II. PROBLEME PROPUSE

1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate şi care sunt false:

a) Orice marşrut închis conține un ciclu elementar.

b) Un marşrut închis de lungime impară conține un ciclu elementar.

c) Reuniunea a două lanțuri elementare diferite, ce unesc două vârfuri ale unui graf conține un ciclu elementar.

2. De construit un graf cu $2n$ vârfuri $(n \geq 3)$, în care valența oricărui vârf este trei şi nu conține cicluri elementare de lungimea trei (triunghiuri).

3. De demonstrat, că dacă un graf G nu este conex, atunci graful complementar este conex.

4. Care este numărul maxim de muchii într-un graf cu n vârfuri, ce nu conține cicluri elementare de lungime pară?

5. Care este numărul maxim de muchii într-un graf cu n vârfuri, ce nu conține cicluri elementare?

6. Care dintre următoarele afirmații este adevărată şi care este falsă:

a) dacă G_1, G_2 sunt două grafuri regulate, atunci sunt regulate şi grafurile $G_1 + G_2$, $G_1 \times G_2$;

b) Dacă G_1, G_2 sunt două grafuri bipartite, atunci sunt bipartite şi grafurile $G_1 + G_2$, $G_1 \times G_2$.

7. De stabilit numărul minim de vârfuri într-un graf 3-regulat (graf cubic), ce conține un istm.

8. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate şi care sunt false:

a) orice arbore este un graf bipartit;

b) orice arbore este un graf bipartit complet;

c) un graf conex $G = (X;U)$ conține un singur ciclu

dacă şi numai dacă $|X| = |U|$;

d) orice arbore cu n vârfuri conține $n-1$ istmuri.

9. De demonstrat, că centrul unui graf conex G aparține unui bloc din G.

10. Pentru un graf conex $G = (X;U)$ notăm prin $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ numărul minim de vârfuri, la eliminarea cărora obținem un graf neconex sau un graf trivial, prin $\lambda(G)$ – numărul minim de muchii, la eliminarea cărora obținem un graf neconex şi prin $\delta(G)$ – valența minimă a vârfurilor grafului G. De construit un graf G pentru care $\chi(G) = 3$, $\lambda(G) = 4$, $\delta(G) = 5$.

11. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate şi care sunt false:

a) pentru orice graf cubic $G = (X;U)$ este adevărată egalitatea $\chi(G) = \lambda(G)$;

b) dacă G este un graf k-regulat şi $\mathrm{H}(G) = 1$ atunci $\lambda(G) \le [k/2]$.

12. Stabiliți condițiile, în care graful muchiilor unui graf $G = (X;U)$ este regulat.

13. Construiți un graf $G = (X;U)$, $|X| \ge 4$, pentru care graful muchiilor $L(G)$ nu este eulerian, iar graful $L^2(G)$ este eulerian.

14. De construit un graf G pentru care graful muchiilor $L(G)$ este hamiltonian.

15. De construit un graf G pentru care graful muchilor $L(G)$ este eulerian.

16. De construit un graf G în care orice mulțime intern stabilă se conține în mulțimea maximă intern stabilă.

17. De demonstrat relațiile

a) $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$;

b) $\chi(G_1 \cap G_2) \le \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

18. Fie G un graf-plan, în care toate vârfurile aparțin frontierei unei fețe. De demonstrat că acest graf poate fi colorat corect cu ajutorul cel mult a trei culori.

19. Pentru grafurile reprezentate geometric în figura 5 (a,b,c,d) să se descrie matricile de adiacență şi incidență.

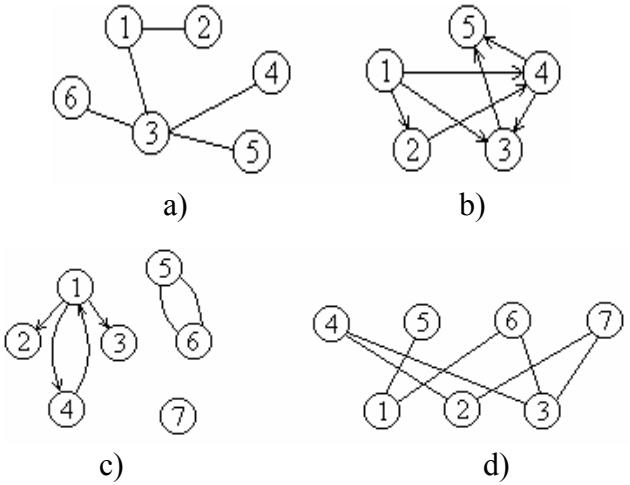

Figura 5

20.

a) Exprimați în funcție de n numărul muchiilor unui graf complet cu n vârfuri.

b) Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex cu n vârfuri.

21. Se consideră o mulțime X de cardinal $|X| = n$. Să se determine:

a) numărul grafurilor simple, care au ca mulțime de vârfuri mulțimea X;

b) numărul grafurilor orientate, fără bucle, cu mulțimea de vârfuri X;

c) numărul grafurilor orientate, fără bucle, antisimetrice, cu mulțimea de vârfuri X;

d) numărul turnirurilor cu mulțimea de vârfuri X.

22. Să se arate că într-un graf orientat de ordin n $\vec{G} = (X, \vec{U})$, are loc relația $\sum_{x_i \in X} g^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} g^-(x_i)$, unde $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

23. Să se demonstreze că într-un graf orientat de ordin n $\vec{G} = (X, \vec{U})$, suma $\sum_{x_i \in X} \left| g^+(x_i) - g^-(x_i) \right|$ este un număr par.

24. Să se arate că într-un graf orientat $\vec{G} = (X, \vec{U})$ antisimetric de ordin n, cu număr maxim de arce (numit şi turnir), au loc relațiile:

a. $g^+(x_i) + g^-(x_i) = n - 1$, $x_i \in X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$;

b. $\sum_{x_i \in X} g^+(x_i) = \sum_{x_i \in X} g^-(x_i) = C_n^2$;

c. $\sum_{x_i \in X} \left(g^+(x_i)\right)^2 = \sum_{x_i \in X} \left(g^-(x_i)\right)^2$;

d. $\sum_{x_i \in X} \left(g^+(x_i)\right)^2 = \sum_{x_i \in X} \left(n - g^+(x_i) - 1\right)^2$.

25. Există oare grafuri neorientate cu cel puțin două vârfuri în care gradele tuturor vârfurilor sunt distincte?

26. Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat cu n vârfuri şi m muchii. Să se arate că dacă pentru orice $x_i \in X$ avem $g(x_i) = k$ sau $g(x_i) = k + 1$, atunci numărul vârfurilor de grad k este $(k+1)n - 2m$.

27. Considerăm familia de grafuri orientate

$$\mathsf{F} = \left\{ \vec{G} = \left(X, \vec{U}\right) : |X| = n, g^{+}(x_i) \le p, g^{-}(x_i) \le q, \forall x_i \in X \right\},$$

unde $p \le n$ şi $q \le n$. Să se determine numărul $\max\left\{ |U| : \vec{G} = \left(X, \vec{U}\right) \in \mathsf{F} \right\}$.

28. Fie $\vec{G} = (X, \vec{U})$ un graf orientat cu proprietatea că $g^{+}(x_i) = g^{-}(x_i)$ pentru orice $x_i \in X$. Să se arate că pentru orice submulțime $A \subset X$ are loc relația $\left|\omega^{+}(\mathrm{A})\right| = \left|\omega^{-}(\mathrm{A})\right|$ (aici $\omega^{+}(A)$ este mulțimea arcelor cu extremitatea inițială în A, iar $\omega^{-}(A)$ este mulțimea arcelor cu extremitatea finală în A).

29. Să se arate că în orice graf neorientat numărul vârfurilor de grad impar este par.

30. Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat k – regulat. De demonstrat, că dacă G conține un număr impar de vârfuri, atunci gradul fiecărui vârf este par.

31. Fie graful neorientat $\mathrm{G} = (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ şi $A \subset X$ o submulțime de vârfuri a acestui graf. Fie k numărul muchiilor care au exact o extremitate în A. Să se demonstreze că numărul k este de aceeaşi paritate cu numărul vârfurilor de grad impar din A.

32. Un graf $G = (X, U)$ se numeşte autocomplementar, dacă este izomorf cu complementarul său $\overline{G}$.

a) Să se demonstreze că pentru orice graf autocomplementar are loc una din relațiile $|X| \equiv 0 \pmod 4$ sau $|X| \equiv 1 \pmod 4$.

b) Construiți un graf autocomplementar cu $|X| > 1$ şi număr minim de vârfuri.

33. Să se arate că un graf neorientat cu n vârfuri şi n muchii conține cel puțin un ciclu.

34. Să se arate că dacă G şi $\overline{G}$ sunt grafuri conexe de ordin $n \geq 5$, atunci cel puțin unul dintre ele conține ciclu elementar.

35. Să se arate că într-un graf neorientat şi conex orice două lanțuri elementare de lungime maximă au cel puțin un vârf comun.

36. Să se demonstreze că graful neorientat, în care orice vârf are gradul cel puțin trei, are ciclu de lungime pară.

37. Să se arate că un graf neorientat este bipartit dacă şi numai dacă toate ciclurile sale sunt de lungime pară.

38. Fie α şi β două numere naturale, astfel încât $\alpha/2+1 \leq \beta$ şi α este număr par. Să se arate că în graful bipartit complet $K_{\frac{\alpha}{2}-1,\beta}$ orice ciclu elementar are lungimea cel mult $\alpha-2$.

39. Fie G un graf planar conex de ordin n, având m muchii şi f fețe (inclusiv cea nemărginită). Să se demonstreze formula lui Euler: $f = m - n + 2$.

40.

a) Să se demonstreze că un graf planar de ordin $n > 2$ are cel mult $3n-6$ muchii.

b) Să se demonstreze că un graf planar de ordin $n > 2$ are cel mult $2n-4$ fețe.

41. Considerăm un graf planar $G = (X,U)$ de ordin n în care frontiera oricărei fețe este un ciclu elementar de lungimea k. Să se exprime în funcție de n şi k numărul muchiilor acestui graf.

42. Să se demonstreze că în orice graf planar $G = (X,U)$, $|X| \geq 5$, există cel puțin patru vârfuri de grad cel mult 5.

43. Fie G un graf neorientat de ordin n care nu conține subgrafuri K_3. Să se arate că dacă numărul de muchii m verifică inegalitatea $m > 2n - 4$, atunci graful G este neplanar.

44. Vom spune că un graf planar este exterior planar dacă poate fi desenat în plan, astfel încât toate vârfurile sale să aparțină frontierei unei fețe. Un graf planar este maxim exterior planar dacă conține un număr maxim de muchii. Să se demonstreze că pentru orice graf planar $G = (X, U)$ maxim exterior, cu $|X| \geq 3$ sunt adevărate următoarele afirmații:

a) $|U| = 2n - 3$.

b) Există cel puțin două vârfuri de grad 2.

c) Numărul cromatic al lui G este 3.

45. Considerăm un graf orientat $\vec{G} = (X; \vec{U})$, $|X| \geq 2$. Să se demonstreze că următoarele două afirmații sunt echivalente:

a) G nu conține vârfuri izolate şi are un ciclu eulerian.

b) G este tare conex şi pentru orice vârf $x_i \in X$ avem $g^+(x_i) = g^-(x_i)$.

46. Considerăm un graf neorientat $G = (X; U)$, $|X| \geq 2$. Să se demonstreze că următoarele două afirmații sunt echivalente:

a) G nu conține vârfuri izolate şi are un ciclu eulerian.

b) G este conex şi gradul fiecărui vârf este par.

47. Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat de ordin n. Să se arate că dacă pentru orice vârf $x_i \in X$, $g(x_i) \geq (n-1)/2$, atunci graful G este conex.

48. Fie $G = (X, U)$ acel graf neorientat de ordin n cu p componente conexe, care are un număr maxim de muchii. Să se determine numărul de muchii şi numărul de vârfuri din fiecare componentă conexă a lui G.

49. Să se arate că orice graf de ordin $n \geq 4$ cu mai mult de $(n-1)(n-2)/2$ muchii este conex.

50. Să se demonstreze că într-un graf 3-regulat $G = (X,U)$ există un punct de articulație dacă şi numai dacă G conține un istm.

51.

a) Care este numărul maxim de puncte de articulație într-un graf neorientat de ordin n?

b) Dați exemple de grafuri cu n vârfuri care să aibă mulțimi de articulație de cardinal $n-2,...,1$.

52. Să se demonstreze că într-un graf conex $G = (X,U)$ vârful $x_i \in X$ este punct de articulație dacă şi numai dacă există două vârfuri x_j şi x_k, astfel încât x_i aparține tuturor lanțurilor elementare ce unesc x_j cu x_k.

53. Să se demonstreze că orice graf planar 5-conex conține cel puțin 12 vârfuri.

54. Fie $\alpha_o(G)$ şi $\beta_o(G)$ numărul de stabilitate internă şi respectiv numărul de stabilitate externă a grafului $G = (X,U)$. Să se demonstreze inegalitatea $\alpha_o(G) \geq \beta_o(G)$.

55. Fie $G = (X,U)$ un graf neorientat fără vârfuri izolate. Să se demonstreze că în G există o mulțime de vârfuri D extern stabilă, astfel încât $X \setminus D$ este de asemenea extern stabilă.

56. Să se arate că un graf finit neorientat, în care gradul fiecărui vârf este cel puțin $d > 1$, conține un ciclu de lungime cel puțin $d+1$.

57.

a) Să se arate, că într-un graf conex G raza şi diametrul verifică relația:

$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G).$$

b) Care este relația dintre raza şi diametrul unui arbore?

58. Să se verifice dacă este adevărată afirmația:

Pentru orice graf conex $G = (X, U)$ există un arbore parțial de acelaşi diametru cu G.

59.

a) Să se demonstreze că un arbore are cel mult două vârfuri centrale.

b) Să se arate că dacă un arbore are două vârfuri centrale, atunci acestea sunt adiacente.

60. Un graf-plan se numeşte triangulat dacă frontiera fiecărei fețe este un ciclu de lungimea trei.

Considerăm o colorare oarecare cu trei culori a unui graf-plan $G = (X, U)$ triangulat. Spunem că o față a lui G este colorată corect dacă toate vârfurile frontierei sale sunt colorate în culori diferite. Să se demonstreze că numărul fețelor corect colorate este par.

61. Spunem că o hartă este colorată corect dacă oricare două regiuni conexe din plan, având în comun o parte a frontierei, sunt colorate cu culori diferite. Să considerăm o hartă generată de intersecțiile unor cercuri în plan. Să se demonstreze că ea poate fi colora corect cu două culori.

62. Să se demonstreze că numărul cromatic al oricărui graf planar este mai mic decât 6.

63. Graful G se numeşte graf critic, dacă pentru orice vârf v are loc inegalitatea $\chi(G - v) < \chi(G)$.

Fie $G = (X, U)$ un graf critic şi $S \subset X$ o submulțime intern stabilă a lui G. Să se demonstreze că $\chi(G(X \setminus S)) < \chi(G) - 1$.

64. Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat de ordin n. Să se arate că sunt adevărate relațiile:

a. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$;

b. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \le (n+1)^2/4$;

c. $\chi(G) \ge n^2/(n^2-2m)$.

65. Considerăm un arbore $G=(X,U)$, cu $|X| \ge 2$. Să se demonstreze că G are cel puțin două vârfuri de grad 1.

66. Fie $G_i=(X_i,U_i)$, $i=1,...,p$, subarbori ai unui arbore $G=(X,U)$. Să se arate că dacă oricare doi subarbori au cel puțin un vârf comun, atunci toți subarborii au cel puțin un vârf comun, adică: $(X_i \cap X_j \ne \emptyset \quad \forall i,j \in \{1,...,p\},\ i \ne j) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{p} X_i \ne \emptyset$.

67. Fie date n numere naturale, ce verifică relațiile $0 < d_1 \le d_2 \le ... \le d_n$. Să se demonstreze că $d_1+d_2+...+d_n = 2n-2$ dacă şi numai dacă există un arbore $G=(X,U)$ cu $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ şi $\deg x_i = d_i$, $i=1,2,...,n$.

68. Fie $G=(X,U)$ un arbore. Notăm cu g_i numărul vârfurilor ce au gradul i şi cu g numărul vârfurilor de grad mai mare decât 2. Să se demonstreze că $g_1 \ge g+2$.

69. Să se demonstreze că orice arbore cu n vârfuri şi de diametru mai mare sau egal cu $2k-3$ conține cel puțin $n-k$ lanțuri de lungime k.

70. Să se demonstreze că pentru un graf cu n vârfuri, m muchii şi p componente conexe are loc relația $m+p \ge n$ (folosiți faptul că într-un arbore $m=n-1$).

71. Fie $A=(X,U)$ un arbore şi $A_1=(X_1,U_1),...,A_p = (X_p,U_p)$ – o mulțime de subarbori ai lui A.

Să se arate că dacă $B=\bigcap_{i=1}^{p} X_i \ne \emptyset$, atunci B este mulțimea vârfurilor unui subarbore al lui A.

72. Determinați arborii $G=(X;U)$ cu n vârfuri pentru care suma $\sum_{x,y\in X} d(x,y)$ este minimă, respectiv maximă.

73. Pentru orice vârf x al unui arbore $G=(X;U)$ notăm:

$$s(x)=\sum_{y\in X} d(x,y).$$

1) Să se arate că funcția $s(x)$ este strict convexă în sensul că dacă y şi z sunt două vârfuri adiacente cu x, atunci este adevărată inegalitatea:
$$2s(x)<s(y)+s(z).$$
2) Funcția $s(x)$ îşi atinge valoarea minimă într-un singur vârf sau în două vârfuri adiacente ale arborelui G.

74. Fie $G=(X,U)$ un arbore şi $f:X\to X$ este o aplicație cu proprietatea că dacă $(x,y)\in U$, atunci $f(x)=f(y)$ sau $(f(x),f(y))\in U$. Să se arate că f are un punct fix sau o muchie fixă.

75. Fie A un arbore cu mulțimea de vârfuri X, astfel încât $|X|=2n+1$. Un automorfism al arborelui A este o bijecție $f:X\to X$ care păstrează adiacența vârfurilor, adică (x,y) este o muchiei a arborelui A dacă şi numai dacă $(f(x),f(y))$ este o muchie a lui A.

Să se arate că f are cel puțin un punct fix.

76. Pentru un arbore G cu mulțimea vârfurilor $X=\{x_1,...,x_n\}$ notăm

$$D=(d_{ij})_{i,j=1,...,n},$$

unde $d_{ij}=d(x_i,x_j)$ este distanța dintre vârfurile x_i şi x_j în G.

Să se arate că

$$\det D = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

77. Să se găsească numărul arborilor cu n vârfuri $x_1,...,x_n$ care au exact p vârfuri suspendate.

78. Se consideră graful-scară din figura 6, care are $2n$ vârfuri.

a) În câte moduri putem alege n muchii care au două câte două extremități comune?

b) Să se arate că acest graf are

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

arbori parțiali.

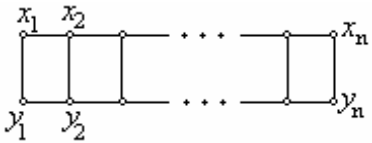

Figura 6

79. De verificat afirmațiile:

a) Un graf G are un ciclu eulerian dacă şi numai dacă este conex şi are gradele tuturor vârfurilor pare.

b) Dacă G este conex şi are $2k$ vârfuri de grad impar $(k \geq 1)$, atunci el este reuniunea a k lanțuri.

80. Fie $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ gradele vârfurilor unui graf G şi $d_k \geq k$ pentru orice $k \leq n - d_n - 1$. Să se arate că G este conex.

81. Fie G un graf conex cu n vârfuri şi $1 \leq k \leq n$.

Să se arate că G conține un subgraf conex H cu k vârfuri.

82. Există oare un graf cu 10 vârfuri pentru care şirul gradelor vârfurilor sale este respectiv:

$$1,1,1,3,3,3,4,6,7,9\,?$$

83. Fie întregii $d_1,...,d_n$ astfel încât

$$0 \le d_1 \le ... \le d_n .$$

Să se arate că aceste numere sunt grade ale vârfurilor unui multigraf cu n vârfuri, dacă şi numai dacă sunt verificate următoarele două condiţii:

a) $d_1 + ... + d_n$ este număr par,

b) $d_n \le d_1 + ... + d_{n-1}$.

84. Ce numere pot reprezenta numărul de vârfuri ale grafurilor k-regulate?

85. Să se demonstreze că orice graf conex G conţine cel puţin un vârf x cu proprietatea că subgraful $G_x = G - x$ este conex.

86. Un graf G este 2-conex dacă este conex şi nu conţine puncte de articulaţie.

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un graf G cu $n \ge 3$ vârfuri:

a) G este 2-conex;

b) Oricare două vârfuri ale lui G aparţin unui ciclu elementar;

c) G nu are vârfuri izolate şi oricare două muchii ale sale aparţin unui ciclu elementar.

87. Fie G un graf 2-conex. Să se arate că dacă G conţine două cicluri elementare de lungime maximă, atunci aceste cicluri au cel puţin două vârfuri comune.

88. Să se arate că:

1) Dacă graful G este k-regulat şi are n vârfuri, atunci numărul de triunghiuri în grafurile G şi $\overline{G}$ este egal cu

$$\binom{n}{3} - \frac{nk}{2}(n-k-1).$$

2) Orice graf G cu n vârfuri şi complementarul său $\overline{G}$ conţin împreună cel puţin

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$$

triunghiuri.

89. Să se demonstreze, că orice graf G cu n vârfuri şi m muchii conține cel puțin $\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$ triunghiuri.

90. Să se arate că orice graf cu n vârfuri şi $m > \frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$ muchii conține cel puțin un ciclu elementar cu 4 vârfuri.

91. Să se arate că dacă un graf cu n vârfuri nu conține subgrafuri complete cu k vârfuri $(k \geq 2)$, atunci el conține cel puțin $m = \{n/(k-1)\}$ vârfuri ale căror grade sunt mai mici sau egale cu $p = [(k-2)n/(k-1)]$.

92. Se consideră $3n$ puncte distincte în plan care formează mulțimea M astfel încât maximul distanțelor dintre ele este egal cu 1.

Să se arate că cel mult $3n^2$ distanțe dintre aceste puncte sunt mai mari ca $1/\sqrt{2}$.

93. Fiind date în plan $2n$ puncte astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare, să se arate că numărul maxim de segmente de dreaptă care pot fi construite cu extremitățile în aceste puncte, astfel încât să nu se formeze nici un triunghi, este egal cu n^2.

94. Să se găsească numărul maxim de subgrafuri complete maximale (în raport cu incluziunea) pe care le poate conține un graf cu n vârfuri.

95. Dacă fiecare vârf al unui graf G are gradul egal cel mult cu k, atunci numărul cromatic al grafului G verifică inegalitatea:

$$\chi(G) \leq k+1?$$

96. Să desenăm un număr oarecare de linii în plan, astfel încât oricare trei dintre ele să nu fie concurente. Putem obține un graf planar G considerând punctele de intersecție ale liniilor ca vârfuri ale unui graf şi segmentele dintre punctele de intersecție vecine ca muchii ale acestui graf. Să se arate că

$$\chi(G) \leq 3.$$

97. Dacă G este un graf planar cu $n \geq 4$ vârfuri care au gradele $d_1, d_2, ..., d_n$, să se arate că

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 2(n+3)^2 - 62.$$

Există oare pentru orice $n \geq 4$ există un graf planar cu toate fețele triunghiulare pentru care inegalitatea devine egalitate?

98. Fie G un graf neorientat cu mulțimea vârfurilor X de cardinal n şi mulțimea muchiilor U. Se numeşte λ-colorate a lui G este o funcție

$$f : X \to \{1, ..., \lambda\},$$

unde $\lambda \geq 1$ este un număr natural, cu proprietatea că dacă $(x, y) \in U$, atunci $f(x) \neq f(y)$.

Să se arate că numărul de λ-colorări ale grafului G se poate exprima sub forma unui polinom în λ de gradul n, numit polinom cromatic al grafului G şi notat prin $P_G(\lambda)$, în modul următor:

$$P_G(\lambda) = \sum_{V \subset U} (-1)^{|V|} \lambda^{c(V)},$$

unde $c(V)$ reprezintă numărul componentelor conexe ale grafului parțial (X, V) al lui G.

99. G fiind un graf şi $e = (x, y)$ o muchie a sa, să notăm prin $G - e$ graful obținut din G prin suprimarea muchiei e iar prin $G|e$ graful obținut din G prin suprimarea vârfurilor x şi y

şi a muchiilor incidente cu aceste vârfuri şi înlocuirea lor cu nou vârf z care să fie adiacent cu toate vârfurile grafului G care erau adiacente fie cu x, fie cu y. Să se arate că:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G|e}(\lambda).$$

100. Să notăm prin K_n graful complet cu n vârfuri, prin T_n arborele cu n vârfuri şi prin C_n ciclul elementar cu n vârfuri şi n muchii. De verificat relaţiile:

a) $P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)$;

b) $P_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$;

c) $P_{G_n}(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)$.

101. Să se demonstreze că dacă G este un graf cu n vârfuri, atunci polinomul său cromatic are forma:

$$P_G(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1}a_1x,$$

unde $a_i \geq 0$ pentru orice i.

Dacă în plus G este conex, atunci $a_i > 0$ pentru $i = 1,...,n-1$.

102. La un turneu de şah participă n şahişti. Ştiind că fiecare şahist trebuie să susţină câte o partidă cu fiecare dintre ceilalţi $n-1$ şahişti şi nu poate susţine mai mult de o partidă pe zi, să se afle numărul minim de zile în care se poate încheia turneul.