



UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematica si Informatica

Sergiu CATARANCIUC

***TEORIA GRAFURILOR
ÎN PROBLEME SI
APLICATII***

Chisinau – 2004



UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematica si Informatica

Sergiu CATARANCIUC

TEORIA GRAFURILOR ÎN PROBLEME SI APLICATII

(material didactic)

**Aprobat de
de Consiliul Facultatii
Matematica si Informatica**

Chisinau – 2004

I. NOTIUNI DE BAZA

A. Definitia grafului. Subgrafuri

Perechea de multimii (X, U) , unde X este o multime de vida cu elemente distincte, iar U este formata din perechi neordonate de elemente din X , se numeste *graf neorientat*. Elementele multimii X se numesc *vârfuri*, iar elementele multimii U – *muchii* ale grafului.

Un graf determinat de perechea (X, U) se noteaza prin $G = (X, U)$. În cele ce urmeaza vom studia numai grafuri finite, adica grafuri cu multimile X si U finite. Graful $G = (X, U)$, pentru care $|X| = n$, $|U| = m$, se numeste (n, m) -*graf*. Se mai spune ca graful cu n vârfuri este graf de ordin n . Pentru a specifica, ca X si U sunt multimile de vârfuri si respectiv de muchii ale unui graf G vom utiliza notatiile X_G , U_G .

Daca o muchie u_j este determinata de perechea de vârfuri (x_k, x_l) , atunci vom scrie $u_j = (x_k, x_l)$. În acest caz x_k si x_l se numesc *extremitati* ale muchiei u_j , iar însasi vârfurile se numesc *adiacente*. Se spune, ca fiecare dintre vârfurile x_k si x_l este *incident* muchiei u_j si reciproc. Adiacenta dintre x_k , x_l se noteaza prin $x_k \sim x_l$. Doua muchii se numesc *adiacente*, daca sunt incidente unui vârf comun.

Daca x_i este un vârf al grafului $G = (X, U)$, atunci multimea $\{x_j \in X : (x_i, x_j) \in U\}$ se numeste *vecinatate* a vârfului x_i si se noteaza prin $\Gamma_G(x_i)$ sau simplu $\Gamma(x_i)$. Grad sau valenta a vârfului $x_i \in X$ este cardinalul multimii $\Gamma(x_i)$ si se noteaza prin $\deg x_i$, sau $g(x_i)$.

Vecinatate a unei submultimi de vârfuri $A \subset X$ a grafului $G = (X, U)$ se numeste multimea

$$\Gamma(A) = \{z \in X \setminus A : \exists y \in A \Rightarrow z \sim y\}.$$

Valenta maxima si valenta minima a vârfurilor unui graf G se noteaza prin $\Delta(G)$ si $d(G)$, adica:

$$\Delta(G) = \max_{x \in X} \{\deg x\}, \quad d(G) = \min_{x \in X} \{\deg x\}.$$

Vârful $x \in X$ se numeste *izolat* în graful G , daca $\deg x = 0$ si *suspendat* daca $\deg x = 1$ (vârful suspendat se mai numeste *vârf terminal*). Muchia incidenta unui vârf suspendat de asemenea se numeste *suspendata*.

Pentru un (n, m) -graf $G = (X, U)$ se verifica cu usurinta egalitatea

$$\sum_{x \in X} \deg x = 2m.$$

Într-adevar vom observa ca la calcularea sumei $\sum_{x \in X} \deg x$

fiecare muchie din graf se va numara de doua ori, deoarece gradul unui vârf mai poate fi considerat si ca numarul de muchii din graf, incidente acestui vârf.

Graful, oricare doua vârfuri ale caruia sunt adiacente, se numeste *graf complet* si se noteaza prin K_n . Numarul de muchii ale lui K_n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Graful $G = (X; U)$ cu $U = \emptyset$ se numeste *graf vid* si se noteaza prin O_n , iar graful, pentru care $|X| = 1$, $U = \emptyset$ se numeste *graf trivial*. Daca $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ si fiecare muchie a grafului $G = (X; U)$ are o extremitate în X_1 , iar alta în X_2 , atunci graful G se numeste *bipartit* si se noteaza prin $G = (X_1, X_2; U)$. Graful bipartit, în care fiecare vârf din X_1 este adiacent cu fiecare vârf din

X_2 se numeste *graf bipartit complet*.

Conform definitiei grafului neorientat multimea U_G ar putea sa contina muchii ale caror extremitati coincid. Astfel de muchii se numesc *bucle*. De asemenea, o pereche de vârfuri poate fi prezenta de mai multe pro în U_G . În acest caz multimea de muchii determinata de aceeasi pereche de vârfuri se mai numeste *muchie multipla*. Graful, ce contine bucle si muchii multiple se numeste *pseudograf*, iar graful ce contine bucle se numeste *multigraf*.

Graful $G = (X; U)$ se numeste *orientat*, daca U este o multime de perechi ordonate de elemente din X . Graful orientat se noteaza prin $\vec{G} = (X; \vec{U})$. Elementele multimii $\vec{U}$ se numesc *arce*. Pentru arcul $\vec{u} = (x, y)$ vârful x este *extremitate initiala*, iar y – *extremitate finala*. Se spune ca arcul $\vec{u} = (x, y)$ este orientat de la x spre y . Vârful X se mai numeste *predecesorul vârfului y* , iar y – *succesorul vârfului X* .

Din definitia grafului orientat rezulta ca perechile de vârfuri (x_i, x_j) si (x_j, x_i) reprezinta arce diferite. Graful orientat $\vec{G} = (X; \vec{U})$, care pentru orice doua vârfuri $x_i, x_j \in X$ nu contine în acelasi timp arcele (x_i, y_j) si (y_j, x_i) se numeste antisimetric, iar graful antisimetric cu un numar maxim de arce se numeste *turnir*.

Semigradul exterior al unui vârf $x_i \in X$, notat prin $g^+(x_i)$, al grafului $\vec{G} = (X; \vec{U})$ este cardinalul multimii $\{x_j \in X : (x_i, x_j) \in \vec{U}\}$, adica este numarul succesorilor lui x_i .

Semigradul interior al unui vârf $x_i \in X$, notat prin $g^-(x_i)$, al grafului $\vec{G} = (X; \vec{U})$ este cardinalul multimii $\{x_j \in X : (x_j, x_i) \in \vec{U}\}$, adica este numarul predecesorilor lui x_i .

Gradul sau valenta vârfului x_i al grafului orientat este $g(x_i) = g^+(x_i) + g^-(x_i)$.

În cazul grafului neorientat are loc egalitatea $g(x_i) = g^+(x_i) = g^-(x_i)$. Graful, în care gradele tuturor vârfurilor sunt egale cu un număr k , se numește *graf k -regulat*.

În cele ce urmează, dacă nu se va concretiza în mod special, vom considera, ca graful G este neorientat, fără bucle și muchii multiple. Astfel de grafuri se mai numesc *grafuri simple*.

Graf complementar al unui graf $G = (X; U)$ este graful $\bar{G}$ cu aceleași mulțimi de vârfuri X , în care două vârfuri sunt adiacente dacă și numai dacă ele nu sunt adiacente în G . Graful $L(G)$, vârfurile cărui corespund muchiilor grafului G și în care două vârfuri sunt adiacente dacă și numai dacă sunt adiacente muchiile corespunzătoare lor în G , se numește *graf al muchiilor* grafului G .

Două grafuri $G_1 = (X_1; U_1)$ și $G_2 = (X_2; U_2)$ se numesc *izomorfe* dacă există o aplicație bijectivă $\gamma : X_1 \rightarrow X_2$ astfel încât $(x_i, x_j) \in U_1$ dacă și numai dacă $(\gamma(x_i), \gamma(x_j)) \in U_2$.

În teoria grafurilor se acordă un interes deosebit unor submulțimi de vârfuri sau muchii cu proprietăți speciale, ce își găsesc aplicație la soluționarea unui sir de probleme practice. Printre aceste submulțimi se află mulțimile intern stabile, extern stabile, nucleul grafului, cuplajul s.a.

O submulțime de vârfuri $S \subset X$ a unui graf $G = (X; U)$ se numește *intern stabilă* dacă orice două vârfuri $x, y \in S$ nu sunt adiacente în G . Mulțimea intern stabilă S se numește maximală, dacă în G nu există o altă mulțime intern stabilă A astfel încât $S \subset A$, și respectiv mulțimea intern stabilă S se numește maximă dacă pentru orice mulțime intern stabilă A din G are loc

inegalitatea $|S| \geq |A|$. Cardinalul multimii maxime intern stabile se numeste *numar de stabilitate interna* a grafului G si se noteaza prin $a_o(G)$.

O submultime de vârfuri $B \subset X$ a unui graf $G = (X; U)$ se numeste extern stabila daca pentru orice $x \in X \setminus A$ exista un vârf $y \in B$ adiacent cu x . Multimea extern stabila B se numeste minima daca în graful G nu exista o alta multime extern stabila C astfel încât $C \subset B$, si respectiv multimea extern stabila B se numeste minima daca pentru orice multime extern stabila C din G are loc inegalitatea $|B| \leq |C|$. Cardinalul multimii minime extern stabile se numeste *numar de stabilitate externa* a grafului G si se noteaza prin $b_o(G)$.

Multimea de vârfuri care este în acelasi timp intern stabila si extern stabila se numeste *nucleu*.

O submultime de muchii $K \subset U$ a unui graf $G = (X; U)$ se numeste *cuplaj* daca orice doua muchii $u_i, u_j \in K$ nu sunt adiacente în G . Cuplajul K se numeste maximal daca în G nu exista un alt cuplaj T astfel încât $K \subset T$, si respectiv cuplajul K se numeste maxim, daca pentru orice cuplaj T din G are loc inegalitatea $|K| \geq |T|$.

Graful $H = (X_H; U_H)$ se numeste *subgraf* al grafului $G = (X_G; U_G)$ daca $X_H \subset X_G$, $U_H \subset U_G$. În cazul când $X_H = X_G$ graful H se numeste *subgraf partial* al grafului G . Daca $U_H = (X_H \times X_H) \cap U_G$ atunci H se numeste *subgraf, generat* de submultimea de vârfuri $X_H \subset X_G$. Cu alte cuvinte, daca H este un subgraf al grafului G , generat de o submultime de vârfuri $X_H \subset X_G$ atunci doua vârfuri sunt adiacente în H daca si numai daca ele sunt adiacente si în G .

Fie acum $G = (X, U)$ un graf simplu, iar k un numar natural oarecare. Functia $f : X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ se numeste k -colorare a vârfurilor grafului G . Colorarea se numeste corecta, daca $f(x) \neq f(y)$ pentru orice doua vârfuri adiacente $x, y \in X$. Se spune ca graful G este k -colorabil, daca exista o k -colorare corecta a vârfurilor sale. Numarul minim k pentru care graful G este k -colorabil se numeste *numar cromatic* al acestui graf si se noteaza prin $c(G)$. Daca $c(G) = k$ atunci G se numeste k cromatic.

B. Lanturi si cicluri

O consecutivitate de vârfuri $m = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ se numeste *marsrut* în graful $G = (X, U)$ daca $(x_i, x_{i+1}) \in U$ pentru $\forall i = \overline{1, k}$. Se considera, ca o muchie $u_j = (x_p, x_l)$ din G apartine marsrutului m daca si numai daca x_p si x_l sunt vârfuri vecine în consecutivitatea m , adica $p \in \{1, 2, \dots, k\}$ si $l = p + 1$. Vârfurile x_1, x_{k+1} se numesc *extremitati* ale marsrutului, iar numarul k - *lungimea* lui. Daca $x_1 = x_{k+1}$ atunci m e numeste *marsrut închis*.

Un marsrut, ce contine fiecare muchie a grafului cel mult o singura data se numeste *lant*. Lantul, toate vârfurile caruia sunt distincte doua câte doua se numeste *lant elementar*.

Un marsrut închis, ce contine fiecare muchie a grafului cel mult o singura data se numeste *ciclu*. Ciclul, toate vârfurile caruia, cu exceptia celor extreme, sunt distincte doua câte doua se numeste *ciclu elementar*. Nu orice graf contine cicluri elementare. Graful ce nu contine cicluri elementare se numeste *arbore*.

Într-un graf $G = (X; U)$, subgraful partial, ce nu contine cicluri elementare se numeste *arbore partial*.

Lantul (ciclul), ce contine fiecare muchie a grafului exact o singura data se numeste *lant (ciclu) eulerian*.

Lantul (ciclul) ce contine fiecare vârful al grafului exact o singura data se numeste *lant (ciclu) hamiltonian*.

Graful în care oricare doua vârfuli sunt unite printr-un lant elementar se numeste *graf conex*. Subgraful maximal conex al grafului G , adica subgraful conex ce nu se contine într-un alt subgraf conex mai mare, se numeste *componenta conexa*. Prin urmare, daca graful G nu este conex, atunci el contine cel putin doua componente conexe.

Notam prin $d(x, y)$ lungimea minima a lanturilor elementare, ce unesc vârfuli x, y . Numarul $d(x, y)$ exprima *distanța* dintre x si y . În cazul când între doua vârfuli $x, y \in X_G$ nu exista nici un lant, se considera $d(x, y) = \infty$.

Distanța vârfuli unui graf conex $G = (X; U)$ definita astfel satisface axiomele metricei, adica pentru orice trei vârfuli $x, y, z \in X_G$ au loc urmatoarele relatii:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ si $d(x, y) = 0$ daca si numai daca $x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Cu ajutorul distantei se defineste puterea de gradul $k \geq 1$ a grafului. Se numeste *putere de gradul k* a unui graf G graful G^k , ce contine aceeasi multime de vârfuli ca si G si în care doua vârfuli x, y sunt adiacente daca si numai daca în G are loc inegalitatea $d(x, y) \leq k$.

Pentru un vârful oarecare $x \in X_G$ al unui graf G numarul

$$e(x) = \max_{y \in X} d(x, y)$$

se numeste *excentricitate* a acestui vârf. Cea mai mare si cea mai mica dintre excentricitatile vârfurilor unui graf G se numesc respectiv *diametru* – $d(G)$ si *raza* – $r(G)$ a grafului. Prin urmare

$$d(G) = \max_{x \in X} e(x) = \max_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

$$r(G) = \min_{x \in X} e(x) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y).$$

Evident $r(G) \leq d(G)$ si exista grafuri G pentru care are loc egalitatea $r(G) = d(G)$. De exemplu, în cazul când G este un ciclu elementar de lungime para egalitatea indicata se respecta. Vârful, excentricitatea caruia coincide cu raza grafului se numeste *vârf central*. Multimea tuturor vârfurilor centrale se numeste *centrul grafului*.

Submultimea minima de vârfuri $A \subset X_G$, adica submultimea cu un numar minim de vârfuri, se numeste *multime de articulatie* a grafului G , daca la eliminarea ei din G obtinem un graf nou, ce contine cu o componenta conexa mai mult decât G (deci la eliminarea din G a oricarei submultimi $B \subset X_G$, $|B| < |A|$, obtinem un graf nou, în care numarul componentelor conexe nu este mai mare decât în G). În cazul când multimea de articulatie este formata dintr-un singur vârf, acest vârf se numeste *punct de articulatie*. Muchia, ce uneste doua puncte de articulatie se numeste *istm*. Daca muchia u_j este istm în graful G , atunci la eliminarea ei obtinem un graf nou cu mai multe componente conexe decât G . Subgraful maximal, ce nu contine puncte de articulatie se numeste *bloc*.

C. Reprezentari ale grafurilor

În afara de reprezentarea algebrica ce consta în descrierea nemijlocita a multimilor de vârfuri si de muchii un graf mai poate fi

reprezentat geometric, prin matricea de adiacenta, matricea de incidenta, s. a.

În reprezentarea geometrica vârfului grafului se reprezinta prin puncte sau cercuri etichetate, iar orice muchie se reprezinta printr-o linie continua, ce uneste punctele corespunzatoare extremitatilor muchiei respective. În cazul grafurilor orientate liniile sunt înzestrate cu o sageata, ce corespunde orientarii arcului. De exemplu, fie G_1, G_2 – doua grafuri reprezentate algebric:

$$G_1 = (X_1; U_1): \begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ U_1 &= \{(x_1, x_2)(x_1, x_3), (x_2, x_4)(x_2, x_3)\} \end{aligned} \quad ,$$

$$\bar{G}_2 = (X_2; \bar{U}_2): \begin{aligned} X_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ \bar{U}_2 &= \{(x_1, x_2)(x_2, x_4), (x_3, x_4)(x_4, x_5)\} \end{aligned} \quad ,$$

Reprezentarea geometrica a grafurilor G_1, G_2 este data în figura 1a si 1b.

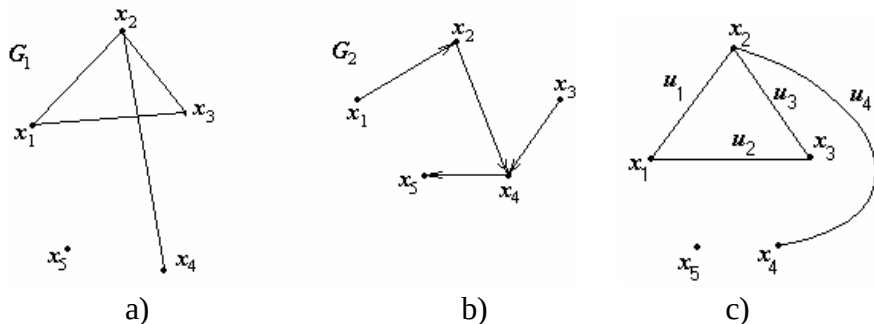


Figura 1

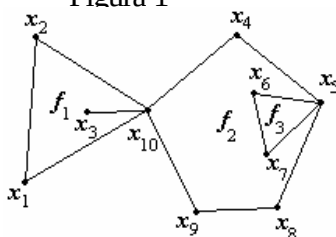


Figura 2

Graful $G=(X;U)$ se numeste *planar* daca admite o reprezentare geometrica în plan, în care orice doua muchii nu au puncte comune interioare. Într-asi reprezentarea geometrica a grafului planar, ce poseda proprietatea indicata se numeste *graf-plan*. Se mai spune ca graful-plan este o reprezentare corecta în plan a grafului planar. Graful din figura 1a este un graf planar, iar una dintre reprezentarile corecte ale sale din plan, adica graful-plan respectiv, este data în figura 1c. La suprimarea din plan a muchiilor si vârfulor unui graf-plan $G=(X;U)$ întreg planul se împarte în componente conexe, numite fete ale lui G . Componentele conexe marginite se numesc *fete interioare*, iar componenta conexa nemarginita – *fata exterioara*. Orice graf-plan contine o fata exterioara. Frontiera oricarei fete este un marsrut închis. Graful-plan din figura 2 contine $n=9$ vârfuli, $m=12$ muchii si $f=4$ fete. Fetele f_1, f_2, f_3 sunt fete interioare, iar fata f_4 este exterioara. Frontiera fetei f_1 este marsrutul închis $(x_1, x_2, x_{10}, x_3, x_{10}, x_1)$. Daca un graf este planar, atunci în orice reprezentare corecta a sa în plan numarul de fete ramâne constant. Relatia dintre numarul de vârfuli – n , muchii – m si fete – f ale unui graf planar a fost stabilita de Leonard Euler:

$$n - m + f = 2,$$

(care se numeste astazi formula lui Euler).

O matrice binara $A=\|a_{ij}\|$ de dimensiunea $n \times n$ se numeste *matrice de adiacenta* a grafului G cu multimea de vârfuli $X_G=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, daca:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } x_i \approx x_j \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Matricea de adiacenta a grafului este o matrice simetrica cu elementele de pe diagonala principala egale cu zero. Liniile si

coloanele acestei matrici corespund vârfurilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale grafului. Numarul de unitati dintr-o linie (coloana) este egal cu gradul vârfului corespunzator. Pentru graful reprezentat în figura 1a matricea de adiacenta este :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

În mod analog se definește *matricea de incidenta* a grafului $G = (X; U)$, cu multimile de vârfuri și muchii $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Aceasta este de asemenea o matrice binară $B = \|b_{ij}\|$ de dimensiunea $n \times m$ cu elementele:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } x_i \text{ este incident muchiei } u_j, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Fiecare coloana a matricii de incidenta contine exact doua unitati. Pentru graful din figura 1c matricea de incidenta este:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

În cazul grafurilor orientate matricea de incidenta este o matrice $B = \|b_{ij}\|$ cu elementele:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{daca } x_i \text{ este vârf initial al arcului } u_j, \\ -1, & \text{daca } x_i \text{ este vârf final al arcului } u_j, \\ 0, & \text{daca vârfurile } x_i \text{ si arcul } u_j \text{ nu sunt incidente.} \end{cases}$$

Un rol deosebit la studierea arborilor partiali ai unui graf neorientat îl joacă *matricea lui Kirhgoft*, care este o matrice binară

$$k_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{daca vârfurile } x_i, x_j \text{ sunt adiacente,} \\ 0, & \text{daca vârfurile } x_i, x_j \text{ nu sunt adiacente,} \\ \deg x_i, & \text{când } x_i = x_j. \end{cases}$$

patratice de dimensiunea $n \times n$, $n = |X|$ cu elementele:

În matricea lui Kirhgoft suma elementelor oricarei linii si a oricarei coloane este egală cu zero.

D. Operatii asupra grafurilor

Dintre operatiile definite asupra grafurilor cele mai des întâlnite sunt: reuniunea, suma, intersectia si produsul grafurilor.

Graful $G = (X; U)$ se numeste *reuniune* a grafurilor $G_1 = (X_1; U_1)$ si $G_2 = (X_2; U_2)$ (se notează $G = G_1 \cup G_2$), daca $X = X_1 \cup X_2$, $U = U_1 \cup U_2$. În cazul când $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, reuniunea grafurilor se numeste disjunctivă.

Graful $G = (X; U)$, ce se obtine din $G_1 = (X_1; U_1)$ si $G_2 = (X_2; U_2)$ prin adaugarea tuturor muchiilor posibile de tipul (x, y) , unde $x \in X_1$, $y \in X_2$ se numeste *suma* a grafurilor G_1, G_2 si se notează $G = G_1 + G_2$.

Graful $G = (X; U)$ se numeste *intersectie* a grafurilor $G_1 = (X_1; U_1)$ si $G_2 = (X_2; U_2)$ (se notează $G = G_1 \cap G_2$), daca $X = X_1 \cap X_2$, $U = U_1 \cap U_2$.

Graful $G = (X; U)$ se numeste *produs* al grafurilor $G_1 = (X_1; U_1)$ si $G_2 = (X_2; U_2)$ (se noteaza $G = G_1 \times G_2$), daca multimea de vârfuri X este determinata de produsul cartezian al multimilor X_1, X_2 ($X = X_1 \times X_2$) si oricare doua vârfuri (x_1, y_1) , (x_2, y_2) sunt adiacente în G daca si numai daca $x_1 = x_2$ si $y_1 \sim y_2$ sau $y_1 = y_2$ si $x_1 \sim x_2$ (figura 3). În cazul produsului cartezian a doua grafuri au loc relatiile:

$$|X| = |X_1 \times X_2| = |X_1| \cdot |X_2|$$

$$|U| = |X_1| \cdot |U_2| + |X_2| \cdot |U_1|$$

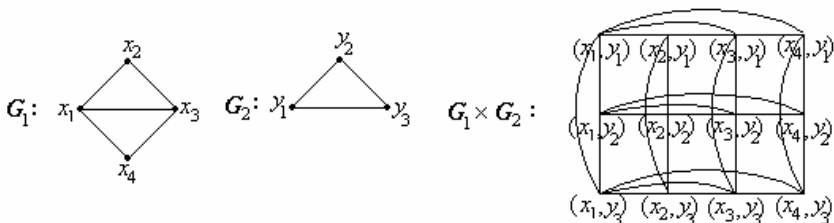


Figura 3

Cu ajutorul operatiei produsului cartezian al grafurilor se pot descrie cuburile Q_n de dimensiunea n , si anume $Q_n = Q_2 \times Q_{n-1}$ ($n > 1$). Cubul n -dimensional contine 2^n vârfuri si $n2^{n-1}$ muchii.

Daca x este un vârf al grafului $G = (X; U)$, atunci prin $G - x$ se noteaza graful ce se obtine din G ca rezultat al eliminarii

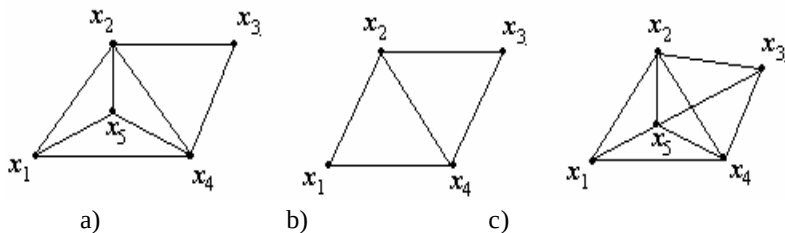


Figura 4

vârfului x (împreună cu muchiile incidente lui). Dacă x și y sunt două vârfuri din G neadiacente, atunci prin $G + u$, unde $u = (x, y)$, se notează graful ce se obține din G la adăugarea muchiei noi (x, y) . În figura 4b și 4c sunt reprezentate respectiv graful $G - x_5$ și $G + (x_3, x_5)$, ce se obțin din graful G , reprezentat în figura 4a.

E. Aplicații ale teoriei grafurilor

Teoria grafurilor este una dintre disciplinele matematice, care și-a găsit o aplicație largă la soluționarea problemelor practice din diferite domenii: fizică, chimie, economie etc. Vom menționa câteva probleme ce se reduc în mod firesc la probleme din teoria grafurilor.

1) N localități trebuie unite într-o rețea informațională astfel încât informația transmisă dintr-o localitate A să poată fi recepționată în orice altă localitate printr-un canal de legătură direct sau prin intermediul altor centre (localități), cu condiția ca lungimea totală a acestei rețele să fie minimă. Se știe că între oricare două localități din punct de vedere fizic este posibilă, trasarea unui canal de legătură informațională. În această situație localitățile pot fi considerate drept vârfuri de un graf complet K_n în care fiecare muchie are o pondere egală cu lungimea canalului de legătură directă dintre centrele respective. Atunci rețeaua informațională căutată va fi un arbore parțial al grafului K_n de lungime minimă. În prezent se cunosc doi algoritmi eficienți de construire a arborilor parțiali de lungime minimă a unui graf: algoritmul lui Kruskal, apărut în anul 1956 și algoritmul lui Prim, apărut în anul 1957.

2) Dintr-un centru oarecare A sunt emise niste semnale care trebuie să fie recepționate în B . Semnalele emise sunt elemente ale mulțimii $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Din cauza unor factori în punctul de stocare a informației B unele dintre aceste semnale pot fi confundate

cu altele. În aceste conditii este necesar sa se determine submultimea maxima de elemente din X care în procesul emisiunii din A în B nu vor fi confundate.

Pentru rezolvarea acestei probleme construim un graf cu multimea de vârfuri $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. În acest graf doua vârfuri x_i, x_j se considera adiacente daca la receptionare în punctul B semnalul x_i poate fi confundat cu semnalul x_j . Submultimea maxima de semnale ce pot fi transmise din A în B fara pericolul de a fi confundate corespunde multimii maxime intern stabile a grafului construit.

De regula transmiterea informatiei între doua centre se face în forma de texte, formate din cuvinte. Daca presupunem ca toate cuvintele au aceeasi lungime k , atunci cunoasterea submultimii maxime de semnale, care la transmiterea prin canalul informational nu vor fi confundate, permite formarea cel putin a $[a_0(G)]^k$ cuvinte diferite, receptionate corect. ($a_0(G)$ este numarul de stabilitate interna a grafului G).

3) Fie data o retea informationala formata din centre de pastrare si prelucrare a informatiei. Unele dintre aceste centre sunt unite prin canale de transmitere a informatiei. Transmiterea informatiei între doua centre poate avea loc nemijlocit prin canalul dintre ele (daca acesta din urma exista) sau prin intermediul altor canale si centre. Reteaua se considera functionabila, daca transmiterea informatiei are loc între orice doua centre. Fiabilitatea retelei functionale este determinata de numarul minim de centre, distrugerea carora conduce la obtinerea unei retele noi, ce nu mai este functionabila.

Fiabilitatea unei astfel de retele informationale este determinata de numarul de conexitate $H(G)$ al grafului G , vârfurile

caruia corespund centrelor informationale si oricare doua vârfuri sunt adiacente daca si numai daca centrele respective sunt unite nemijlocit printr-un canal.

4) Pentru realizarea unui proiect este necesar de efectuat n lucrari, determinate de multimea $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ utilizând în acest scop m dispozitive determinate de multimea $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Se considera ca o lucrare l_i poate fi realizata prin utilizarea unor dispozitive într-un volum de timp egal pentru toate lucrarile din multimea L , iar unul si acelasi dispozitiv nu poate fi utilizat concomitent pentru efectuarea a mai multor lucrari. Se cere de gasit o astfel de repartizare a dispozitivelor pentru îndeplinirea lucrarilor, care ar minimiza timpul sumar de realizare a proiectului.

Pentru solutionarea acestei probleme construim un graf G , vârfurile caruia corespund lucrarilor l_i ($i = \overline{1, n}$), considerând doua vârfuri l_i, l_j adiacente, daca pentru efectuarea lucrarilor respective este necesar de folosit cel putin un dispozitiv comun. La o colorare corecta a vârfurilor grafului construit lucrarile ce corespund vârfurilor colorate la fel pot fi îndeplinite în acelasi timp. Timpul minim necesar pentru realizarea proiectului în întregime este determinat de numarul minim de culori în care pot fi colorate vârfurile grafului.