / 2$ vârfuri din X_1 şi $\alpha / 2$ vârfuri din X_2, ceea ce contrazice faptul că $|X_1| = \alpha / 2 - 1$.

39. Egalitatea poate fi demonstrată prin inducție în raport cu numărul de muchii din graf.

40. Într-un graf planar are loc relația lui Euler $m - f = n - 2$. Cum n este constant rezultă că diferența $m - f$ este constantă şi valorile maxime pentru f şi m se ating simultan, pentru acelaşi graf. Graful cu număr maxim de fețe are proprietatea că pentru fiecare față frontiera este un ciclu de lungime 3. Cum fiecare muchie intră în frontiera a două fețe, deducem că are loc $2m = 3f$. Deci relația lui Euler devine:

a) $3m - 2m = 3n - 6$, de unde $m = 3n - 6$.

b) $3f - 2f = 2n - 4$, adică $f = 2n - 4$.

41. Notăm prin m şi f numărul de muchii şi respectiv de feţe ale grafului G. Deoarece fiecare muchie aparţine intersecţiei frontierelor a două feţe şi frontiera fiecărei feţe conţine k muchii, obţinem egalitatea $kf = 2m$, de unde $f = \frac{2m}{k}$. Înlocuind valoarea lui f în formula lui Euler $n - m + f = 2$ obţinem $m = \frac{k(n-2)}{k-2}$

42. Fie graful planar $G = (X, U)$, $|X| \geq 5$, reprezentat în plan astfel încât oricare două muchii ale sale nu au puncte interioare comune. Notăm prin $i(G)$ numărul vârfurilor lui G care au gradul mai mic sau egal cu 5. Asupra grafului G facem următoarea transformare: se adaugă muchii astfel încât graful obţinut G^* să nu conţină muchii multiple şi să aibă ca frontieră a fiecărei feţe un ciclu de lungime trei. Notăm $i(G^*)$ numărul vârfurilor din G^* de grad cel mult 5. Este evident că $i(G) \geq i(G^*)$. În G^* au loc relaţiile:

a) $m = 3n - 6$ (vezi problema 40),

b) $g(x) \geq 3$, pentru orice x din graful G^*. Ultima afirmaţie este adevărată deoarece frontiera fiecărei feţe a grafului G^* este un ciclu de lungime trei şi G^* nu conţine muchii multiple.

c) $2m = \sum_{x \in X} g(x) \geq 3i(G^*) + 6(n - i(G^*))$.

Această afirmaţie este adevărată deoarece, datorită relaţiei b), în G^* vârfurile de grad cel mult 5 au gradul cel puţin trei, iar celelalte $n - i(G^*)$ vârfuri au gradul cel puţin şase. Prin urmare obţinem:

$$2m = 2(3n-6) \geq 3i(G^*) + 6(n - i(G^*)),$$

de unde $i(G^*) \geq 4$.

Din inegalitatea $i(G) \geq i(G^*)$ rezultă $i(G) \geq 4$.

43. Deoarece G nu conține subgrafuri K_3, rezultă uşor că $m \geq 4\frac{f}{2} = 2f$. Dacă presupunem că G este planar, din relația lui Euler şi inegalitatea din enunț avem $m \geq 2f = 2(m-n+2) = 2m-2n+4 > 4-m-4+2m = m$, ceea ce reprezintă o contradicție. Deci G este neplanar.

44. a) Se observă că orice graf planar exterior $G = (X,U)$ cu $|X| = n \geq 3$ şi număr maxim de muchii, poate fi desenat în plan ca un poligon cu n vârfuri şi $n-3$ diagonale. Prin urmare în graful G obținem egalitatea $|U| = 2n-3$.

b) Orice graf planar exterior $G(X,U)$, $|X| = n \geq 3$, cu număr maxim de muchii, poate fi desenat în plan astfel încât conturul feței nemărginite să fie un ciclu de lungime n, iar contururile fețelor mărginite să fie cicluri de lungimea trei. Se observă cu uşurință că există trei vârfuri x, y, z astfel încât cel puțin unul dintre ele are gradul doi şi împreună generează conturul unei fețe. Fie y vârful de gradul doi. Vom demonstra, folosind metoda inducției matematice, că în G există cel puțin două vârfuri de grad doi. Pentru $n = 3$ afirmația este evidentă. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice graf cu $k \geq 3$ vârfuri şi să o demonstrăm pentru un graf cu $k+1$ vârfuri. Conform celor demonstrate mai sus, în G există un vârf y de grad doi, adiacent cu vârfurile x şi z. Eliminând y din G obținem un graf G' cu k vârfuri care este evident planar maximal exterior. Aplicând ipoteza inducției pentru G' rezultă că el conține două vârfuri de grad doi. Acestea nu pot fi x şi z deoarece G' este maximal exterior. Prin urmare în G' există un

vârf w de grad doi şi $w \notin \{x, z\}$. Atunci în graful inițial G vârfurile y şi w sunt de grad doi.

c) Deoarece orice graf planar maximal exterior $G = (X, U)$ conține un vârf de grad doi, atunci folosind metoda inducției matematice putem demonstra că $\chi(G) = 3$.

45. a) $\Rightarrow$ b). Din faptul că G are un circuit eulerian şi nu are vârfuri izolate rezultă că oricum am alege $x_i, x_j \in X$ există drum de la x_i la x_j şi deci G este tare conex. Pe de altă parte, circuitul eulerian trece prin toate arcele care intră şi toate arcele care ies dintr-un vârf x_i. Deci la fiecare trecere prin x_i se foloseşte un arc care intră în x_i şi un arc care iese din x_i, ceea ce conduce la relația $g^+(x_i) = g^-(x_i)$ $\forall x_i \in X$.

b) $\Rightarrow$ a). Din faptul că G este tare conex rezultă imediat că G nu are vârfuri izolate.

Să presupunem acum că, deşi G este tare conex şi pentru orice vârf x_i are loc $g^+(x_i) = g^-(x_i)$, G nu are circuit eulerian.

Alegem un circuit simplu de lungime maximă C. Deoarece C nu este elulerian, adică lungimea lui C este mai mică decât m, putem afirma că există arce în mulțimea $U \setminus C$. Considerăm graful $G_c = (X', U \setminus C)$, unde $X' \subset X$ este mulțimea vârfurilor lui G care sunt extremități ale unor arce din $U \setminus C$. Deoarece $g^+(x_i) = g^-(x_i)$ $\forall x_i \in X$, iar circuitul C foloseşte în fiecare vârf prin care trece acelaşi număr de arce de intrare şi de ieşire, deducem că pentru toate vârfurile din G_c rămâne adevărată proprietatea că gradul interior şi gradul exterior al fiecărui vârf coincid. Fie $x_i \in X'$ astfel încât x_i este vârf al lui C. Existența unui astfel de vârf este asigurată de

faptul că dacă implicația $\forall x_i \in C \Rightarrow x_i \in X'$ ar fi adevărată, atunci ar rezulta că G nu e tare conex.

Alegem acum un arc $(x_i, x_j) \in U \setminus C$ şi să încercăm să ne "deplasăm", folosind arce ale lui G_c (fiecare o singură dată) atâta timp cât putem înainta. Să presupunem că am ajuns într-un vârf $x_k \neq x_i$. Deoarece $g^+_{G_c}(x_k) = g^-_{G_c}(x_k)$ rezultă că nu ne vom opri în x_k deoarece există un arc de ieşire (neutilizat încă) din x_k (Aici $g^+_{G_C}(x_i)$ şi $g^-_{G_C}(x_i)$ reprezintă valențele respective în graful G_C). Repetând acest raționament în fiecare vârf în care am ajuns şi ținând seama de faptul că numărul vârfurilor lui G_c este finit, deducem că în cele din urmă ne vom întoarce din nou în x_i, construind astfel un nou circuit C_1. Deci în graful G există circuitele C_1 şi C, care au în comun cel puțin vârful x_i. Dar în această situație reuniunea $C_1 \bigcup C$ este un circuit simplu al lui G de lungime mai mare decât a lui C, ceea ce contrazice maximalitatea lui C.

46. a) $\Rightarrow$ b). Deoarece nu există vârfuri izolate, rezultă imediat că orice ciclu eulerian trece prin toate vârfurile grafului. De aici deducem că G este conex şi că fiecare vârf are gradul par. Într-adevăr, la o parcurgere a unui ciclu eulerian, în care se elimină fiecare muchie parcursă, după vizitarea unui vârf se şterg exact două muchii.

b) $\Rightarrow$ a). Deoarece G este conex, este evident că G nu conține vârfuri izolate.

Să presupunem acum că deşi G are proprietatea b), în G nu există ciclu eulerian. Alegem un ciclu simplu de lungime maximă. Deoarece C nu este eulerian, adică lungimea sa este mai mică decât m, putem afirma că mulțimea $U \setminus U_C$ nu e vidă.

Considerăm graful $G_C = (X', U \setminus U_C)$, unde $X' \subset X$ este

mulțimea vârfurilor lui G care sunt extremități ale muchiilor $U \setminus U_C$. Deoarece $g(x_1)$ este un număr par, oricare ar fi $x_i \in X$, iar ciclul C conține un număr par de muchii incidente fiecărui vârf, deducem că toate vârfurile din G_c au gradul par.

Fie $x_i \in X'$, astfel încât x_i se află şi pe ciclul C. Existența unui astfel de vârf este asigurată de conexitatea lui G.

Alegem o muchie $(x_i, x_j) \in U \setminus C$ şi încercăm să ne "deplasăm" folosind muchii ale lui G_c, astfel încât fiecare muchie să fie parcursă o singură dată. Să presupunem că am ajuns într-un vârf $x_k \neq x_i$. Deoarece x_k are gradul par şi dintre muchiile incidente am folosit o muchie (sau cel mult un număr impar de muchii), rezultă că din x_k putem pleca într-un alt vârf întrucât mai există cel puțin o muchie neutilizată încă. Repetând acest raționament în fiecare vârf vizitat şi ținând seama de faptul că numărul vârfurilor din X' e finit, deducem că în cele din urmă vom ajunge din nou în x_i. Am construit astfel un ciclu C_1 în G_c, care are în comun cu C cel puțin vârful x_i. Reuniunea acestor două cicluri este tot un ciclu simplu, de lungime mai mare decât a lui C. Existența lui $C_1 \bigcup C$ contrazice maximalitatea alegerii lui C şi deci în G există un ciclu eulerian.

47. Presupunem că graful $G = (X, U)$ nu este conex. Prin urmare el conține cel puțin două componente conexe. Notăm prin p numărul componentelor conexe din G. Vom analiza următoarele două cazuri:

1) $|X| = n = 2k + 1$. Deoarece gradul fiecărui vârf $x_i \in X$ este $g(x_i) \geq \dfrac{n-1}{2} = k$, rezultă că fiecare componentă conexă conține cel puțin $k + 1$ vârfuri. Deci în G are loc inegalitatea

$n > p(k+1)(p \geq 2)$, ceea ce contrazice faptul că $n = 2k+1$.

2) $n = 2k$. Deoarece gradul oricărui vârf este număr întreg deducem că $\forall x_i \in X \quad g(x_i) \geq k$. Ca şi în cazul precedent obținem $n > p(k+1)$. Dar $p \geq 2$ şi atunci $n > 2(k+1)$, ceea ce contrazice faptul că $n = 2k$.

Din 1) şi 2) rezultă că G este conex.

48. Deoarece G are un număr maxim de muchii fiecare componentă conexă este un subgraf complet. Să notăm cu $n_1,...,n_p$ ordinele componentelor conexe ale grafului G. Evident, $n = n_1 + n_2 + ... + n_p$, iar $m = \sum_{i=1}^{p} C_{n_i}^2$. Valoarea m este maximă când $n_k = n - p + 1$ şi $n_i = 1 \quad \forall i \neq k$. În acest caz $m = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)$.

49. Pentru a demonstra afirmația din enunț este suficient să arătăm că orice graf cu $n \geq 4$ vârfuri şi două componente conexe conține cel mult $(n-1)(n-2)/2$ muchii. Însă aceasta rezultă din problema precedentă.

50. Este uşor de văzut că dacă o muchie (x, y) a unui graf $G = (X, U)$, $|X| \geq 3$, este istm, atunci x şi y sunt puncte de articulație.

Reciproc, fie x un punct de articulație într-un graf în care gradul fiecărui vârf este trei. Notăm cu y, z şi w vârfurile adiacente cu x. Dacă eliminăm vârful x obținem un graf cu cel puțin două componente conexe, una dintre care conține numai exact unul dintre vârfurile y, z, w (de exemplu y). Fie această componentă G_1. Prin urmare orice lanț care uneşte x cu oricare din vârfurile lui G_1 conține muchia (x, y). Deci (x, y) este un istm.

51. a) Să observăm că orice vârf aparţinând unui ciclu nu este punct de articulaţie. Deci graful cu număr maxim de puncte de articulaţie nu conţine cicluri, adică este o pădure. Pe de altă parte, nici un vârf de gradul unu (vârf suspendat) nu este punct de articulaţie. Cum fiecare arbore are cel puţin două vârfuri suspendate (vezi problema 65), rezultă că graful cu număr maxim de puncte de articulaţie este un arbore cu doar două vârfuri suspendate. Deci numărul maxim de puncte de articulaţie al unui graf cu n vârfuri este $n-2$.

b) Din raţionamentul de mai sus deducem că un exemplu de garf cu n vârfuri şi $n-k$ puncte de articulaţie este un arbore cu k vârfuri suspendate. Precizăm că pentru $k=2$ arborele coincide cu lanţul de lungime $n-1$, iar pentru $k=n-1$ arborele respectiv este graful stea sau graful bipartit complet $K_{1,n-1}$.

52. Necesitatea. Fie x_i un punct de articulaţie al grafului $G=(X,U)$ şi $G_1=(X_1,U_1)$, $G_2=(X_2,U_2)$, …, $G_k=(X_k,U_k)$ – componentele conexe ale grafului care se obţin din G prin eliminarea vârfului x_i. Alegem $u \in X_1$ şi $v \in X_2$. Este evident că orice lanţ ce uneşte aceste vârfuri în G conţine vârful x_i.

Suficienţa este evidentă.

53. Fie $G=(X,U)$, $|X|=n$, un graf planar 5-conex. Evident, $n>6$. Se ştie că numărul maxim de muchii al unui graf planar cu n vârfuri este $3n-6$ (vezi problema 40). Deci pentru graful G are loc inegalitatea

$$|U| \le 3n-6 .$$

Din 5-conexitatea lui G rezultă că gradul fiecărui vârf $x_i \in X$ este cel puțin 5 şi deci are loc relația:

$$2|U| = \sum_{x_i \in X} g(x_i) \geq 5n.$$

Din relațiile stabilite obținem inegalitatea $5n/2 \leq |U| \leq 3n-6$, care conduce imediat la echivalența $6n-12 \geq 5n \Leftrightarrow n \geq 12$. Prin urmare orice graf 5-conex conține cel puțin 12 vârfuri.

54. Pentru a demonstra inegalitatea este suficient să facem precizarea că orice mulțime maximală intern stabilă este şi extern stabilă.

Deci $\beta_o(G) = \min\{|T| : T \text{ extern stabilă }\} \leq |S| = \alpha_o(G)$, unde S este o mulțime maximală intern stabilă.

55. Pentru a rezolva problema este suficient să considerăm doar mulțimile D maximale intern stabile (vezi problema 54).

56. Fie $G = (X,U)$ un graf care satisface proprietatea din enunț şi fie $\mu = \{v_1,...,v_r\}$ un lanț de lungime maximă. Atunci v_1 poate fi adiacent numai cu vârfuri din mulțimea $\{v_2,...,v_r\}$, deoarece în caz contrar μ nu ar mai fi lanț de lungime maximă.

Fie $i = \max\{j \in \{2,...,r\} | (v_1, v_j) \in U\}$. Întrucât $g(x_1) > d$, rezultă că $x_i \geq d+1$. Deci vârfurile $v_1,...,v_i,v_1$ formează un ciclu de lungimea cel puțin $d+1$.

57. a) Inegalitatea $r(G) \leq d(G)$ rezultă imediat din definiția razei şi respectiv a diametrului, iar inegalitatea $d(G) \leq 2r(G)$ este consecința următorului şir de implicații

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \text{ (inegalitatea triunghiului)}$$
$$\Downarrow$$
$$\max_{z\in X} d(x,z) \le d(x,y) + \max_{z\in X} d(y,z)$$
$$\Downarrow$$
$$\max_{x\in X}\max_{z\in X} d(x,z) \le \max_{x\in X} d(x,y) + \max_{z\in X} d(y,z)$$
$$\Downarrow$$
$$\max_{x\in X}\max_{z\in X} d(x,z) \le \min_{y\in X}\max_{x\in X} d(x,y) + \min_{y\in X}\max_{z\in X} d(y,z)$$
$$\Downarrow$$
$$d(G) \le 2r(G).$$

b) Fie x şi y două vârfuri diametral opuse într-un arbore T. Vom nota diametrul arborelui prin $d(T)$ şi lanțul elementar care uneşte x cu y prin l. Vom analiza următoarele cazuri:

1. $d(T) = 2k$. Fie v mijlocul lanțului l $(d(x,v) = d(v,y))$. Dacă t este un vârf ce nu aparține lanțului l, atunci $d(v,t) < k$. În caz contrar distanța dintre vârfurile x şi t ar fi mai mare decât diametrul $d(T)$. Prin urmarea excentricitatea vârfului v este $e(v) = \max\{d(v,v') | v' \in X\} = d(v,x) = k$. Pentru oricare alt vârf q al lanțului obținem $e(q) = \max\{d(q,x), d(q,y)\} > d(v,x) = k$. Să considerăm acum un vârf $v \notin l$ al arborelui şi un vârf z un vârf al lanțului l, astfel încât $d(z,w) = \min\{d(w,r) | r \in l\}$. În acest caz $e(w) \ge d(w,z) + \max\{d(z,x) + d(z,y)\} > k$. Din cele demonstrate rezultă că vârful v este vârful cu excentricitatea cea mai mică. Deci $r(G) = e(v) = k = d/2$.

2. $p = 2k+1$. În acest caz există două vârfuri v, v' ale lanțului l, astfel încât $d(x,v) = d(v,y) - 1$ şi

$d(y,v') = d(x,v) - 1$. Vom determina $e(v)$. Din aceleaşi considerente de mai sus obţinem că pentru orice vârf t al arborelui, care nu aparţine lanţului l, avem $d(v,t) < k+1$. Atunci excentricitatea vârfului v este $e(v) = \max\{d(v,s) | s \in X\} = \max\{d(v,x), d(v,y)\} = k+1$. Pentru orice alt vârf $q \in l$ are loc inegalitatea $e(q) = \max\{d(x,q), d(y,q)\} > k+1$. Dacă $z \notin l$, atunci ca şi în cazul 1., obţinem $e(z) > k+1$. Deci $r(G) = [d/2]+1$.

Din cele demonstrate obţinem imediat relaţia

$$r(G) = \left[\frac{d+1}{2}\right].$$

58. Afirmaţia din problemă nu este adevărată. Drept exemplu poate servi un graf vârfurile căruia generează un ciclu elementar.

59. Demonstraţia este conţinută în rezolvarea problemei 57. Cu toate acestea vom prezenta o metodă iterativă pentru a arăta că orice arbore are fie un vârf central fie două vârfuri centrale adiacente. Evident, pentru arborii cu un vârf sau cu două vârfuri afirmaţia este adevărată. Fie $G = (X,U)$ un arbore şi $T \subset X$ mulţimea vârfurilor suspendate ale lui G. Pentru orice $v \in X$ are loc egalitatea $e(v) = \max\{d(v,v') | v' \in T\}$. Dacă eliminăm din G toate vârfurile lui T şi notăm cu G' arborele rezultat, putem afirma că excentricitatea oricărui vârf din G' va fi cu o unitate mai mică decât excentricitatea aceluiaşi vârf din G. De aici drept consecinţă imediată obţinem că mulţimea centrelor lui G coincide cu mulţimea centrelor lui G'.

Dacă iterăm acest procedeu, atunci vom obţine un şir finit de arbori $G, G', G'', \ldots$ toţi având aceeaşi mulţime de centre cu G. Ultimul arbore nevid din acest şir va avea fie un vârf, fie două vârfuri care sunt totodată şi centrele lui. Prin urmare G are

fie un centru, fie două centre adiacente.

60. Pentru graful planar cu trei vârfuri afirmația din problemă este, evident, adevărată. Admitem că afirmația este adevărată pentru orice graf triangulat cu $n = p \geq 3$ vârfuri. Să considerăm cazul când $n = p + 1$. E cunoscut faptul că orice graf planar conține cel puțin patru vârfuri de grad cel mult 5 (vezi problema 42). Pe de altă parte, deoarece graful planar este triangulat, el nu conține vârfuri de grad mai mic decât 3. Deci există $x_i \in X$, astfel încât $3 \leq g(x_i) \leq 5$.

Considerăm o colorare arbitrară a lui $G = (X, U)$ cu trei culori a, b, c. În această colorare vârful x_i are una din cele trei culori. Notăm prin G' graful care se obține din G prin eliminarea vârfului x_i şi a muchiilor incidente, iar prin C frontiera feței formate după această eliminare. Triangulăm ciclul C şi notăm graful obținut prin G''. Printr-o verificare simplă ne putem convinge că paritatea numărului de fețe noi, obținute după triangulare şi care sunt colorate corect, coincide cu paritatea numărului de muchii ale ciclului C care au extremitățile colorate în culorile a şi b. Deoarece G'' este un graf planar triangulat care are p vârfuri îi putem aplica ipoteza inducției. Deci numărul fețelor colorate din G'' este par. De aici, ținând seama de cele spuse mai sus rezultă că numărul fețelor colorate corect în G este par.

61. Pentru harta respectivă vom construi un graf neorientat $G = (X, U)$, în care mulțimea de vârfuri X corespunde regiunilor conexe din plan determinate de intersecția cercurilor, iar două vârfuri sunt adiacente, dacă regiunile respective au frontieră comună (precizăm că dacă două cercuri sunt tangente exterior, atunci nu se consideră că regiunile mărginite de aceste cercuri au frontieră comună). Se poate arăta uşor că graful astfel construit nu conține cicluri de lungime

impară. Deci el este bipartit şi poate fi colorat corect cu două culori.

62. Vom demonstra afirmația prin inducție după numărul de vârfuri n din G.

Evident pentru $n \le 5$ inegalitatea $\chi(G) \le 5$ este adevărată.

Admitem că $\chi(G) \le 5$ pentru orice graf G ce conține $n \ge 5$ vârfuri. Fie $G = (X, U)$ un graf planar cu $n+1$ vârfuri. În G există un vârf v de grad cel mult 5 (vezi problema 42). Notăm cu A mulțimea $\Gamma(v)$ şi cu G_1 graful care se obține din G prin eliminarea lui v şi a muchiilor incidente cu v. Conform inducției matematice $\chi(G) \le 5$. Să considerăm o colorare corectă a lui G_1 cu culorile c_i, $1 \le i \le \chi(G) \le 5$. Dacă la colorarea vârfurilor din mulțimea A nu a fost folosită o culoare c_j, atunci atribuind această culoare vârfului v, obținem o colorare corectă a lui G în $\chi(G_1) \le 5$ culori. Rămâne să analizăm situația când $|A| = 5$ şi pentru colorarea vârfurilor din A s-au folosit în G_1 exact 5 culori. Notăm prin v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vârfurile mulțimii A şi presupunem că G este desenat în plan, astfel încât oricare două muchii distincte nu au puncte interioare comune. Fără a pierde din generalitate putem considera că v_i este colorat în culoarea $c_i (1 \le i \le 5)$ şi $\{v\}$ generează subgraful din figura 13. Notăm prin G_{13} subgraful grafului G_1 generat de toate vârfurile colorate cu c_1 sau c_3.

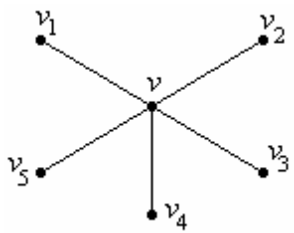

Figura 13

Dacă v_1 şi v_3 se află în componente conexe diferite din G_{13}, atunci în componenta ce

conține pe v_1, colorăm cu c_1 toate vârfurile care au fost colorate cu c_3 şi cu c_3 toate vârfurile care au fost colorate cu c_1. Vom obține o colorare corectă în cinci culori a grafului G_1, în care pentru vârfurile lui A se folosesc doar patru culori c_2, c_3, c_4, c_5. Atribuind lui v culoarea c_1, G va fi colorat corect cu cinci culori.

Dacă v_1 şi v_2 se află în aceeaşi componentă conexă a lui G_{13}, atunci există un lanț între ele, care are vârfurile colorate alternativ numai în culorile c_1 şi c_3. Acest lanț împreună cu v formează un ciclu în interiorul căruia se află numai unul din vârfurile v_2 şi v_4 (precizăm că ne referim la interiorul mulțimii din plan a cărei frontieră este ciclul respectiv). Deci v_2 şi v_4 sunt în mod sigur în componente conexe diferite în G_{24}, unde G_{24} este subgraful lui G_1 generat de vârfurile colorate numai cu c_2 şi c_4. Procedând ca mai sus se poate obține o colorare corectă a lui G în cinci culori, în care v va fi colorat cu c_2.

63. Fie $\chi(G) = \rho$. Deoarece graful G este critic şi $|S| \geq 1$, rezultă că există $r \geq 1$, astfel încât $\chi(G(X \setminus S)) = \chi(G) - r = \rho - r$ (prin $G(X \setminus S)$ se notează subgraful lui G, generat de mulțimea $X \setminus S$). Mai mult, colorarea grafului G poate fi obținută din colorarea grafului $G(X \setminus S)$, la care se adaugă o singură culoare pentru toate vârfurile din mulțimea stabilă interior S. Deci $\chi(G) = \rho = \rho - r + 1$, de unde obținem $r = 1$. Prin urmare are loc egalitatea $\chi(G(X \setminus S)) = \chi(G) - 1$.

64. a) Demonstrăm inegalitatea prin inducție după n. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ din reprezentarea lui K_n se deduce $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = n + 1$.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru orice graf cu cel mul $n-1$ vârfuri şi considerăm un graf G cu n vârfuri. Fie $i \in X$. Atunci $\chi(G) \le \chi(G-\{i\})+1$ şi $\chi(\overline{G}) \le \chi(\overline{G}-\{i\})+1$.

Dacă cel puţin o inegalitate este strictă, atunci din ipoteza de inducţie după însumarea lor se obţine rezultatul.

Dacă $\chi(G) = \chi(G-\{i\})+1$ şi $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G}-\{i\})+1$, atunci numărul de vârfuri adiacente lui i în grafurile complementare G şi $\overline{G}$ este cel puţin $\chi(G-\{i\})$ respectiv $\chi(\overline{G}-\{i\})$. Pe de altă parte suma gradelor lui i în G şi $\overline{G}$ este $n-1$ şi atunci

$$\chi(G)+\chi(\overline{G}) = \chi(G-\{i\})+\chi(\overline{G}-\{i\})+2 \le n-1+2 = n+1.$$

b) Relaţia cerută se obţine folosind inegalitatea precedentă şi ţinând seama că $\chi(G)\chi(\overline{G}) \le (\chi(G)+\chi(\overline{G}))^2$.

c) Notăm $\chi(G)$ cu k, şi cu n_i numărul de vârfuri ale grafului G colorate cu culoarea i. De asemenea fie N_0 şi N_1 numărul de elemente din matricea de adiacenţă a lui G egale cu 0 respectiv 1. Deoarece între vârfurile colorate cu aceeaşi culoare nu există muchii, atunci în matricea de adiacenţă pentru fiecare culoare i există n_i^2 elemente nule. Deci

$$N_0 \ge n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2 \ge \frac{(n_1+n_2+\ldots n_k)^2}{k} = \frac{n^2}{k}.$$

Însă $n^2 = N_0 + N_1 \ge 2m + \frac{n^2}{k}$, ceea ce conduce la rezultat, adică

$$\chi(G) = k \ge \frac{n^2}{n^2-2m}.$$

65. Presupunem că arborele considerat are numai un singur vârf terminal v, adică $g(v)=1$ şi $g(v')>1$ pentru orice

$v' \in X \setminus \{v\}$. Se ştie că

$$2m = \sum_{i=1}^{n} g(i) \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

Pe de altă parte, deoarece orice arbore cu n vârfuri are $n-1$ muchii, avem $2m = 2(n-1) = 2n-2$. În concluzie $2n-2 \geq 2n-1$, ceea ce este absurd.

66. Vom demonstra această proprietate prin inducție după numărul de vârfuri ale lui G.

Dacă G are două vârfuri, atunci proprietatea este evidentă.

Să presupunem că ea este adevărată pentru orice arbore cu n vârfuri şi fie G un arbore cu $n+1$ vârfuri. G conține un vârf x_i de grad 1, adiacent cu x_j. Vom elimina din G vârful x_i şi muchia (x_i, x_j). Arborele G_i obținut în acest mod are n vârfuri.

Fie $G_1,...,G_p$ o familie de subarbori ai lui G astfel încât fiecare doi un vârf comun. Prin suprimarea lui x_i şi a muchiei (x_i, x_j) vom obține o familie de subarbori $G_1^i,...,G_p^i$ ai lui G_i care păstrează această proprietate. Într-adevăr, dacă G_k şi G_r au în comun un vârf $v \neq x_i$, atunci acesta va rămâne comun şi pentru G_k^i şi G_r^i, iar dacă vârful comun este x_i, atunci este evident că şi x_j este comun pentru perechile de arbori G_k şi G_r şi respectiv G_k^i şi G_r^i.

Aplicând ipoteza inducției pentru familia $G_1^i,...,G_p^i$, obținem că această familie are un vârf comun şi deci subarborii $G_1,...,G_p$ au şi ei această proprietate. Unica situație care nu a fost luată în discuție este aceea când în familia $G_1,...,G_p$ unul

dintre subarbori este format numai din vârful x_i. În acest caz, din proprietățile familiei v-a rezulta imediat că x_i este comun tuturor subarborilor.

67. "$\Leftarrow$" este evidentă, deoarece $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m = 2n-2$. Pentru demonstrarea implicației reciproce vom folosi inducția după n.

Pentru $n = 2$ vom obține relația $d_1 + d_2 = 2$ şi din relația $0 < d_1 \le d_2$ rezultă imediat că $d_1 = d_2 = 1$. Pentru acest caz putem construi cu uşurință arborele care conține două vârfuri şi o singură muchie.

Să presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$ numere şi să o demonstrăm pentru $d_1,...,d_n$ cu $n \ge 3$ şi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

Afirmăm că $d_1 = 1$. Într-adevăr, dacă am presupune că $d_1 \ge 2$, atunci ar rezulta că $\sum_{i=1}^{n} d_i \ge 2n > 2n-2$, ceea ce ar fi absurd. De asemenea este clar că $d_n > 1$. În caz contrar am avea $\sum_{i=1}^{n} d_i = n < 2n-2$.

Deci putem scrie

$$d_2 + d_3 + ... + d_{n-1} + (d_n - 1) = 2n-4 = 2(n-1)-2.$$

Conform ipotezei inducției există un arbore A cu $n-1$ vârfuri şi având gradele vârfurilor $d_2, d_3,..., d_n - 1$. Asupra lui A facem transformarea: se adaugă un vârf care să aibă gradul 1 şi să fie adiacent cu vârful de grad d_{n-1} al lui A. Arborele astfel obținut are proprietățile cerute în enunț.

68. Fie n ordinul arborelui G. După cum se ştie, în orice graf are loc relaţia

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i) = 2m.$$

În cazul arborilor G această relaţie devine:

$$g_1 + 2g_2 + 3g_3 + ... + (n-1)g_{n-1} = 2n - 2.$$

Deci

$$g_1 + 2g_2 + 3(g_3 + g_4 + ... + g_{n-1}) \le 2n - 2 = 2(g_1 + ...g_{n-1}) - 2,$$

adică

$$g_1 + 2g_2 + 3g \le 2g_1 + 2g_2 + 2g - 2,$$

ceea ce este echivalent cu $g_1 \ge g + 2$.

Să observăm că egalitatea are loc când $g_i = 0 \quad \forall i \ge 4$.

69. Garful fiind arbore este conex şi deci între oricare două vârfuri ale sale există un singur lanţ. Cum diametrul arborelui este cel puţin $2k-3$, rezultă că există cel puţin un lanţ (în arbori toate lanţurile sunt elementare) L care trece prin $2k-2$ vârfuri. Să notăm extremităţile lanţului L prin x_i şi x_j.

Fie $p \in X$. Notăm cu L_{pi} şi L_{pj} lanţurile, din arborele dat, dintre vârfurile p şi i, respectiv dintre p şi j. Deoarece între oricare două vârfuri ale arborelui există un singur lanţ, deducem că L_{pi} conţine o parte a lanţului L, iar L_{pj} conţinea cealaltă parte a lui L. Cum L are lungimea mai mare sau egală cu $2k-3$, înseamnă că cel puţin una din cele două părţi ale lui L are lungimea mai mare sau egală cu $k-1$. Deci dacă diametrul arborelui este egal cu $2k-3$ şi muchia de mijloc a lanţului L uneşte vârfurile s şi t, atunci pentru fiecare $p \in X - \{s,t\}$ cel puţin unul dintre lanţurile L_{pi} şi L_{pj} are lungimea mai mare sau egală cu k. Adică din vârful p există cel puţin un lanţ cu lungimea k.

Pentru vârfurile p din $X-L$ există cel puțin $n-(2k-2)$ lanțuri distincte de lungimea k.

Pentru vârfurile p din L există cel puțin $k-2$ lanțuri distincte de lungime k (alegând p de la i la s, celelalte $k-2$ lanțuri de lungime k corespunzătoare alegerii lui p de la t la j coincid cu primele, diferența fiind aceea că parcurgerea muchiilor se face în ordine inversă).

În concluzie numărul minim de lanțuri de lungime k este $n-2k+2+k-2=n-k$.

70. Fiecare componentă conexă conține un arbore parțial, deci are loc $m_i \geq n_i - 1$, unde m_i şi n_i reprezintă numărul de muchii, respectiv de vârfuri din componenta conexă cu numărul i, $1 \leq i \leq p$. Însumând după i se obține relația cerută.

71. Între oricare două vârfuri ale unui arbore există un lanț unic care le unește.

Subgraful indus de B nu conține cicluri, deoarece nici A nu conține cicluri. Dacă $x, y \in B$ şi $x \neq y$ atunci x, y sunt vîrfuri ale fiecărui subarbore $A_1,...,A_p$, deci fiecare din aceşti subarbori conțin lanțul unic $(x, z_1,..., z_k, y)$ care îl uneşte pe x cu y în A.

Deci $z_1,...,z_k \in X_1,...X_p$ sau $z_1,...,z_k \in B$, ceea ce demonstrează că subgraful indus de mulțimea de vârfuri B este conex, deci este arbore (X_i, $\forall i = \overline{1,p}$ este mulțimea de vârfuri a arborelui A_i).

72. Dacă arborele G are mulțimea vârfurilor X de cardinal n, atunci el are $n-1$ muchii.

Deci în suma $\sum_{x,y \in X} d(x,y)$ există exact $n-1$ termeni egali cu 1, restul termenilor nenuli fiind egali cu cel puțin 2. Dacă G

este o stea (graful $K_{1,n-1}$), toți termenii diferiți de 0 (pentru $x = y$) și de 1 au valoarea 2. Dacă G nu este stea, există cel puțin un termen egal cu 3, deci minimul căutat se atinge numai pentru arborele $K_{1,n-1}$. Pentru a găsi maximul acestei sume să arătăm că $s(x)$ este maxim în mulțimea vârfurilor terminale ale unui arbore numai atunci când arborele G este un lanț și x este una din extremitățile sale. Dacă L este un lanț cu n vârfuri, x fiind una dintre extremități, atunci avem

$$s(x) = 1 + 2 + ... + (n-1).$$

G fiind un arbore și x un vârf terminal cu $e(x) = d$, va exista cel puțin câte un vârf la distanța $1,2,...,d$ de x. Ținând seama de definiția lui $s(x)$, rezultă că suma care defineşte pe $s(x)$ are forma:

$$s(x) = 1 + 2 + ... + d + d_1 + ... + d_{n-1-d},$$

unde $d_1,...,d_{n-1-d} \le d$. Comparând cu expresia lui $s(x)$ în cazul lanțului L, găsim că maximul lui $s(x)$ se atinge numai în cazul când $d = n-1$, adică G este un lanț și x este una dintre extremitățile sale. Să demonstrăm prin inducție după n că în mulțimea arborilor G cu n vârfuri X $\sum_{x,y \in X} d(x,y)$ este maximă atunci când G este un lanț. Pentru $1 \le n \le 3$ proprietatea este imediată, deoarece orice arbore cu cel mult 3 vârfuri, este un lanț. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult $n-1$ vârfuri și fie G un arbore cu n vârfuri care formează mulțimea X. Dacă a este un vârf de gradul 1 al arborelui G, atunci:

$$\sum_{x,y \in X} d(x,y) = s(a) + \sum_{x,y \in Y} d(x,y),$$

unde $Y = X \setminus \{a\}$.

Primul termen $s(a)$ este maxim numai dacă G este un

lanț şi a este una din extremitățile sale. În acest caz, în baza inducției (aplicată subarborelui cu mulțimea Y de $n-1$ vârfuri) şi al doilea termen este maxim.

73. 1) Să notăm cu G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vârfului x şi a muchiilor incidente cu x. Deoarece G este arbore, rezultă că G_x nu este conex şi y şi z se găsesc în componente conexe diferite ale lui G_x, care conțin respectiv k_1 şi k_2 vârfuri. Avem $k_1 + k_2 \le n-1$.

Din definiția funcției $s(x)$ rezultă că deplasându-ne de la x la y ne apropiem cu o unitate de k_1 vârfuri, dar ne depărtăm cu câte o unitate de $n-k_1$ vârfuri.

Deci putem scrie:

$$s(x) = s(y) + k_1 - (n-k_1) = s(y) + 2k_1 - n.$$

În mod analog găsim:

$$s(x) = s(z) + 2k_2 - n,$$

care prin sumare ne dau:

$$2s(x) = s(y) + s(z) + 2(k_1 + k_2 - n) \le s(y) + s(z) - 2.$$

2) Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două vârfuri neadiacente x şi y astfel încât $s(x) = s(y) =$ minimum.

Fie $\lfloor x, x_1, x_2, ..., x_p, y \rfloor$ lanțul (unic) care uneşte în arbore vârfurile x şi y cu $p \ge 1$.

Conform ipotezei $s(x_1) \ge s(x)$. Inegalitatea demonstrată la 1) ne conduce la:

$$s(x) + s(x_2) > 2s(x_1) \ge s(x_1) + s(x),$$

deci

$$s(x_2) > s(x_1) \ge s(x).$$

La fel:

$$s(x_1) + s(x_3) > 2s(x_2) > s(x_1) + s(x_2),$$

deci

$$s(x_3) > s(x_2) > s(x_1) \geq s(x)$$

ş.a.m.d.

În final găsim $s(y) > ... > s(x_1) \geq s(x)$, ceea ce contrazice egalitatea $s(x) = s(y)$, deoarece $p \geq 1$.

Punctele în care $s(x)$ îşi atinge minimul formează baricentrul arborelui G. Considerând un lanț cu un număr impar (respectiv par) de vârfuri, se observă că baricentrul poate fi format dintr-un singur vârf sau din două vârfuri adiacente.

Să considerăm arborele, format de un lanț cu vârfurile $x_1, x_2, ..., x_p$ şi de vârfurile $y_1, y_2, ..., y_q$, incidente cu x_1. Se observă cu uşurință că dacă p este par, atunci centrul arborelui astfel obținut este vârful $x_{\frac{p}{2}}$.

Dacă q este sificient de mare, de exemplu $q = \left(\frac{p}{2}\right)$, baricentrul arborelui este x_1, iar distanța dintre centru şi baricentru este $\frac{p}{2} - 1$ şi poate lua valori oricât de mari pentru p suficient de mare.

74. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărului vârfurilor. Dacă $|X| = 1$ sau 2 proprietatea este imediată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată păentru orice arbore cu cel mult $n-1$ vârfuri şi să o demonstrăm pentru un arbore G cu $n \geq 3$ vârfuri. Dacă f este o bijecție, atunci $f(x) \neq f(y)$ pentru orice $x \neq y$ şi $(x, y) \in U$ implică $(f(x), f(y)) \in U$, deci f este un automorfism a lui G. Orice vârf suspendat este deci aplicat de f tot într-un vârf suspendat.

Dacă notăm prin G' subarborele obținut din G prin suprimarea tuturor vârfurilor suspendate, rezultă că G' este nevid, deoarece $n \geq 3$. Notând cu X' mulțimea vârfurilor lui G', rezultă că $f(X') = X'$ şi restricția lui f la X' are aceleaşi proprietăți ca f. Deci f' (şi în consecință f) are un punct fix sau o muchie fixă, conform ipotezei de inducție ($|X'| \leq n-2$). Dacă f nu este o bijecție, atunci $f(X)$ este o submulțime proprie de vârfuri ale lui G. Aceste vârfuri induc un subgraf conex a lui G (din condiția impusă lui f), deci $f(X)$ este mulțimea vârfurilor unui arbore şi $|f(X)| \leq n-1$.

Deoarece $f(f(X)) \subset f(X)$, putem considera restricția lui f la subarborele generat de mulțimea de vârfuri $f(X)$, care are aceleaşi proprietăți ca şi f. Conform ipotezei de inducție, această restricție, deci şi f, are un punct fix sau o muchie fixă.

Proprietatea nu este adevărată dacă G conține cicluri. De exemplu, dacă $G = K_3$ şi conține vârfurile x, y, z, să definim $f(x) = y$, $f(y) = z, f(z) = x$. În acest caz aplicația f nu are nici puncte fixe, nici muchii fixe.

75. Am văzut că orice arbore are un vârf central u sau două vârfuri centrale adiacente u şi v. Vom demonstra prin inducție după numărul m al vârfurilor din X că dacă arborele A are un singur vârf central u, atunci $f(u) = u$ şi dacă A are două vârfuri centrale u şi v, atunci $f(u) = u$ şi $f(v) = v$ sau $f(u) = v$ şi $f(v) = u$. Deoarece bijecția f păstrează adiacența vârfurilor, rezultă că vârfurile x şi $f(x)$ au acelaşi grad în arborele A.

Dacă $m = 1$ arborele se reduce la vârful central u şi $f(u) = u$, pentru $m = 2$ arborele se reduce la două vârfuri centrale adiacente u şi v şi proprietatea este deasemenea

adevărată. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toți arborii cu cel mult $m-1$ vârfuri ($m \geq 3$) şi fie A un arbore cu m vârfuri. Dacă $x_1,...,x_r$ sunt toate vârfurile suspendate ale arborelui A, rezultă că $f(x_1),...,f(x_2)$ sunt vârfuri de gradul unu, deci constituie o permutare a mulțimii vârfurilor suspendate. Dacă considerăm restricția funcției f la mulțimea vârfurilor de grad cel puțin 2 ale lui A:

$$g : X_r \to X_r, \quad X_r = X \setminus \{x_1,...,x_r\}$$

şi $g(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X_r$, rezultă că g este un automorfism al subarborelui A_r al lui A cu mulțimea de vârfuri X_r. Însă A şi A_r au aceleaşi centre. Aplicând ipoteza de inducție, obținem că A are un singur vârf central u şi $g(u) = f(u) = u$, sau A are două vârfuri centrale adiacente u şi v şi $g(u) = f(u) = u$, $g(v) = f(v) = v$, sau $g(u) = f(u) = v$ şi $g(v) = f(v) = u$.

Deci proprietatea menționată este adevărată pentru orice m. Deoarece trebuie să arătăm că f are un punct fix, singurul caz care trebuie studiat este cazul când A are două vârfuri centrale adiacente u şi v şi $f(u) = v$, $f(v) = u$. Să notăm prin A_u şi A_v subarborii obținuți din A prin suprimarea muchiei (u,v) şi care conțin vârfurile u, respectiv v. Dacă $u_1,...,u_s$ sunt vârfurile incidente cu u în arborele A_u, atunci deoarece f păstrează adiacența în arborele A, rezultă că $f(u_1),...,f(u_s)$ sunt vârfuri adiacente cu v în subarborele A_v, ş.a.m.d.

Deci, dacă notăm cu X_u şi X_v mulțimile de vârfuri ale arborilor A_u, respectiv A_v atunci rezultă că $f(X_u) = X_v$. Restricția funcției f pe mulțimea X_u, notată $h : X_u \to X_v$, unde $h(x) = f(x)$ pentru orice $x \in X_u$, este o bijecție şi $[x,y]$ este o

muchie în arborele A_u dacă şi numai dacă $(h(x), h(y))$ este o muchie în arborele A_v. Deci h este un izomorfism al arborilor A_u şi A_v. Rezultă că A_u şi A_v au un acelaşi număr de vârfuri, ceea ce implică $|X| = |X_u| + |X_v| = 2|X_u|$, adică $|X|$ este număr par.

Dar am presupus că $|X| = 2n+1$. Rezultă că situaţia când $f(u) = v$ şi $f(v) = u$ este imposibilă. Deci f are cel puţin un punct fix.

76. Din arborele G vom obţine o arborescenţă considerând vârful x_1 rădăcină şi orientând toate muchiile arborelui astfel încât în orice vârf să sosească un singur drum care porneşte din x_1.

În acest mod am definit o relaţie de ordine parţială pe mulţimea X: vom scrie $x_i \le x_j$ dacă drumul unic de la x_1 la x_j conţine vârful x_i.

Dacă definim matricea $Z = (z_{ij})_{i,j-1,\dots,n}$ prin: $z_{ij} = 1$ dacă $x_i \le x_j$ şi $z_{ij} = 0$ în caz contrar. Elementele din X pot fi renumerotate astfel încât Z să aibă o formă superior diagonală cu $z_{ii} = 1$ pentru $i = 1,\dots,n$. Deci $\det Z = 1$.

Vom nota:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & -2 \end{pmatrix}$$

şi vom arăta că $Z^T AZ = D$.

Într-adevăr, elementul din linia i şi coloana j ale

matricii $Z^T AZ$ este

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} z_{ki} a_{kl} z_{lj} = \sum_{x_k \le x_i} \sum_{x_l \le x_j} a_{kl} .$$

Dar $a_{kl} \ne 0$ numai pentru $k = l$, sau $k = 1$, sau $l = 1$, deci putem scrie:

$$c_{ij} = \sum_{x_k \le x_i, x_j} (-2) + \sum_{x_{kl} \le x_i} 1 + \sum_{x_l \le x_j} 1,$$

deoarece $x_1 \le x_i$ pentru orice $i = 1,...,n$.

Notând cu x_r ultimul vârf comun al drumurilor de la x_1 la x_i şi respectiv de la x_1 la x_j, la care ajungem plecând din x_1, putem scrie:

$$c_{ij} = -2(d(x_1, x_r) + 1) + (d(x_1, x_i) + 1) + (d(x_1, x_j) + 1) =$$
$$= d(x_1, x_i) + d(x_1, x_j) - 2d(x_1, x_r) = d(x_i, x_j).$$

Deci am arătat că $Z^T AZ = D$ şi în concluzie $\det D = \det A$. Adunând pe rând coloanele a II-a, a III-a, …, a n-a la prima coloană a matricii A şi dezvoltând matricea obţinută după prima coloană, deducem:

$\det A = (n-1)(-2)^{n-1} - \det A$, deci $\det A = -(n-1)(-2)^{n-2}$.

77. Să presupunem că vârfurile suspendate sunt fixate şi ele sunt $x_1,...,x_p$. Deoarece $d_1 = .. = d_p = 1$, numărul căutat este:

$$\sum_{(d_{p+1},...,d_n)} \frac{(n-2)!}{(d_{p+1}-1)!...(d_n-1)!} = \sum_{(k_{p+1},...,k_n)} \frac{(n-2)!}{k_{p+1}!...k_n!} \qquad (1)$$

unde prima sumă se face după toate valorile

$$d_{p+1},...,d_n \ge 2 \text{ şi } d_{p+1} + ... + d_n = 2n - 2 - p.$$

A II-a sumă se obţine prin schimbarea de variabile $k_{p+1} = d_{p+1} - 1,...,k_n = d_n - 1$, deci $k_{p+1},...,k_n \ge 1$ şi $k_{p+1} + ... + k_n = n - 2$. Numărul

$$\frac{(n-2)!}{k_{p+1}!\ldots k_n!}$$

reprezintă numărul de moduri de a plasa $n-2$ obiecte în $n-p$ căsuțe astfel încât prima căsuță să conțină k_{p+1} obiecte, …, căsuța cu numărul $n-p$ să conțină k_n obiecte. Deoarece $k_i \geq 1$ pentru $i = p+1,\ldots,n$, acest număr reprezintă de asemenea numărul funcțiilor surjective $f : X \to Y$, unde $|X| = n-2$, $|Y| = n-p$, şi dacă notăm $Y = \{y_{p+1},\ldots,y_n\}$, avem $\left|f^{-1}(y_i)\right| = k_i \geq 1$ pentru $p+1 \leq i \leq n$. Deci suma (1) este egală cu numărul funcțiilor surjective $s_{n-2,n-p} =$ $= (n-p)!\,S(n-2,n-p)$, unde $S(n-2,n-p)$ este numărul lui Stirling de speța a doua.

Deoarece cele p vârfuri terminale nu sunt specificate, ele pot fi alese din mulțimea celor n vârfuri în C_n^P moduri.

Deci numărul arborilor cu n vârfuri, dintre care p vârfuri au gradul unu, este egal cu:

$$C_n^P \cdot (n-p)!\,S(n-2,n-p) = \frac{n!}{p!}S(n-2,n-p).$$

78. a) Fie $f(n)$ numărul de posibilități căutat.

Obținem $f(1) = 1$ şi $f(2) = 2$, corespunzător alegerii muchiei (x_1, y_1) sau respectiv a muchiilor (x_1, x_2) şi (y_1, y_2), sau (x_1, y_1) şi (x_2, y_2).

Dacă graful-scară are $2n$ vârfuri, putem alege fie muchia (x_1, y_1) şi pentru muchiile rămase mai rămân $f(n-1)$ posibilități de alegere, fie muchiile (x_1, x_2) şi (y_1, y_2) şi pentru muchiile rămase mai rămân $f(n-2)$ posibilități de a fi alese.

Astfel obținem:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

relație care împreună cu valorile inițiale $f(1) = 1$ şi $f(2) = 2$ ne arată că $f(n) = F_n$, care este termenul al n-lea al şirului Fibonacci.

b) Dacă notăm numărul arborilor parțiali ai grafului scară cu $g(n)$, obținem $g(1) = 1$, dacă arborele parțial constă din (x_1, y_1), şi $g(2) = 4$ arbori care se obțin din ciclul cu patru vârfuri dacă suprimăm pe rând câte o muchie a ciclului.

Pentru a stabili o relație de recurență pentru numerele $g(n)$, să considerăm un graf ca cel din figura 6 cu $2n+2$ vârfuri: $x_1, y_1, ..., x_{n+1}, y_{n+1}$.

Mulțimea arborilor săi parțiali se poate scrie sub forma

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

unde A_1 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia (x_1, x_2), A_2 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia (x_1, y_1), A_3 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia (y_1, y_2) şi A_4 este mulțimea arborilor parțiali care conțin muchiile $(x_1, x_2), (x_1, y_1), (y_1, y_2)$ şi nu conțin muchia (x_2, y_2). Este clar că aceste mulțimi sunt disjuncte două câte două. Dacă, de exemplu, ar exista un arbore parțial din $A_1 \cap A_2$, aceasta nu ar conține muchiile (x_1, x_2) şi (x_1, y_1), deci vârful x_1 ar fi izolat, ceea cear contrazice definiția unui arbore parțial.

Obținem $|A_1| = |A_2| = |A_3| = g(n)$, deoarece pentru subgraful format din vârfurile $x_2, y_2, ..., x_{n+1}, y_{n+1}$ avem $g(n)$ posibilități de a mai forma arbori parțiali. Notând $|A_4| = h(n+1)$, deducem:

$$g(n+1) = 3g(n) + h(n+1) \qquad (1)$$

Însă considerând graful din figura 6 cu $2n$ vârfuri, notate: $x_2, y_2, ..., x_{n+1}, y_{n+1}$, mulțimea arborilor săi parțiali se poate scrie sub forma: $B_1 \bigcup B_2$, unde B_1 este mulțimea arborilor parțiali care nu conțin muchia (x_2, y_2) şi B_2 este mulțimea arborilor parțiali care conțin muchia (x_2, y_2).

Deci $g(n) = |B_1| + |B_2|$, deoarece $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$.

Dar $|B_1| = g(n-1)$ şi $|B_2| = |A_4|$, deoarece există o bijecție între aceste două mulțimi definită astfel: pentru fiecare arbore parțial din B_2, care, eviden,t conține muchia (x_2, y_2), se înlocuieşte această muchie printr-un lanț de lungime egală cu 3, având aceleaşi extremități: $[x_2, x_1, y_2, y_4]$ şi se obține un arbore parțial din A_4.

Este clar că astfel se obține o bijecție, şi deci:

$$g(n) = g(n-1) + h(n+1),$$

de unde, ținând cont de (1), deducem recurența:

$$g(n+1) = 4g(n) - g(n-1). \qquad \text{(A)}$$

Ecuația caracteristică a relației este:

$$r^2 - 4r + 1 = 0,$$

cu soluțiile $r_1 = 2 + \sqrt{3}$ şi $r_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Deci soluția generală a recurenței (A) are forma:

$$g(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n,$$

unde r_1 şi r_2 se determină din sistemul:

$$C_1\left(2 + \sqrt{3}\right) + C_2\left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$$
$$C_1\left(7 + 4\sqrt{3}\right) + C_2\left(7 - 4\sqrt{3}\right) = 4,$$

care are soluțiile $C_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ şi $C_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Deci $g(n) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right)$.

79. Dacă graful G are un ciclu eulerian, atunci G este conex şi are gradele pare, deoarece la fiecare trecere printr-un vârf se utilizează două muchii. Reciproc, dacă G este conex şi are gradele pare, muchiile sale pot fi orientate astfel încât să se obţină un graf orientat, care verifică $d^+(x) = d^-(x)$ pentru orice vârf x. N acest caz graful orientat obţinut are un circuit eulerian, care corespunde unui ciclu eulerian în graful G.

Graful G este conex şi are $2k$ vârfuri de grad impar $(k \geq 1)$. Să notăm cu G_1 graful obţinut din G prin adăugare unui nou vârf, pe care îl unim prin muchii cu toate cele $2k$ vârfuri de grad impar ale lui G. Rezultă că G_1 este conex şi are gradele pare, deci are un ciclu eulerian. Suprimând vârful adăugat şi cele $2k$ muchii incidente cu acesta, ciclul eulerian se descompune în k lanţuri disjuncte după muchii, care acoperă toate muchiile lui G.

Să observăm că, deoarece suma gradelor vârfurilor unui graf este un număr par, rezultă că numărul vârfurilor de grad impar este par.

80. Să presupunem prin reducere la absurd că G nu este conex şi fie C_1 o componentă care nu conţine vârful x_n. Fie $|C_1| = k$ şi $x_{i1},...,x_{ik}$ vârfurile pe care le conţine, unde:

$$1 \leq i_1 < ... < i_k < n .$$

Componenta care îl conţine pe x_n conţine toate vârfurile adiacente cu x_n, deci ea conţine cel puţin $d_n + 1$ vârfuri.

Rezultă:

$$k = |C_1| \leq n - (d_n + 1).$$

Deoarece $k \leq i_k$ şi vârfurile adiacente cu x_{ik} se găsesc toate în componenţa C_1, obţinem $d_k \leq d_{ik} \leq k - 1$. Am ajuns la

o contradicție, deoarece, conform ipotezei, $k \le n - d_n - 1$ implică $d_k \ge k$. Deci proprietatea este demonstrată.

81. Să arătăm mai întâi că G conține un graf parțial A care este arbore. Dacă G nu conține cicluri, G este un arbore şi vom lua $A = G$. În caz contrar G conține cel puțin un ciclu C_1.

Vom suprima o muchie oarecare u_1 a ciclului C_1.

Obținem un graf parțial G_1 al lui G. Dacă G_1 nu conține cicluri, atunci vom lua $A = G_1$, deoarece în acest caz G_1 este conex şi nu conține cicluri, deci este arbore. În caz contrar suprimăm o muchie u_2 a unui ciclu g_2 al lui G_1, ş.a.m.d. Acest proces nu poate continua până la infinit, deoarece G conține cel mult C_n^2 muchii. În final obținem un graf conex fără cicluri G_T şi definim $A = G_T$.

Se ştie că orice arbore A are cel puțin un vârf suspendat x_1. Dacă $k = n$, atunci vom considera $H = G$. În caz contrar, în arborele A, vom suprima vârful x_1 şi muchia incidentă cu x_1, obținând un nou arbore A_1. Repetând acest procedeu ajungem să eliminăm vârfurile $x_1, x_2, ..., x_{n-k}$, obținând un arbore A_{n-k} cu k vârfuri. Subgraful H îl alegem ca fiind subgraful indus de cele k vârfuri ale arborelui A_{n-k}. H este conex, deoarece conține arborele parțial A_{n-k} cu aceeaşi mulțime de vârfuri, care este conex.

82. Vârful de grad 9 trebuie să fie adiacent cu toate celelalte vârfuri ale grafului, deci şi cu vârfurile de grad 1.

Rezultă că vârful de grad 7 poate fi adiacent cu numai $9 - 3 = 6$ vârfuri, ceea ce este absurd.

Deci nu există un graf cu proprietatea cerută.

83. Necesitatea condiției este imediată, deoarece $d_1 + ... + d_n$ este dublul numărului de muchii, deci este număr

par şi $d_n \le d_1 + ... + d_{n-1}$, deoarece orice muchie incidentă cu x_n mai este incidentă cu unul din vârfurile rămase, dacă $d_n = d(x_n)$.

Vom demonstra suficiența condiției prin inducție după $d_1 + ... + d_n$. Dacă $d_1 + ... + d_n = 2$, atunci rezultă că $d_1 = ... = d_{n-2} = 0$ şi $d_{n-1} = d_n - 1$. Deci graful căutat conține o muchie şi $n-2$ vârfuri izolate.

Să presupunem proprietatea adevărată pentru toate şirurile de numere $d_1,...,d_n$ care verifică a) şi b) şi în plus $d_1 + ... + d_n \le 2d(d \ge 2)$.

Fie acum $d_1 + ... + d_n = 2d + 2$, iar condițiile a) şi b) verificate. Vom studia două cazuri:

I. Are loc relația $d_{n-2} < d_n$. Rezultă că $d_n - 1$ este cel mai mare din şirul $d_1, d_2, ..., d_{n-2}, d_{n-1} - 1, d_n - 1$ şi rămâne să verificăm condițiile:

c) $d_1 + ... + d_{n-2} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \equiv 0 \pmod 2$,

d) $d_1 + ... + d_{n-2} + d_{n-1} - 1 \ge d_n - 1$,

care rezultă imediat din a) şi b).

II. Are loc egalitatea $d_{n-2} = d_n$. Rezultă $d_{n-1} = d_n$. Condiția c) este de asemenea îndeplinită şi condiția b) devine:

e) $d_1 + ... + d_{n-3} + (d_{n-1} - 1) + (d_n - 1) \ge d_{n-2}$,

deoarece $d_{n-2} = \max(d_1, ..., d_{n-3}, d_{n-1} - 1, d_n - 1)$.

Însă condiția e) are loc. Într-adevăr, dacă $d_{n-2} = 1$, condiția a) implică faptul că membrul stâng al inegalității e) este impar, deci este cel puțin egal cu 1 deoarece în acest caz $d_{n-1} = d_n = 1$.

Dacă $d_{n-2} \ge 2$ obținem $d_{n-1} - 1 + d_n - 1 \ge d_{n-2}$ pentru că $d_{n-2} = d_{n-1} = d_n$.

Rezultă că numerele $d_1,...,d_{n-2},d_{n-1}-1,d_n-1$ de sumă $2d$ verifică condițiile a) şi b) şi conform ipotezei de inducție, există un multigraf cu n vârfuri ale cărui grade formează şirul scris. Unind printr-o nouă muchie vârfurile de grade $d_{n-1}-1$ şi d_n-1, obținem un graf ale cărui grade sunt tocmai $d_1,...,d_n$.

84. Să presupunem că există un graf G regulat de grad k cu n vârfuri.

Obținem $kn=2m$, unde m este numărul de muchii ale lui G şi gradul k nu poate depăşi $n-1$. Am găsit deci două condiții necesare pe care trebuie să le satisfacă numărul n:

a) $nk \equiv 0 \pmod 2$;

b) $n \geq k+1$.

Vom demonstra că dacă a) şi b) sunt satisfăcute, atunci există un graf regulat de grad k cu n vârfuri.

Vom distinge 2 cazuri:

1) k este par. Considerăm vârfurile unui poligon regulat cu n vârfuri pe care le unim prin muchii cu vecinii lor, cu vecinii de ordinul doi, …, cu vecinii de ordinul $\frac{k}{2}$. Deoarece $k<n$, obținem $\frac{k}{2}<\frac{n}{2}$. Deci prin această construcție fiecare vârf are gradul k şi nu apar muchii multiple.

2) k este impar. Din condiția a) rezultă că n este par. Vom desena graful regulat de grad $k-1$ cu n vârfuri construit ca în cazul 1. Condiția b) ne asigură că avem:

$$\frac{k-1}{2} \leq \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}-1,$$

deci extremitățile celor mai lungi diagonale ale poligonului nu sunt unite prin muchii. Unind deci vârfurile diametral opuse ale poligonului prin câte o muchie, fiecare vârf va avea gradul egal k, deci obținem un graf regulat de gradul k cu n vârfuri.

85. Să presupunem prin reducere la absurd că pentru orice vârf x subgraful G_x nu este conex.

Fie $L = (x_1,...,x_m)$ un lanț elementar de lungime maximă în graful G. Conform ipotezei, G_{x_1} nu este conex. Să notăm cu C_1 o componentă conexă a acestui subgraf care nu conține lanțul $(x_1,...,x_m)$.

G fiind conex, există o muchie care unește un vârf $y \in C_1$ cu vârful x_1, deoarece vârfurile din C_1 nu pot fi unite cu vârfurile din alte componente conexe ale subgrupului G_{x_1}. Obținem că $y \notin \{x_2,...,x_m\}$, deci lanțul

$$(y, x_1,...,x_m)$$

este un lanț elementar mai lung decât L, ceea ce contrazice ipoteza că L este un lanț elementar de lungime maximă.

Rezultă că există un vârf x astfel încât subgraful G_x să fie conex.

Dacă G este un circuit elementar, prin suprimarea oricărui vârf găsim un subgraf care nu mai este tare conex, deşi G are această proprietate.

86. Vom demonstra că a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a).

Pentru a arăta că a) $\Rightarrow$ c), fie G un graf 2-conex şi u şi v două muchii care au o extremitate comună x. Fie y şi z celelalte două extremități diferite de x. Deoarece G_x este conex, rezultă că există un lanț elementar în G_x care unește y cu z. Acest lanț elementar împreună cu muchiile u şi v formează în graful G un ciclu elementar. Deci oricare două muchii cu o extremitate comună sunt echivalente. Deoarece G este conex, rezultă că această relație de echivalență are o singură clasă şi anume mulțimea muchiilor grafului G. Deci oricare două muchii ale lui G se găsesc pe un ciclu elementar.

De asemenea, din faptul că G este conex, rezultă că G nu are vârfuri izolate.

c) $\Rightarrow$ b). Fie x, y două vârfuri distincte ale grafului G. Conform ipotezei G nu are vârfuri izolate, deci există două muchii distincte u şi v care sunt incidente cu x, respectiv cu y.

Într-adevăr, în caz contrar există o muchie (x, y) şi vârfurile x şi y nu mai sunt adiacente cu alte vârfuri ale lui G. Dacă $n = 3$, acest fapt ar implica că G conține un vârf izolat, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă $n \geq 4$, în mulțimea vârfurilor rămase există cel puțin o muchie u. Deoarece G nu are vârfuri izolate muchiile (x, y) şi u nu se găsesc pe un ciclu elementar, ceea ce contrazice ipoteza. Deci există două muchii distincte u şi v incidente cu x, respectiv cu y. Conform ipotezei are loc c), deci există un ciclu elementar C care conține pe u şi v, adică pe x şi y.

b) $\Rightarrow$ a): Deoarece oricare două vârfuri ale lui G aparțin unui ciclu elementar, rezultă că există un lanț elementar care le uneşte, deci G este conex. Să presupunem prin reducere la absurb că G nu este 2-conex, deci există un vârf x astfel încât G_x nu este conex. Fie a, b două vârfuri situate în componente diferite ale subgrafului G_x. Deoarece orice lanț elementar dintre a şi b în graful G trece prin x, rezultă că nu poate exista un ciclu elementar în G care conține vârfurile a şi b, ceea ce contrazice b). Deci G este 2-conex şi demonstrația este încheiată.

87. Fie $A = (a_o, a_1, ..., a_{r-1}, a_o)$ şi $B = (b_o, b_1, ..., b_{r-1}, b_o)$ două cicluri elementare ale grafului G de lungime maximă. Să presupunem prin reducere la absurd că aceste cicluri au cel mult un vârf comun. Fie mai întâi $a_o = b_o$ unicul vârf comun ale

celor două cicluri. Deoarece G este 2-conex, rezultă că mai există un lanț elementar cu o extremitate în mulțimea de vârfuri $\{a_1,...,a_{r-1}\}$ şi cu cealaltă extremitate în mulțimea $\{b_1,...,b_{r-1}\}$, care nu trece prin a_o. Fie $\lfloor a_p, x_1,...,x_k, b_q \rfloor$ un astfel de lanț, unde $k \geq 0$, $p,q \neq 0$ şi x_i nu aparține ciclurilor A sau B pentru $1 \leq i \leq k$. Putem considera $p \geq q$. Am obținut un ciclu elementar $(a_o,...,a_p,x_1,...,x_k,b_q,...,b_{r-1},a_o)$ care este mai lung decât A, ceea ce contrazice ipoteza.

Fie că ciclurile A şi B nu au nici un vârf comun. G fiind 2-conex, există două lanțuri elementare fără vârfuri comune, care unesc fiecare vârf din A cu un vârf din B.

Va exista un lanț elementar care face parte din ciclul A, având ca extremități extremitățile celor două lanțuri de lungime mai mare sau egală cu $\frac{r}{2}$. Obținem un rezultat analog pentru ciclul B. Cele două porțiuni din ciclurile A şi B, împreună cu cele două lanțuri elementare care unesc un vârf din A cu un vârf din B, formează un ciclu elementar mai lung ca A, ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă că proprietatea este demonstrată prin reducere la absurd.

88. Numărul tripletelor $\{x,y,z\}$ care nu sunt triunghiuri nici pentru G, nici pentru $\overline{G}$ şi care au o singură latură cu o extremitate în vârfuri $x \in X$ care să fie muchie a lui G este egală cu $\deg(x)(n-1-\deg(x))$.

Orice triplet $\{x,y,z\}$ care nu este triunghi în G sau $\overline{G}$ conține o muchie sau două muchii ale lui G. Să presupunem că (x,y) este muchie a lui G, iar (x,z) şi (y,z) sunt muchii ale lui $\overline{G}$. În suma

$$\sum_{x\in X_G}\deg(x)(n-1-\deg(x))$$

tripletul $\{x,y,z\}$ este numărul de două ori: o dată relativ la x şi o dată relativ la y.

Dacă (x,y) şi (y,z) sunt muchii ale lui G şi (x,z) este muchie a lui $\overline{G}$, atunci în suma scrisă tripletul $\{x,y,z\}$ este numărat tot de două ori: o dată relativ la x şi o dată relativ la z. Deci numărul triunghiurilor în G şi în $\overline{G}$ este:

$$C_n^3-\frac{1}{2}\sum_{x\in X}d(x)(n-1-d(x)).$$

1) Dacă G este k-regulat, această formulă devine:

$$C_n^3-\frac{nk}{2}(n-k-1).$$

2) Astfel numărul triunghiurilor în G şi în $\overline{G}$ este nu este mai mic decât

$$C_n^3-\frac{n}{2}\left(C_{n-1}^2\right)^2=\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Acest număr este pozitiv pentru $n\geq 6$ şi se anulează pentru $n=5$. Dacă graful G este ciclul C_5 cu cinci vârfuri, atunci nici C_5 şi nici $\overline{C}_5$ nu conțin triunghiuri. Se poate arăta că numărul minim de triunghiuri este atins pentru orice $n=4p+1$ (p natural).

89. Fie $G=(X,U)$, unde $|X|=n$ şi $|U|=m$. Dacă $x,y\in X$, să notăm cu $A(x)$ mulțimea vârfurilor adiacente cu x şi cu $A(y)$ mulțimea vârfurilor adiacente cu y.

Obținem:

$$|A(x)\cap A(y)|=|A(x)|+|A(y)|-|A(x)\cup A(y)|\geq d(x)+d(y)-n.$$

Deci dacă $(x,y)\in U$, atunci există cel puțin $\deg(x)+\deg(y)-n$ vârfuri care sunt adiacente şi cu x şi cu y. Prin urmare $\deg(x)+\deg(y)-n$ cel puțin triunghiuri ale grafului G conțin muchia (x,y). Rezultă că G conține cel puțin

$$\frac{1}{3}\sum_{(x,y)\in U}\left(\deg(x)+\deg(y)-n\right)$$

triunghiuri, deoarece fiecare triunghi este numărat relativ la fiecare latură a sa.

În suma scrisă $\deg(x)$ apare de exact $\deg(x)$ ori pentru orice $x\in X$ şi deci suma scrisă este egală cu

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{x\in X}(\deg(x))^2-mn\right).$$

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Schwartz, această ultimă sumă este nu mai mică decât

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{x\in X}\deg(x)\right)^2-mn\right)=\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right),$$

deoarece $\sum_{x\in X}\deg(x)=2m$.

90. Să presupunem că graful G are n vârfuri, m muchii şi nu conține nici un ciclu elementar cu patru vârfuri. Să numărăm perechile $\{x,y\}$ de vârfuri care sunt ambele adiacente cu un al treilea vârf z. Dacă vârful z este fixat, avem $C^2_{d(z)}$ astfel de perechi. Dar fiecare pereche $\{x,y\}$ este numărată cel mult odată, deoarece dacă ar fi numărată relativ la z_1 şi la z_2 cu $z_1\neq z_2$, atunci (x,z_1,y,z_2,x) ar forma un ciclu cu patru vârfuri, ceea ce contrazice ipoteza. Deci putem scrie:

$$\sum_{z\in X}\left(\frac{\deg(z)}{2}\right)\leq\left(\frac{n}{2}\right),$$

unde X este mulțimea vârfurilor grafului G. Funcția $\frac{x(x-1)}{2}$ fiind convexă, conform inegalității lui Jensen putem scrie:

$$C_n^2 \geq \sum_{z \in X} \left(C_{d(z)}^2\right) \geq \left(C_{\frac{2m}{n}}^2\right) = \frac{m(2m-n)}{n}.$$

Deci:

$$m^2 - \frac{nm}{2} - \frac{n^3 - n^2}{4} \leq 0,$$

de unde

$$m \leq \frac{n}{4} - \sqrt{\frac{n^3}{4} - \frac{3n^2}{16}} = \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right),$$

ceea ce contrazice ipoteza. Deci G conține un ciclu elementar cu patru vârfuri.

91. Fie $n = (k-1)q + r$ cu $0 \leq r \leq k-2$ şi $(k-2)n = (k-1)p + s$, unde $0 \leq s \leq k-2$, r, s fiind numere întregi.

De aici deducem că dacă $r = 0$, atunci şi $s = 0$, iar dacă $r \geq 1$, atunci $s = k - r - 1$.

Să presupunem prin reducere la absurd că numărul vârfurilor x de grad $\deg(x) \leq p$ este mai mic ca m, celelalte vârfuri y având gradul $\deg(y) \geq p+1$. Altfel zis, există o partiție $X \cup Y$ a mulțimii vârfurilor grafului astfel încât $\deg(x) \leq p$ pentru orice vârf $x \in X$, $\deg(y) \geq p+1$ pentru orice vârf $y \in Y$ şi în plus $|X| < m$, $|Y| > n - m$.

Fie un vârf $y_1 \in Y$ şi să notăm prin $A(y_1)$ mulțimea vârfurilor incidente cu y_1. În mulțimea $A(y_1) \cap Y$ vom alege un alt vârf y_2. $A(y_1) \cap A(y_2)$ conține cel puțin

$$|A(y_1) \cap A(y_2)| = |A(y_1)| + |A(y_2)| - |A(y_1) \cup A(y_2)| \geq 2(p+1) - n$$

vârfuri.

Continuând acest proces, fie că am construit mulțimile de vârfuri $A(y_1),...,A(y_{k-2})$ cu $y_j \in \bigcap_{i<j} A(y_i) \cap Y$, pentru $j = 1,...,k-2$. Vom demonstra că mulțimea $B = \bigcap_{i=1}^{k-2} A(y_i)$ este nevidă. Această proprietate va justifica totodată posibilitatea alegerii vârfurilor $y_2,...,y_{k-1}$. Într-adevăr, se obține cu uşurință prin inducție că $|B| \geq (k-2)(p+1)-(k-3)n$.

Vom considera două cazuri.

1) $r = s = 0$. În acest caz $(k-2)(p+1)-(k-3)n =$ $= (k-2)((k-2)q+1)-(k-3)(k-1)q = q+k-2 \geq q$.

2) $r \geq 1$. Obținem

$$(k-2)(p+1)-(k-3)n = (k-1)p - p + k - 2 - (k-1)p -$$

$$- s + n = n - p + k - s - 2 = \frac{n}{k-1} + \frac{(k-2)n}{k-1} - p + k - s - 2 =$$

$$= q + \frac{r}{k-1} + p + \frac{s}{k-1} - p + k - s - 2 = q + \frac{r+s}{k-1} + k - s - 2 \geq q+1$$

deoarece $r + s = k-1$ şi $k - s - 2 \geq 0$.

Deci în ambele cazuri B conține cel puțin $m = \{n/(k-1)\}$ vârfuri.

Dacă am avea $B \cap Y = \emptyset$, am obține $B \subset X$, ceea ce nu este posibil, deoarece $|X| < m$ şi $|B| \geq m$. Deci există un vârf $y_{k-1} \in B \cap Y$ care are gradul $d(y_{k-1}) \geq p+1$. Astfel obținem

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k-1} A(y_i)\right| \geq (k-1)(p+1)-(k-2)n = k-1-s > 0,$$

ceea ce implică existența unui vârf $y_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} A(y_i)$.

Din modul de construcție, vârfurile $y_1, y_2, ..., y_k$ formează un subgraf complet cu k vârfuri, ceea ce contrazice ipoteza, deci există cel puțin m vârfuri de grad mai mic sau egal cu p.

92. Să arătăm mai întâi că oricare ar fi patru puncte A, B, C, D din M, există cel puțin două, distanța dintre care este mai mică sau egală cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dacă trei dintre ele sunt coliniare există o distanță mai mică sau egală cu $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi proprietatea este demonstrată.

În caz contrar, vom arăta că configurația formată din cele patru puncte conține un triunghi cu un unghi de cel puțin 90°. Există două cazuri posibile:

a) Trei puncte, fie A, B, C formează un triunghi şi D este un punct interior. Suma unghiurilor din D este egală cu 360°, deci cel puțin un unghi este mai mare sau egal cu 120°;

b) Cele patru puncte formează un patrulater convex. Suma unghiurilor patrulaterului este 360°, deci cel puțin un unghi este mai mare sau egal cu 90°.

Fie ABC triunghiul cu $A \geq 90^o$. Avem:

$$a^2 \geq b^2 + c^2 \geq 2\min\left(b^2, c^2\right).$$

Dacă $b \geq c$, atunci $a^2 \geq 2c^2$ sau $c^2 \leq \frac{a^2}{2} \leq \frac{1}{2}$ şi deci $c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vom defini un graf G care să aibă ca vârfuri cele $3n$ puncte, două vârfuri fiind legate printr-o muchie dacă distanța dintre ele este mai mare ca $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Proprietatea demonstrată ne arată că acest graf nu conține subgrafuri complete cu patru vârfuri, deci numărul de muchii este egal cu $3n^2$.

Cele $3n^2$ distanțe mai mari ca $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pot fi alese în intervalul $(1-\varepsilon,1)$ pentru orice $0<\varepsilon<1$, grupând câte n puncte suficient de apropiate de vârfurile unui triunghi echilateral de latură egală cu 1.

93. Demonstrația rezultă direct din teorema lui Turan, deoarece $M(2n,3)=n^2$. Graful, care realizează acest număr maxim de muchii şi nu conține triunghiuri, este graful bipartit complet $K_{n,m}$.

94. Vom arăta că pentru orice $n \geq 2$ numărul maxim de subgrafuri complete maximale (clici) în clasa grafurilor cu n vârfuri, număr notat $f(n)$, este egal cu $3^{n/3}$ pentru $n \equiv 0 \pmod 3$ cu $4 \cdot 3^{(n-1)/3-1}$ pentru $n \equiv 1 \pmod 3$ şi cu $2 \cdot 3^{(n-2)/3}$ pentru $n \equiv 2 \pmod 3$.

Pentru $2 \leq n \leq 4$ expresia lui $f(n)$ se obține prin simplă enumerare: pentru $n=2$ şi $n=3$ numărul maxim de clici se obține pentru grafurile formate din vârfuri izolate, iar pentru $n=4$ – pentru grafuri cu toate vârfurile izolate sau pentru graful bipartit complet $K_{2,2}$.

Fie G un graf cu $n \geq 5$ vârfuri care conține $f(n)$ clici. G conține cel puțin două vârfuri neadiacente x şi y, deoarece în caz contrar G este graful complet cu n vârfuri K_n care conține o singură clică, aceasta ce contrazicând maximalitatea lui G.

Să notăm cu $V(x)$ mulțimea vârfurilor adiacente cu x în G şi cu $G(x,y)$ graful obținut din G prin suprimarea tuturor

muchiilor incidente cu x şi înlocuirea lor cu muchii de la vârful x la fiecare vârf din mulțimea $V(y)$.

Să notăm cu G_x subgraful obținut din G prin suprimarea vârfului x, cu $a(x)$ numărul subgrafurilor complete incluse în mulțimea $V(x)$, maximale relativ la subgraful G_x şi cu $c(x)$ numărul clicilor lui G care îl conțin pe x.

Prin suprimarea muchiilor incidente cu x dispar $c(x)-a(x)$ clici, iar prin unirea lui x prin muchii cu toate vârfurile din $V(y)$ apar $c(y)$ clici, deci dacă notăm cu $c(G)$ numărul clicilor grafului G, obținem:

$$c(G(x,y)) = c(G) + c(y) - c(x) + a(x).$$

Putem spune că $c(y) \geq c(x)$, deoarece în caz contrar vom considera graful $G(y,x)$.

Deoarece $c(G)$ este maxim, rezultă că $c(G(x,y)) \leq c(G)$ sau $c(y) = c(x)$ şi $a(x) = 0$, ceea ce implică $c(G(x,y)) = c(G)$ şi graful $G(x,y)$ conține acelaşi număr maxim de clici, egal cu $f(n)$, ca şi graful G.

Rezultă deasemenea că

$$c(G(y,x)) = c(G) + c(x) - c(y) + a(y),$$

deci, deoarece $c(x) = c(y)$, se obține $a(y) = 0$ şi astfel $c(G(x,y)) = c(G(y,x)) = c(G)$.

Fie x un vârf oarecare al grafului G şi $y_1,...,y_p$ vârfurile neadiacente cu x. Vom transforma graful G în graful $G_1 = G(y_1,x)$, apoi graful G_1 în $G_2 = G_1(y_2,x)$, … , graful G_{p-1} în $G_p = G_{p-1}(y_p,x)$ cu conservarea numărului $f(n)$ de clici. Graful G_p are proprietatea că vârfurile $x, y_1,...,y_p$ nu sunt unite între ele prin muchii, dar $V(x) = V(y_1) = ... = V(y_p)$. Dacă

$V(x)=\emptyset$, ne oprim. În caz contrar vom considera un vârf din $V(x)$ şi vom repeta această construcție.

În final ajungem la un graf G^* multipartit complet, cu proprietatea că vârfurile sale pot fi partiționate în k clase care conțin respectiv $n_1,...,n_k$ vârfuri, două vârfuri fiind adiacente dacă şi numai dacă ele nu aparțin aceleeaşi clase şi astfel încât $c(G^*)=f(n)$. Dar $c(G^*)=n_1\cdot...\cdot n_k$, de unde rezultă că

$$f(n)=\max_k \max_{n_1+...+n_k=n} n_1n_2...n_k .$$

Să presupunem că $f(n)=m_1,m_2,...,m_p$, unde $m_1+...+m_p=n$. Este clar că $\max(m_1,...,m_p)\le 4$ deoarece, dacă ar exista un termen, de exemplu $m_1\ge 5$, am avea $3(m_1-3)>m_1$ sau $2m_1>9$, deci produsul $m_1...m_p$ nu ar fi maxim. Nu pot exista doi factori egali cu patru, deoarece $4\cdot 4<3\cdot 3\cdot 2$; la fel nu pot exista trei factori egali cu 2, deoarece $2\cdot 2\cdot 2<3\cdot 3$.

Deasemenea avem $-1\le m_i-m_j\le 1$ pentru orice $i,j=1,...,p$, deoarece dacă, de exemplu, $m_i\ge m_j+2$, atunci obținem $m_im_j<(m_i-1)(m_j+1)=m_im_j+m_i-m_j-1$. Deci toți factorii $m_1,...,m_p$ sunt egali cu 3 pentru $n\equiv 0 \pmod 3$, un singur factor este egali cu 4 (sau doi factori egali cu 2), restul fiind egal cu 3 pentru $n\equiv 1 \pmod 3$ şi un factor egal cu 2, restul fiind egali cu 3 pentru $n\equiv 2 \pmod 3$.

95. Vom demonstra proprietatea prin inducție după numărul de vârfuri ale grafului G.

Dacă graful G are cel mult $k+1$ vârfuri, atunci evident $\chi(G)\le k+1$. Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile cu cel mult n vârfuri şi fie G un graf cu

$n+1$ vârfuri, cu gradele vârfurilor majorate de k şi x un vîrf al lui G. Deoarece orice vârf al grafului G_x obținut din G prin suprimarea vârfului x şi a muchiilor incidente cu x, are gradul cel mult egal cu k, atunci ținând cont de ipoteza inducției rezultă:

$$\chi(G_x) \leq k+1.$$

Deoarece x este adiacent cu cel mult k vârfuri din G_x, putem colora vârful x cu o culoare care nu apare printre culorile adiacente cu x, astfel încât numărul total de culori utilizate pentru a colora vârfurile lui G să nu depăşească $k+1$. Deci $\chi(G) \leq k+1$.

96. Notăm coordonatele punctelor de intersecție într-un sistem ortogonal de axe în plan cu $(x_1, y_1),...,(x_n, y_n)$. Putem presupune că direcțiile axelor sunt astfel alese încât abscisele $x_1,...,x_n$ să fie diferite două câte două, de exemplu $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Vom colora vârfurile grafului în această ordine cu trei culori. Dacă am colorat cu trei culori vârfurile de abscise $x_1,...,x_{i-1}$, vârful (x_i, y_i) are cel mult două vârfuri adiacente care au fost deja colorate, deoarece nu există trei drepte concurente. Deci pentru vârful (x_i, y_i) găsim o a treia culoare disponibilă, pentru $i = 2,...,n$, ceea ce verifică inegalitatea cerută.

97. Putem presupune toate fețele lui G dintr-o reprezentare planară triunghiuri, adică G este o triangulație a planului. Într-adevăr, dacă G nu este triangulație vom adăuga noi muchii grafului G până când obținem o triangulație G_1. Dacă pentru G_1 inegalitatea cerută este verificată, ea va fi cu atât mai mult adevărată pentru G, deoarece gradele vârfurilor lui G_1 majorează gradele vârfurilor grafului G. Deci fie G un graf

planar cu toate feţele triunghiuri, pentru care suma pătratelor gradelor este maximă. Dacă notăm cu x un vârf de grad minim, vom arăta că $\deg(x)=3$.

Într-adevăr, dacă $\deg(x)\le 2$ rezultă $\deg(x)=2$ şi graful G se reduce la K_3, ceea ce contrazice ipoteza $n\ge 4$. Să presupunem că $\deg(x)\ge 4$ şi fie $x_1, x_2, ..., x_r$ vârfurile adiacente cu x astfel încât $\deg(x_1)\le \deg(x_i)$ pentru $i=2,...,r$, unde $r=\deg(x)\ge 4$ (figura 14).

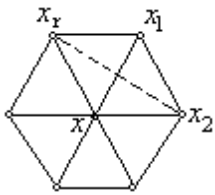

Figura 14

Vom suprima muchia (x, x_1) şi vom adăuga muchia (x_2, x_r), ceea ce produce un nou graf planar G_1 fără muchii multiple pentru $r\ge 4$.

Dacă notăm cu S suma pătratelor gradelor pentru graful G şi cu S_1 suma pătratelor gradelor pentru graful G_1, obţinem:

$$S_1 - S = (\deg(x_r)+1)^2 + (\deg(x_2)+1)^2 + (\deg(x)-1)^2 +$$
$$+(\deg(x_1)-1)^2 - (\deg(x_r))^2 - (\deg(x_2))^2 - (\deg(x))^2 - (\deg(x_1))^2 =$$
$$= 2\deg(x_r) + 2\deg(x_2) - 2\deg(x) - 2\deg(x_1) + 4 > 0,$$

deoarece $\deg(x)\le \deg(x_1)\le \deg(x_i)$ pentru $i=2,...,r$.

Această inegalitate contrazice însă maximalitatea gradului G, deci orice graf G pentru care S este maximă conţine un vârf x de grad $\deg(x)=3$.

Vom demonstra acum proprietatea prin inducţie după n. Pentru $n=4$, considerând o reprezentare planară a grafului K_4 obţinem în ambii membri 36, deci egalitate. Orice alt graf G cu 4 vârfuri are o sumă a pătratelor gradelor mai mică decât 36, deoarece gradele unor vârfuri descresc strict şi proprietatea este demonstrată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate grafurile planare cu cel mult n vârfuri şi fie G un graf planar cu $n+1$ vârfuri pentru care suma pătratelor gradelor este maximă şi care are toate feţele triunghiulare. Conform observaţiei anterioare, există un vârf x cu gradul $d(x)=3$. Fie a,b,c vârfurile adiacente cu x. Să notăm cu G_1 subgraful obţinut din G prin suprimarea vârfului x şi a celor trei muchii incidente cu x.

Cu aceleaşi notaţii de mai înainte obţinem:

$$S = S_1 + 9 + (\deg(a)+1)^2 + (\deg(b)+1)^2 + (\deg(c)+1)^2 -$$
$$-(\deg(a))^2 - (\deg(b))^2 - (\deg(c))^2 =$$
$$= S_1 + 2(\deg(a) + \deg(b) + \deg(c)) + 12 .$$

Vom arăta că pentru oricare trei vârfuri a, b, c care induc un subgraf complet cu 3 vârfuri într-un graf planar cu n

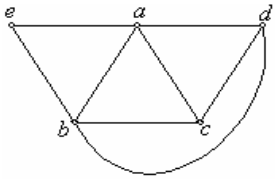

Figura 15

vârfuri, are loc inegalitatea:

$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) \le 2n + 1 . \qquad \text{(B)}$$

Într-adevăr, dacă un alt vârf d este adiacent cu toate cele trei vârfuri a, b, c, atunci un alt vârf e poate fi adiacent cu cel mult două dintre vârfurile a, b sau c, de exemplu cu a şi cu b, din cauza condiţiei de planaritate a grafului G (figura 15).

Deci numărul muchiilor care unesc vârfurile a, b, c cu celelalte $n-3$ vârfuri ale grafului G este majorat de $2(n-3)+1 = 2n-5$. Ţinând seama şi de contribuţia muchiilor

(a,b), (b,c) şi (a,c) la gradele $\deg(a)$, $\deg(b)$, $\deg(c)$, obţinem:

$$\deg(a)+\deg(b)+\deg(c)\le 2n-5+6=2n+1$$

şi (B) este justificată.

Conform ipotezei de inducţie, $S_1 \le 2(n+3)^2-62$, deci $S \le 2(n+3)^2-62+2(2n+1)+12=2(n+4)^2-62$ şi inegalitatea este demonstrată prin inducţie. Pentru $n=4$ am văzut că inegalitatea devine egalitate pentru graful K_4 şi şirul gradelor $3,3,3,3$. Vom demonstra prin inducţie după n că există un graf planar triangulat cu n vârfuri şi gradele vârfurilor, care mărginesc faţa infinită egale respectiv cu 3, $n-1$, $n-1$, pentru care inegalitatea devine egalitate.

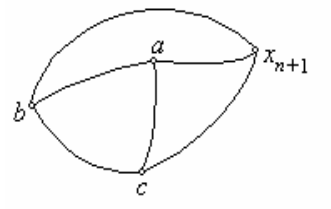

Figura 16

Într-adevăr, afirmaţia se verifică pentru $n=4$. Presupunând că afirmaţia este adevărată pentru n, fie G un graf planar cu proprietăţile cerute.

Să presupunem că faţa infinită a grafului G este mărginită de ciclul (a,b,c,a) şi $\deg(a)=3$, $\deg(b)=n-1$ şi $\deg(c)=n-1$. Vom defini un graf planar G_1 cu proprietăţile cerute astfel: considerăm un nou vârf x_{n+1} pe faţa infinită a grafului G, pe care îl unim prin muchii cu a, b, c ca în figura 16. Noua faţă infinită a grafului G_1 este mărginită de ciclul (b,c,x_{n+1},b) şi $\deg(x_{n+1})=3$, $\deg(a)=4$, $\deg(b)=n$ şi

$\deg(c) = n$. G_1 este o triangulație și $S_1 = S + 9 + 2n^2 - 2(n-1)^2 + 16 - 9 = S + 4n + 14$.

Însă conform ipotezei de inducție $S = 2(n+3)^2 - 62$, deci $S_1 = 2(n+3)^2 - 62 + 4n + 14 = 2(n+4)^2 - 62$ și proprietatea este demonstrată.

Folosind faptul că funcția $x^{\alpha - 1} : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este convexă pentru $\alpha \geq 2$, se poate demonstra pe o cale analoagă cu cea prezentată aici că

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^{\alpha} \leq 2(n-1)^{\alpha} + (n-4)^{\alpha} + 2 \cdot 3^{\alpha} \quad \text{(C)}$$

pentru orice graf planar G cu $n \geq 4$ vârfuri și $\alpha \geq 2$.

Egalitatea are loc pentru graful planar construit în cazul $\alpha = 2$, care are gradele $d_1 = d_2 = n - 1$; $d_3 = ... = d_{n-2} = 4$; $d_{n-1} = d_n = 3$.

Pentru $\alpha = 1$ inegalitatea (C) devine egalitate pentru orice triangulație a planului și exprimă faptul că numărul muchiilor unei triangulații este egal cu $3n - 6$.

98. Să notăm cu $U = \{u_1, ..., u_m\}$ mulțimea muchiilor grafului G și $A_i = \{f : X \to \{1, ..., \lambda\} \mid f(x) = f(y)$, unde $u_i = (x, y)\}$. Numărul funcțiilor f care verifică condiția impusă este egal cu

$$P_G(\lambda) = \lambda^n - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m|.$$

Putem evalua cardinalul mulțimii $A_1 \cup ... \cup A_m$ folosind principiul includerii și al excluderii:

$$|A_1 \cup ... \cup A_m| = \sum_{\substack{V \subset U \\ V \neq 0}} (-1)^{V-1} p(V, \lambda),$$

unde $p(V,\lambda)$ reprezintă numărul funcţiilor $f: X \to \{1,...,\lambda\}$ care iau aceeaşi valoare pentru extremităţile fiecărei muchii din V. Rezultă că aceste funcţii iau aceeaşi valoare din mulţimea $\{1,...,\lambda\}$ pentru toate vârfurile fiecarei componente conexe a grafului parţial (X,V) al lui G. Deci $p(V,\lambda) = \lambda^{c(V)}$. Cu aceasta, expresia pentru polinomul cromatic al grafului G este justificată ţinând seama că termenul λ^n se obţine pentru $V = \emptyset$, când graful parţial (X,V) este format numai din vârfuri izolate şi deci are n componente conexe.

Se observă că singurul termen de gradul n se obţine pentru $V = \emptyset$ şi anume λ^n, iar termenul de gradul $n-1$ se obţine pentru $|V| = 1$.

În acest caz există $C_m^1 = m$ termeni egali cu $-\lambda^{n-1}$, deci putem scrie:

$$P_G(\lambda) = \lambda^n - m\lambda^{n-1} + ...,$$

unde m este numărul muchiilor grafului G.

Dacă se notează $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_n$, obţinem în mod analog că $a_2 = C_m^2 = c_3(G)$, unde $c_3(G)$ reprezintă numărul triunghiurilor grafului G. Termenii de gradul $n-2$ se obţin pentru $c(V) = n-2$, când $|V| = 2$ şi graful parţial (X,V) al lui G conţine numai două muchii, adiacente sau nu, sau pentru $|V| = 3$, când graful parţial (X,V) conţine trei muchii care formează un triunghi.

Deoarece două muchii pot fi alese în C_m^2 moduri, rezultă expresia coeficientului a_2.

99. Dacă o λ-colorare f a grafului $G-e$ are proprietatea că $f(x) \neq f(y)$, unde $e = [x,y]$, atunci f este o λ-colorare şi pentru G şi reciproc.

Rezultă că $P_{G-e}(\lambda)-P_G(\lambda)$ este numărul acelor λ-colorări f ale lui $G-e$ care posedă proprietatea $f(x)=f(y)$.

O astfel de λ-colorare f a lui $G-e$ produce o λ-colorare g a grafului $G|e$, definind $g(z)=f(x)=f(y)$ şi $g(t)=f(t)$ pentru orice $t\neq z$. Reciproc, orice λ-colorare g a grafului $G|e$ induce o λ-colorare f a lui $G-e$ cu proprietatea $f(x)=f(y)$, definind $f(x)=f(y)=g(z)$ şi $f(t)=g(t)$ pentru orice $t\neq x,y$. Ambele corespondenţe fiind injective, rezultă:

$$P_{G-e}(\lambda)-P_G(\lambda)=P_{G|e}(\lambda)$$

pentru orice număr natural λ.

Deoarece în ambii membri ai egalităţii avem polinoame de un grad dat, rezultă egalitatea între polinoamele cromatice pentru orice λ.

100. a) Dacă K_n are mulţimea vârfurilor $\{x_1,...,x_n\}$, o λ-colorare f poate fi definită în x_1 în λ moduri, în x_2 în $\lambda-1$ moduri, … , în x_n $\lambda-n+1$ în moduri, rezultând în final

$$P_{K_n}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)\ ...\ (\lambda-n+1)$$

posibilităţi de a defini funcţia f astfel încât să ia valori diferite două câte două pentru toate vârfurile $x_1,...,x_n$.

b) Dacă x este un vârf de gradul 1 al lui T_n, să notăm prin T_n-x arborele care se obţine din T_n prin suprimarea vârfului x şi a muchiei incidente cu x. Orice λ-colorare a lui T_n-x poate fi extinsă în $\lambda-1$ moduri la o λ-colorare a lui T_n, deci

$$P_{T_n}(\lambda)=(\lambda-1)P_{T_n-x}(\lambda).$$

Continuând în acest mod obţinem

$$P_{T_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} P_{T_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1},$$

deoarece polinomul cromatic al arborelui cu un singur vârf este λ.

c) Dacă e este o muchie a ciclului C_n, aplicând proprietatea din problema 99 obținem:

$$P_C(\lambda) = P_{C-e}(\lambda) - P_{C|e}(\lambda),$$

$C_n - e$ este un lanț cu n vârfuri şi deci conform b) avem $P_{C_n - e_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$, iar $C_n|e$ este un ciclu cu $n-1$ vârfuri. Obținem:

$$P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(\lambda).$$

Repetând acelaşi raționament se deduce:

$$P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - \lambda(\lambda - 1)^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\lambda(\lambda - 1),$$

deoarece $P_{C_3}(\lambda) = P_{K_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 1)$.

Putem scrie

$$\lambda(\lambda - 1)^{p-1} = (p - 1 + 1)(\lambda - 1)^{p-1} = (\lambda - 1)^p + (\lambda - 1)^{p-1}$$

pentru $2 \le p \le n$, deci:

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-2}(\lambda - 1)^2 + (-1)^{n-2}(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

101. Vom demonstra ambele proprietăți prin inducție după numărul de muchii ale grafului G. Pentru graf cu n vârfuri izolate obținem $P_G(x) = x^n$, care are forma dorită.

Să presupunem proprietatea de alternanță a semnelor coeficienților polinomului cromatic adevărată pentru toate grafurile cu n vârfuri şi $m \le p - 1$ muchii şi să o demonstrăm pentru un graf oarecare G cu n vârfuri şi $p \le C_n^2$ muchii.

Fie e o muchie a lui G. Conform proprietății din problema obținem:

$$P_G(x) = P_{G-e}(x) - P_{G|e}(x).$$

Deoarece grafurile $G-e$ şi $G|e$ au cel mult $p-1$ muchii, putem aplica ipoteza de inducție, găsind:

$$P_{G-e}(x) = x^n - b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} b_1 x$$

$$P_{G|e}(x) = x^{n-1} - c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} c_1 x,$$

unde $b_i, c_i \geq 0$ în (1) găsim:

$$P_G(x) = x^n - (b_{n-1}+1)x^{n-1} + (b_{n-2}+c_{n-2})x^{n-2} - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1}(b_1 + c_1)x,$$

demonstrează prima proprietate.

Graful G are cu o muchie mai mult decât $G-e$ are coeficientul $a_{n-1} = b_{n-1}+1$, iar $a_{n-1} = 0$ pentru graful cu n vârfuri şi fără nici o muchie. Mai rezultă deci că a_{n-1} este numărul muchiilor grafului G.

Fie acum G un graf conex cu n vârfuri. Vom demonstra că $a_i > 0$ prin inducție după numărul de muchii ale lui G. Dacă G are numărul de muchii, egal cu $n-1$, el este un arbore şi conform problemei 80 polinomul său cromatic este

$$P_G(x) = x(x-1)^{n-1} =$$
$$= x^n - (C_{n-1}^1)x^{n-1} + (C_{n-1}^2)x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}(C_{n-1}^{n-1})x,$$

deci inegalitatea $a_i > 0$ pentru $1 \leq i \leq n-1$ este verificată.

Să presupunem că proprietatea este adevărată pentru orice graf conex cu n vârfuri şi m muchii, care verifică

$$n-1 \leq m \leq p-1,$$

şi să o demonstrăm pentru un graf conex G cu n vârfuri şi $p \leq C_n^2$ muchii.

Presupunând că G nu este arbore, există o muchie e astfel încât $G-e$ este graf conex. Graful $G|e$ obținut prin

identificarea extremităţilor muchiei e este de asemenea conex şi folosind notaţiile anterioare găsim: $a_i = b_i + c_i$ pentru $i = 1,...,n-1$ cu $c_{n-1} = 1$, deci $a_i > 0$ conform ipotezei de inducţie.

102. Reprezentând şahiştii prin vârfurile grafului complet K_n, partidele desfăşurate într-o zi se pot reprezenta printr-o mulţime de muchii care nu au două câte două extremităţi comune.

Rezultă că numărul minim de zile în care se poate termina turneul este egal cu numărul minim de culori necesare pentru a colora muchiile lui K_n, astfel încât oricare două muchii cu o extremitate comună să aibă culori diferite.

Într-adevăr, putem colora cu o aceeaşi culoare muchiile corespunzătoare partidelor care se desfăşoară în aceiaşi zi.

Deci numărul minim de zile este $q(K_n)$, deci n zile pentru n impar şi $n-1$ zile pentru n par, ţinând seama de problema precedentă.