CAPITOLUL 3

INTEGRALA LEBESGUE

1. Integrarea funcţiilor simple

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură finită, $f : X \to \mathbb{R}$ – o funcţie simplă, adică

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \ \mathbf{1}_{A_j}(x), \tag{60}$$

unde

$$A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j, \quad A_j \in \mathfrak{A}, \ j = \overline{1,n}, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X. \tag{61}$$

Definiţie 3.1.1. *Vom numi integrală Lebesgue de la funcţia simplă f pe spaţiul X (notaţie $\int\limits_X f(x)d\mu(x)$ sau $\int\limits_X f d\mu$) suma*

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j). \tag{62}$$

Observaţie 3.1.1. Fie $A \subset X$ – mulţime măsurabilă, f – funcţie simplă măsurabilă. Atunci $f(x) \cdot I_{\triangle}(x)$ – funcţie simplă, măsurabilă. Prin definiţie

$$\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \int\limits_A f d\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_A f \cdot I_A d\mu. \tag{63}$$

Exemplul 3.1.1. a) Fie $A \subset X, \ A \in \mathfrak{A}$ şi $I_A(x)$ – funcţia caracteristică a mulţimii A. Atunci

$$\int\limits_X I_A(x) d\mu(x) = \mu(A).$$

b) Fie $X = [a, b], \ \mathfrak{A}$ – σ-algebra mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue, $\mu = m$ este măsura Lebesgue, $D\big|_{[0,1]}(x)$ – restricţia funcţiei Dirichlet pe $[0, 1]$. Atunci

$$\int\limits_{[0,1]} D\big|_{[0,1]}(x) dm(x) = 1 \cdot m(\{\mathbb{Q} \cap [0,1]\}) + 0 \cdot m(\{[0,1] \setminus \mathbb{Q}\}) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

2. Proprietăţile integralei Lebesgue

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – spaţiu cu măsură finită.

Teorema 3.2.1. *(linearitatea integralei) Fie* f, g *– funcţii simple măsurabile,* $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$. *Atunci*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

Demonstraţie. Fie

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot I_{A_j}(x), \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X,$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot I_{B_i}(x), \quad B_i \cap B_k = \varnothing, \; i \neq k, \quad \bigsqcup_{i=1}^{k} B_i = X.$$

Cum funcţia $\alpha f + \beta g$ primeşte valoarea $\alpha c_j + \beta b_k$ pe mulţimea $C_{ji} = A_j \cap B_i$, avem

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (\alpha c_j + \beta b_i) \cdot I_{C_{ji}}(x),$$

unde $\bigsqcup\limits_{j,k} C_{jk} = X$, şi mulţimile C_{jk} sunt disjuncte. Conform definiţiei integralei şi aditivităţii măsurii, se obţine

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (\alpha c_j + \beta b_k) \mu(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \alpha c_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \beta b_i \mu(A_j \cap B_i) =$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{k} \mu(A_j \cap B_i) + \beta \sum_{i=1}^{k} b_i \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i) = \alpha \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) + \beta \sum_{i=1}^{k} b_i \mu(B_i) =$$

$$= \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

Teorema 3.2.2. *(nenegativitatea integralei) Fie* f *– funcţie simplă, măsurabilă şi* $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$. *Atunci* $\int\limits_X f d\mu \geq 0$.

Demonstraţie. $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$ înseamnă că dacă $c_j < 0$ pentru un careva j, atunci $\mu(A_j) = \mu(\{x \in X \mid f = c_j\}) = 0$, prin urmare,

$$\int\limits_X f d\mu \geq 0.$$

Teorema 3.2.3. *(monotonia integralei) Fie f, g – funcţii simple, măsurabile şi $f \geq g$ (mod μ). Atunci* $\int\limits_X f d\mu \geq \int\limits_X g d\mu.$

Demonstraţie. Se consideră funcţia simplă măsurabilă $h = f - g$ şi se aplică teorema 3.2.2.

Teorema 3.2.4. *Fie f – funcţie simplă măsurabilă şi $a \leq f(x) \leq b$ (mod μ). Atunci* $a\mu(X) \leq \int\limits_X f d\mu \leq b\mu(X).$

Demonstraţie. Rezultă din teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.5. *(referitor integrala de la o funcţie echivalentă cu zero) Daca f este funcţie simplă măsurabilă şi $f = 0$ (mod μ), atunci* $\int\limits_X f d\mu = 0.$

Demonstraţie. Rezultă nemijlocit din definiţia 3.1.1. În adevăr, dacă toţi coeficienţi c_j sunt nuli, atunci f este identic nulă, iar dacă $c_j \neq 0$ pentru un careva j, atunci $\mu(A_j) = \mu(\{x \in X \mid f = c_j\}) = 0$ şi

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j) = 0.$$

Teorema 3.2.6. *Dacă f, g – funcţii simple măsurabile şi $f = g$ (mod μ), atunci* $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu.$

Demonstraţie. Se consideră funcţia simplă, măsurabilă $h = f - g \quad h = 0$ (mod μ) şi se aplică teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.7. *Dacă f – funcţie simplă măsurabilă, atunci* $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$

Demonstraţie. Dacă f – funcţie simplă măsurabilă, atunci $|f|$ la fel simplă măsurabilă şi $\forall x \in X$:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Conform proprietăţii de monotonie a integralei

$$-\int\limits_X |f| d\mu \leq \int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X |f| d\mu$$

sau, echivalent,

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

Fie f – o funcţie simplă măsurabilă fixată, $\nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie numerică definită prin

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{64}$$

Teorema 3.2.8. *Funcţia de mulţimi ν – măsură cu semn.*

Demonstraţie. Este clar că $\nu(\varnothing) = 0$. Verificăm σ-aditivitatea funcţiei ν. Fie $A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \mathfrak{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot I_{B_j}(x)$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $X = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j$.

Utilizând definiţia integralei şi σ-aditivitatea măsurii μ, se obţine

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \cdot I_A d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(B_j \cap A) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu\left(B_j \cap \bigsqcup_i A_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \mu\left(\bigsqcup_i (B_j \cap A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_i \mu(B_j \cap A_i) = \sum_i \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(B_j \cap A_i) = \sum_i \int_{A_i} f d\mu =$$

$$= \sum_i \nu(A_i).$$

Definiţie 3.2.1. *Vom spune ca funcţia de mulţimi $\lambda : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ se numeşte absolut continue în raport cu măsura μ, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ, astfel încât pentru orice $E \in \mathfrak{A}$ cu $\mu(E) < \delta$ se verifică $|\lambda(E)| < \varepsilon$.*

Teorema 3.2.9. *(continuitatea absolută a integralei) Măsura cu semn ν definită în* (64) *este o funcţie absolut continuă în raport cu măsura μ.*

Demonstraţie. Fie f – funcţie simplă măsurabilă şi $c = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Dacă $c = 0$, teorema este clară. Fie $c > 0$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ punem $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Atunci, pentru $\mu(E) < \delta$ avem

$$|\nu(E)| = \left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu \leq c \cdot \mu(E) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

3. Integrala Lebesgue de la funcţii mărginite

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă mărginită pe X. Atunci (a se vedea teorema ??????) există un şir de funcţii simple măsurabile $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform convergent la f pe X. Vom considera şirul integralelor respective $I_n = \int_X f_n d\mu$ şi vom arăta că şirul (I_n) este fundamental. În adevăr, cum $f_n \rightrightarrows f$ pe X, avem

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > n_0, \quad \forall x \in X$ avem

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)}.$$

Atunci, pentru $m, n > n_0$ avem

$$\big|I_m - I_n\big| = \left|\int\limits_X f_m d\mu - \int\limits_X f_n d\mu\right| = \left|\int\limits_X (f_m - f_n) d\mu\right| \leq \int\limits_X \big|f_m - f_n\big| d\mu < \frac{\varepsilon}{\mu(X)} \cdot \mu(X) = \varepsilon,$$

adică (I_n) – şir fundamental şi deci există $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$.

Uşor de verificat, că I nu depinde de alegerea şirului (f_n), ce converge uniform pe X la f.

Definiţie 3.3.1. *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ – funcţie măsurabilă mărginită pe X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – un şir de funcţii simple măsurabile ce converge uniform pe X la f. Integrala Lebesgue de la funcţia f se defineşte prin egalitatea*

$$\int\limits_X f(x) d\mu(x) = \int\limits_X f d\mu \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} I_n. \tag{65}$$

Fie f – funcţie măsurabilă mărginită, $A \in \mathfrak{A}$. Atunci $I_A(x)$ – funcţie mărginită măsurabilă şi la fel este şi produsul $f \cdot I_A$.

Definiţie 3.3.2. *Fie f – funcţie măsurabilă mărginită, A – mulţime măsurabilă. Atunci integrala Lebesgue de la funcţia f pe mulţimea A se defineşte prin*

$$\int\limits_A f d\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_X f I_A d\mu. \tag{66}$$

Vom studia proprietăţile integralei Lebesgue de la funcţii măsurabile mărginite. Aceste proprietăţi sunt absolut similare celor de la funcţii simple.

Teorema 3.3.1. *(linearitatea integralei) Fie f, g – funcţii măsurabile mărginite, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$. Atunci*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu.$$

Demonstraţie. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – şiruri de funcţii simple măsurabile, $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ pe X. Atunci $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ pe X. Conform definiţiei 3.3.1 şi linearităţii integralei Lebesgue de la funcţii simple, se obţine:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int_X f_n d\mu + \beta \int_X g_n d\mu \right) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \beta \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

Teorema 3.3.2. *(nenegativitatea integralei) Fie f – funcţie măsurabilă mărginită şi $f \geq 0$ $(mod\ \mu)$. Atunci $\int_X f d\mu \geq 0$.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii simple măsurabile uniform convergent la f. Cum funcţiile f_n pot fi alese astfel încât $f_n \geq 0$ $(mod\ \mu)$ (a se vedea teorema ??????), avem $\int_X f_n d\mu \geq 0$. Trecând în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$ obţinem $\int_X f d\mu \geq 0$.

Teorema 3.3.3. *(monotonia integralei) Fie f, g – funcţii măsurabile mărginite şi $f \geq g$ $(mod\ \mu)$. Atunci $\int_X f d\mu \geq \int_X g d\mu$.*

Teorema 3.3.4. *Dacă f – funcţie măsurabilă mărginită şi $a \leq f(x) \leq b$ pe mulţimea măsurabilă A, atunci*

$$\alpha\mu(A) \leq \int_X f d\mu \leq \beta\mu(A).$$

Teorema 3.3.5. *(integrala de la funcţia echivalentă cu zero) Dacă f – funcţia mărginită şi $f = 0$ $(mod\ \mu)$, atunci $\int_X f d\mu = 0$.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 3.3.4 cu $a = b = 0$.

Teorema 3.3.6. *Dacă f, g – funcţii măsurabile mărginite şi $f = g$ $(mod\ \mu)$, atunci $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*

Teorema 3.3.7. *Dacă f – funcţie măsurabilă mărginită, atunci*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstraţie. Fie (f_n) – şir de funcţii simple măsurabile, $f_n \rightrightarrows f$ pe X. Atunci funcţiile $|f_n|$ la fel sunt simple, măsurabile şi $|f_n| \rightrightarrows |f|$. Conform teoremei 3.2.7 paragrafului precedent

$$\left| \int_X f_n d\mu \right| \leq \int_X |f_n| d\mu,$$

şi rămâne de trecut în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$.

Fie f – funcţie măsurabilă mărginită fixată şi

$$\nu(A) = \int\limits_X f d\mu, \qquad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{67}$$

Teorema 3.3.8. *Funcţia de mulţimi ν definită de* (67) *este măsură cu semn.*

Demonstraţie. Din definiţie 3.3.1 şi 3.3.2 rezultă $\nu(\varnothing) = 0$. Verificăm σ-aditivitatea funcţiei ν, adică dacă $A = \bigsqcup\limits_j A_j,\ \ A_i \bigcap A_j = \varnothing,\ \ i \neq j,$ atunci $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$.

Vom stabili iniţial aditivitatea funcţiei ν, pentru $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{A_j} f d\mu. \tag{68}$$

Fie (f_n) un şir de funcţii simple, $f_n \rightrightarrows f$. Atunci conform teoremei 3.2.8

$$\int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} A_j} f_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{A_j} f_n \, d\mu. \tag{69}$$

Trecând în (69) la limită cu $n \to \infty$, se obţine (68).

Cum pentru orice $m \in \mathbb{N}$

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right),$$

utilizând aditivitatea funcţiei ν, se obţine

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{m} \nu(A_j) + \nu \left(\bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} \right). \tag{70}$$

Vom estima ultimul termen din (70). Cum $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu(A) < +\infty$, pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ a.î. pentru $m > k$ $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \mu(A_j) < \dfrac{\varepsilon}{c}$, unde $c = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Pentru aşa m avem:

$$\left| \nu \left(\bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) \right| = \left| \int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=m+1}^{\infty} A_j} f d\mu \right| \leq \int\limits_{\bigsqcup\limits_{j=m+1}^{\infty} A_j} |f| d\mu \leq c \cdot \mu \left(\bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) = c \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu(A_j) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

de unde

$$\lim_{m \to \infty} \nu \left(\bigsqcup_{j=m+1}^{\infty} A_j \right) = 0.$$

Trecând la limită în (70) cu $m \to \infty$, se obţine σ-aditivitatea funcţiei ν. Aşadar, ν – măsură cu semn.

Teorema 3.3.9. *(continuitatea absolută a integralei) Măsura cu semn ν definită în* (67) *este o funcţie absolut continuă în raport cu măsura μ.*

Teorema 3.3.10. *Dacă $f \in \mathcal{R}([a,b])$, atunci ea este integrabilă şi în sens Lebesgue, în plus*

$$(\mathcal{L}) \int\limits_a^b f(x)dx = (\mathcal{R}) \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [???].

Teorema 3.3.11. *(Lebesgue) Funcţia f, mărginită pe $[a,b]$, este integrabilă Riemann, atunci şi numai atunci când mulţimea punctelor ei de discontinuitate are măsura Lebesgue egală cu zero.*

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [???].

4. Integrala Lebesgue de la funcţii nemărginite nenegative

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ spaţiu cu măsură finită, f – funcţia măsurabilă pe X, a.p.t. finită şi nenegativă pe X. Pentru $\forall N \in \mathbb{N}$ definim funcţia f_N prin

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad f(x) < N, \\ N, & \text{dacă} \quad f(x) \geq N. \end{cases}$$

Este clar, că $f_N \in \mathcal{M}(X)$ şi $\lim\limits_{N\to\infty} \mu(\{f \geq N\}) = 0$.

Cum pentru orice $N \in \mathbb{N}$ f_N – funcţie măsurabilă mărginită, f_N este integrabilă Lebesgue. În plus, deoarece

$$\forall x \in X: \;\; f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq ...$$

conform teoremei 3.3.3

$$\int\limits_X f_1 d\mu \leq \int\limits_X f_2 d\mu \leq \int\limits_X f_3 d\mu \leq ...$$

există limita (finită sau infinită)

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_X f_N d\mu. \tag{71}$$

Definiţie 3.4.1. *Vom spune că funcţia f este integrabilă în sens Lebesgue (sumabilă), dacă limita* (71) *este finită. În aşa caz integrala Lebesgue de la funcţia f se defineşte prin egalitatea*

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int\limits_X f d\mu \overset{def}{=} \lim_{N\to\infty} \int\limits_X f_N \; d\mu.$$

Dacă limita (71) *este infinită, punem* $\int\limits_X f d\mu = +\infty$.

Teorema 3.4.1. *Fie* $\{f, g\} \subset \mathcal{M}(X)$, $\quad 0 \le f(x) \le g(x)$ $(mod\ \mu)$ *pe X şi g – funcţie sumabilă. Atunci f – sumabilă şi*

$$\int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu.$$

Demonstraţie. Din condiţiile teoremei rezultă $f_N(x) \le g_N(x)$ $(mod\ \mu)$ pentru $\forall N \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\int\limits_X f_N \; d\mu \le \int\limits_X g_N \; d\mu \le \int\limits_X g d\mu < +\infty,$$

de unde rezultă ca $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_X f_N \; d\mu$ este finită şi trecând la limită cu $N \to \infty$, obţinem inegalitatea din enunţul teoremei.

Fie f – funcţie sumabilă pe X, $A \subset X$ mulţime măsurabilă şi $I_A(x)$ – funcţia caracteristică a lui A. Atunci $f \cdot I_A \in \mathcal{M}(X)$ şi cum

$$0 \le f(x) \cdot I_A \le f(x),$$

conform teoremei 3.4.1 $f \cdot I_A$ – funcţie sumabilă.

Definiţie 3.4.2. *Dacă $A \subset X$ mulţime măsurabilă şi $f \cdot I_A$ este o funcţie sumabilă pe X, integrala Lebesgue de la funcţia f pe mulţimea A se defineşte prin*

$$\int\limits_A f(x)d\mu(x) = \int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \cdot I_A d\mu.$$

Teorema 3.4.2. *(linearitatea integralei) Fie f, g – funcţii sumabile nenegative, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}_+$. Atunci $\alpha f + \beta g$ este sumabilă şi* $\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$.

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [1]. Fie f – funcţie nenegativă, sumabilă pe X şi fixată, $A \in \mathfrak{A}$ şi $\nu(A) = \int\limits_A f d\mu$.

Teorema 3.4.3. *(continuitatea absolută a integralei) Funcţia de mulţimi ν este absolut continuă în raport cu măsura μ.*

Demonstraţie. Din definiţia 3.4.1 rezultă ca pentru $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$0 \leq \int\limits_X (f - f_N)d\mu = \int\limits_X f d\mu - \int\limits_X f_N d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Punem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N}$. Atunci pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$ cu $\mu(A) < \delta$ avem

$$0 \leq \nu(A) = \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X (f - f_N + f_N)d\mu = \int\limits_X (f - f_N)d\mu + \int\limits_X f_N d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon.$$

Teorema 3.4.4. *Funcţia de mulţimi ν este măsură.*

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [1].

5. Integrala funcţiilor nemărginite

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură finită, f – funcţia numerică măsurabilă, a.p.t. finită, definită pe X,

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$

$$f_-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Este clar, că $f_+(x), f_-(x)$ sunt funcţii măsurabile nenegative, a.p.t. finite şi

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \qquad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \tag{72}$$

Definiţie 3.5.1. *Funcţia f se numeşte integrabilă în sens Lebesgue (sumabilă), dacă ambele funcţii $f_+(x)$ şi $f_-(x)$ sunt integrabile Lebesgue. În aşa caz integrala Lebesgue se defineşte prin*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu.$$

Teorema 3.5.1. *Funcţia măsurabilă f este sumabilă, dacă şi numai dacă $|f|$ este sumabilă. În aşa caz*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie f – funcţie sumabilă. Rezultă funcţiile nenegative f_+ şi f_- sunt funcţii sumabile. Atunci, conform linearităţii integralei Lebesgue de la funcţii nenegative, funcţia $|f| = f_+ + f_-$ este sumabilă şi

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu.$$

Suficienţa. Fie $|f|$ – funcţie sumabilă. Cum $f_+(x) \leq |f(x)|, \;\; f_-(x) \leq |f(x)|$, conform teoremei 3.4.1, funcţiile f_+ şi f_- sunt sumabile, prin urmare şi f este sumabilă. În plus,

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \left|\int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu\right| \leq \int\limits_X f_+ d\mu + \int\limits_X f_- d\mu = \int\limits_X |f| d\mu.$$

Definiţie 3.5.2. *Fie $A \subset X$ mulţime măsurabilă, funcţia $f \cdot I_A$ sumabilă pe X. Atunci funcţia $f \cdot I_A$ se numeşte sumabilă pe A şi*

$$\int\limits_A f d\mu \overset{def}{=} \int\limits_X f \cdot I_A d\mu.$$

Şi în cazul integralei Lebesgue de la funcţii nemărginite rămân valabile teoremele despre linearitatea integralei Lebesgue, continuitatea absolută a integralei şi σ-aditivitatea integralei.

6. Trecerea la limită sub semnul integralei Lebesgue

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură finită.

Teorema 3.6.1. *(Lebesgue) Fie:*

1) şirul (f_n) de funcţii sumabile convergente în măsură la funcţia f;

2) există aşa o funcţie sumabilă nenegativă g, astfel încât $\forall n \in N: \; |f_n(x)| \leq g(x)$.

Atunci f este sumabilă şi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Demonstraţie. Cum $f_n \overset{\mu}{\to} f$, conform teoremei Riesz există un subşir $(f_{n_k}) : f_{n_k} \to f \; (mod \; \mu)$. Din condiţia 2) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$. Trecând la limită cu $k \to \infty$, se obţine $|f(x)| \leq g(x) \; (mod \; \mu)$ şi prin urmare, f este sumabilă.

Pentru $\forall \delta > 0$ considerăm mulţimile

$$E_n(\delta) = \{|f_n - f| \geq \delta\}, \quad F_n(\delta) = \{|f_n - f| < \delta\}.$$

Atunci

$$\sigma_n = \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{E_n(\delta)} |f_n - f| d\mu + \int_{F_n(\delta)} |f_n - f| d\mu \qquad (73)$$

Cum

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x) \ (mod\ \mu)$$

din (73) se obţine

$$\sigma_n \leq 2 \int_{E_n(\delta)} g d\mu + \delta\mu(X). \qquad (74)$$

Pentru $\varepsilon > 0$ punem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mu(X)}$. Cum integrala Lebesgue este absolut continue în raport cu măsura μ, vom găsi aşa un $\tau > 0$ astfel încât din $\mu(E) < \tau$ să avem $\int_E g d\mu < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Cum $f_n \xrightarrow{\mu} f$, rezultă că $\exists n_0 \in N$ astfel încât pentru $n \geq n_0$

$$\mu(E_n(\delta)) = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\}) < \tau.$$

Atunci pentru $n \geq n_0$ din (74) rezultă

$$\sigma_n < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică, $\sigma_n \to 0,\ n \to \infty$.

Teorema 3.6.2. *(lema Fatou) Fie (f_n) un şir de funcţii măsurabile nenegative, ce converge în măsură la funcţia f. Atunci*

$$\int_X f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [2].

Teorema 3.6.3. *(Bepppo Levi) Fie (f_n) un şir crescător de funcţii măsurabile nenegative şi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \qquad (75)$$

Demonstraţie. Cum (f_n) – şir crescător, rezultă $\left(\int\limits_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ – şir crescător, prin urmare, există limita (finită sau infinită) a acestui şir numeric. Conform lemei Fatou

$$\int\limits_X f d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu. \tag{76}$$

În plus, cum $f_n(x) \leq f(x)$ avem

$$\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu,$$

de unde trecând la limită cu $n \to \infty$, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu. \tag{77}$$

Din (76) şi (77) rezultă (75).

7. Integrala Lebesgue-Stieltjes

Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continue la stânga. Atunci g defineşte pe σ-algebra mulţimilor boreliene ale segmentului $[a,b]$ o măsură finită – μ_g – măsura Lebesgue-Stieltjes. Integrala Lebesgue generată de această măsură se numeşte integrala Lebesgue-Stieltjes şi se notează

$$\int\limits_a^b f(x) d\mu_g(x) = \int\limits_a^b f d\mu_g = \int\limits_a^b f(x) dg(x).$$

În particular, dacă g este funcţia salturilor, μ_g – măsură discrită şi integrala Lebesgue-Stieltjes se reduce la suma

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) = \sum f(c_k) \triangle_g (c_k),$$

unde c_k – punctele de discontinuitate ale funcţiei g, $\triangle_g(c_k)$ – saltul funcţiei g în c_k. Dacă funcţia $g \in BV([a,b])$, continuă la stânga, atunci $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, unde φ, ψ – funcţii crescătoare, continue la stânga şi integrala Lebesgue-Stieltjes de la funcţia f se defineşte prin egalitatea

$$\int\limits_a^b f(x) dg(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_a^b f(x) d\varphi(x) - \int\limits_a^b f(x) d\psi(x).$$

Teorema 3.7.1. *Fie* $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *Atunci există integrala Riemann-Stieltjes de la funcţia* g, $(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *şi are loc egalitatea*

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x) = (\mathcal{L}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Demonstraţie. A se vedea, de exemplu, [1].

Bibliografie

[1] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – Киев: Выща школа, 1990.

[2] Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла. – Киев: Выща школа, 1989.

[3] П.Халмош. Теория меры. – М.: Иностранная литература, 1953.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин В.С. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

[5] Ж.Невч. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1965.

[6] Г.П.Толстов. Мера и интеграл. – М.: Наука, 1976.

[7] Городецкий В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Выща школа, 1990.

[8] Натансон И. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.

[9] Партасарати К. Введение теорию вероятностей и теории мер. – М.: Мир, 1983.

[10] W.Rudin. Analiza reală şi complexă. – Bucureşti: Theta, 1998.

[11] Nicolescu M. Analiza Matematică III. – Bucureşti: Ed. Tehnică, 1960.

[12] M. Şabac. Analiza reală. – Bucureşti, 1988.

[13] Chicu G. Probabilităţi şi procese stocastice. – Bucureşti, 1979.