CAPITOLUL 2

FUNCŢII MĂSURABILE

1. Funcţii măsurabile

Funcţii măsurabile ocupă un rol important în teoria măsurii şi integrării. Ele sunt definite pe spaţii măsurabile.

Definiţie 2.1.1. *Vom numi spaţiu măsurabil perechea $(X, \mathfrak{A})$, unde X – spaţiu, $\mathfrak{A}$ – o σ-algebră de mulţimi din $\mathcal{P}(X)$. Multimea $A \in X$ cu $A \in \mathfrak{A}$ se numeşte mulţime măsurabilă sau $\mathfrak{A}$-măsurabilă.*

Exemplul 2.1.1. Fie $A = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ-algebra tuturor mulţimilor boreliene de pe axa reală. În spaţiul măsurabil $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mulţimi măsurabile sunt mulţimi boreliene din $\mathbb{R}$, aceste mulţimi se mai numesc măsurabile în sens Borel.

Definiţie 2.1.2. *Vom numi spaţiu cu măsură tripletul $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, unde X – spaţiu, $\mathfrak{A}$ – o σ-algebră de mulţimi din $\mathcal{P}(X)$ şi μ – măsură definită pe σ-algebra $\mathfrak{A}$.*

Exemplul 2.1.2. Fie $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ – spaţiul măsurabil definit în exemplul 2.1.1, m – măsura Lebesgue pe axa reală. Atunci $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ – spaţiu cu măsură completă şi σ-finită.

Definiţie 2.1.3. *Fie $(X, \mathfrak{A})$ şi $(X_1, \mathfrak{A}_1)$ spaţii măsurabile şi $f : X \to X_1$ o funcţie. Vom spune că funcţia f este măsurabilă, dacă proimaginea oricărei mulţimi $\mathfrak{A}_1$-măsurabile este o mulţime $\mathfrak{A}$-măsurabilă, adică pentru $\forall A_1 \in \mathfrak{A}_1$ avem $f^{-1}(A_1) \in \mathfrak{A}$.*

Observaţie 2.1.1. Vom considera în continuare funcţii numerice $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, unde $(X, \mathfrak{A})$ spaţiu cu măsură, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ – dreapta reală încheiată. Mulţimi măsurabile în $\overline{\mathbb{R}}$ se consideră mulţimile boreliene. Prin urmare, o funcţie numerică este măsurabilă, daca proimaginea oricărei mulţimi boreliene $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ este o mulţime măsurabilă, adică $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$.

În cazul unei funcţii numerice definiţia funcţiei măsurabile poate fi dată mai simplu. Vom nota $\{f < c\}$ mulţimea $X_c = \{x \in X \mid f(x) < c\}, Y_c = \{f \geq c\} = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$, $Z_c = \{f > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c\}, W_c = \{f \leq c\} = \{x \in X \mid f(x) \leq c\}$.

Teorema 2.1.1. *Funcţia numerică f, definită pe spaţiul măsurabil $(X, \mathfrak{A})$ este măsurabilă dacă şi numai dacă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{f < c\}$ este măsurabilă.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ intervalul $I = (-\infty, c)$ este mulţime boreliană, rezultă $f^{-1}(I) = \{f < c\}$ este mulţime măsurabilă (f-măsurabilă).

Suficienţa. Cum pentru $\forall f : X \to X_1$ şi $\forall A, B, A_i \subset X_1$ au loc egalităţile:

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i), \tag{51}$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \tag{52}$$

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}. \tag{53}$$

Rezultă că pentru orice funcţie f definită pe un spaţiu măsurabil, mulţimile, proimaginile cărora sunt măsurabile, formează o σ-algebră.

Fie $\{f < c\} \in \mathfrak{A}$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Vom arăta că f – funcţie măsurabilă. Pentru $\forall\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{R}$ cu $c_1 < c_2$ din (52) rezultă:

$\{c_1 \leq f < c_2\} = f^{-1}([c_1, c_2)) = f^{-1}((-\infty, c_2)\setminus(-\infty, c_1)) = f^{-1}((-\infty, c_2))\setminus f^{-1}((-\infty, c_1)) =$
$= \{f < c_2\} \setminus \{f < c_1\}$,
adică $\{c_1 \leq f < c_2\} \in \mathfrak{A}$.

Aşadar familia de submulţimi din $\mathbb{R}$, proimaginile cărora sunt măsurabile, este o σ-algebră ce conţine toate intervalele de forma $[c_1, c_2)$, şi, prin urmare, conţine toate mulţimile boreliene.

Teorema 2.1.2. *Afirmaţia teoremei 2.1.1 rămâne valabilă, dacă mulţimea X_c se înlocuieşte cu oricare din mulţimile Y_c, Z_c sau W_c.*

Demonstraţie. Fie pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea X_c este măsurabilă. Atunci $Y_c = X \setminus X_c$ este măsurabilă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ ca diferenţă a două mulţimi măsurabile. Considerăm acum mulţimea W_c. Cum $W_c = \{f \leq c\} = \bigcap\limits_n \{f < c + \frac{1}{n}\}$, rezultă W_c măsurabilă pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ ca intersecţie numărabilă de mulţimi măsurabile. Măsurabilitatea mulţimii Z_c rezultă din egalitatea $Z_c = X \setminus W_c$.

Teorema 2.1.3. *Funcţia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este măsurabilă atunci şi numai atunci când pentru $\forall r \in \mathbb{Q}$ mulţimea $\{f < r\}$ este măsurabilă.*

Exemplul 2.1.3. Fie $(X, \mathfrak{A})$ un spaţiu măsurabil, $A \subset X$,
$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in A, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \notin A, \end{cases}$ – indicatorul mulţimii A. Cum pentru $\forall c \in R$

$$\{I_A < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ A, & \text{dacă} \quad 0 < c \leq 1, \\ X, & \text{dacă} \quad c > 1, \end{cases}$$

rezultă că $I_A(x)$ este funcţie măsurabilă, dacă şi numai dacă A este mulţime măsurabilă.

Exemplul 2.1.4. Fie $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} = \mathcal{B}([0,1))$, $D(x)$ – restricţia funcţiei Dirichlet pe [0,1], $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Cum

$$\{D < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ \mathbb{Q} \cap [0,1], & \text{dacă} \quad 0 < c \leq 1, \\ [0,1], & \text{dacă} \quad c > 1, \end{cases}$$

rezultă că $D(x)$ este funcţie măsurabilă.

2. Proprietăţile funcţiilor măsurabile

Fie $(X, \mathfrak{A})$ un spaţiu măsurabil. Vom nota prin $\mathcal{M}(X)$ mulţimea funcţiilor măsurabile $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Vom stabili în continuare proprietăţile funcţiilor măsurabile.

Teorema 2.2.1. *Fie $f \in \mathcal{M}(X)$, $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie măsurabilă în sens Borel. Atunci funcţia compusă $h(x) = g(f(x))$ este măsurabilă pe X.*

Teorema 2.2.2. *Dacă $f(x) = a = const$ pe X, atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

Teorema 2.2.3. *Fie $\{f, g\} \subset \mathcal{M}(X), a \in \mathbb{R}$. Atunci*
a) $a \cdot f \in \mathcal{M}(X)$, *b)* $|f| \in \mathcal{M}(X)$, *c)* $f^2 \in \mathcal{M}(X)$, *d)* $f + g \in \mathcal{M}(X)$,
e) $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$, *f)* $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$ *(în condiţia* $g(x) \neq 0, \ \forall x \in X$*),*
g) $\max\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$, *h)* $\min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

Demonstraţie. a) Fie $a \neq 0$. Atunci, cum

$$\{a \cdot f < c\} = \begin{cases} \left\{f < \dfrac{c}{a}\right\}, & \text{dacă} \quad a > 0, \\ \left\{f > \dfrac{c}{a}\right\}, & \text{dacă} \quad a < 0, \end{cases}$$

rezultă $f \in \mathcal{M}(X)$. Dacă $a = 0$, în mod trivial, $f \in \mathcal{M}(X)$.

b) Măsurabilitatea funcţiei $|f|$ rezultă din relaţia

$$\{|f| < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ \{f < c\} \cap \{f > -c\}, & \text{dacă} \quad c > 0. \end{cases}$$

c) Măsurabilitatea funcţiei f^2 rezultă din relaţia

$$\{f^2 < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{dacă} \quad c \leq 0, \\ |f| < \sqrt{c}, & \text{dacă} \quad c > 0, \end{cases}$$

şi proprietatea b).

d) Fie $\mathbb{Q} = (r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – şirul numerelor raţionale. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\{f + g < c\} = \bigcup_k (\{f < r_k\} \cap \{g < a - r_k\}),$$

rezultă $f + g \in \mathcal{M}(X)$.

e) Cum

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right),$$

rezultă $f \cdot g \in \mathcal{M}(X)$.

f) Fie $\forall x \in X \;\; g(x) \neq 0$. Cum $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ este suficient să arătăm că $\dfrac{1}{g} \in \mathcal{M}(X)$. Dar

$$\left\{\frac{1}{g} < c\right\} = \begin{cases} \{g < 0\}, & \text{dacă} \quad c = 0, \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{a}\}, & \text{dacă} \quad c > 0, \\ \{g < 0\} \cap \{g > \frac{1}{a}\}, & \text{dacă} \quad c < 0, \end{cases}$$

rezultă $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)$.

g) Cum $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, rezultă $\max\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

h) Cum $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$, rezultă $\min\{f, g\} \in \mathcal{M}(X)$.

Teorema 2.2.4. *Fie $f_n : (X, \mathfrak{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de funcţii măsurabile. Atunci funcţiile $\sup\limits_n f_n, \inf\limits_n f_n, \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ sunt măsurabile.*

Demonstraţie. Cum $\{\sup\limits_n f_n \leq c\} = \bigcap\limits_n \{f_n \leq c\}$, rezultă $\sup\limits_n f_n \in \mathcal{M}(X)$. Atunci $\inf\limits_n f_n = -\sup(-f_n)$ este o funcţie măsurabilă. Din definiţie avem că $\varlimsup\limits_n f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{p\geq n} f_p$, $\varliminf\limits_n f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{p\geq n} f_p$ care sunt funcţii măsurabile conform celor demonstrate anterior.

3. Funcţii echivalente

În continuare com considera funcţii numerice definite pe un spaţiu cu măsură finită $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Definiţie 2.3.1. *O proprietate P are loc aproape peste tot (a.p.t.) (sau se verifică (mod μ)), dacă această proprietate se verifică mulţimea $X \setminus E$, unde $\mu(E) = 0$.*

Definiţie 2.3.2. *Două definiţii f şi g se numesc echivalente, dacă ele coincid a.p.t., adică $\mu(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0$.*

Notaţie: $f \sim g$ sau $f = g$ $(mod\ \mu)$.

Teorema 2.3.1. *Fie μ – măsură completă, $g \in \mathcal{M}(X)$ şi $f = g$ $(mod\ \mu)$. Atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

Demonstraţie. Din $g \in \mathcal{M}(X)$ rezultă că pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{g < c\}$ este măsurabilă. Cum $f = g$ $(mod\ \mu)$, rezultă că şi mulţimea $\{f < c\}$ este măsurabilă, deoarece mulţimile $\{f < c\}$ şi $\{g < c\}$ diferă printr-o submulţime de măsură nulă $\{f \neq g\}$, ce este măsurabilă, deoarece μ – măsură completă.

Teorema 2.3.2. *Relaţia de echivalenţă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă pe $\mathcal{M}(X)$.*

4. Şiruri de funcţii măsurabile

Vom considera diferite tipuri de convergenţă a funcţiilor măsurabile şi legăturile dintre ele. Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – un spaţiu cu măsură.

Vom spune că şirul de funcţii (f_n) converge punctual (notaţie $f_n \to f$) la funcţia f dacă $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorema 2.4.1. *Fie şirul de funcţii măsurabile (f_n) converge punctual la funcţia f. Atunci $f \in \mathcal{M}(X)$.*

Demonstraţie. Fie pentru orice $x \in X : \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\{f < c\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left\{ f_k < c - \frac{1}{m} \right\}$$

şi mulţimile $\left\{ f_k < c - \dfrac{1}{m} \right\}$ sunt măsurabile ($f_k \in \mathcal{M}(X)$), rezultă $\{f < c\}$ – mulţime măsurabilă şi $f \in \mathcal{M}(X)$.

Definiţie 2.4.1. *Vom spune că şirul de funcţii* (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $n \in \mathbb{N}$ *converge a.p.t. (sau după mod* μ*) la funcţia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*, dacă* $\exists E \in \mathfrak{A}$ *cu* $\mu(E) = 0$ *şi* $\forall x \in X \setminus E$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*. Notaţie* $f_n \overset{a.p.t.}{\longrightarrow} f$ *sau* $f_n \to f$ *(mod* μ*).*

Teorema 2.4.2. *Fie* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *un spaţiu cu măsură completă,* (f_n) *– un şir de funcţii măsurabile,* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ *şi* $f_n \to f$ *(mod* μ*). Atunci* $f \in \mathcal{M}(X)$*.*

Demonstraţie. Din $f_n \to f$ $(mod\ \mu)$ avem $f_n \to f$ pe $X \setminus E$, unde $E = \{x \in X | f_n \not\to f\}$ şi $\mu(E) = 0$. Cum pentru $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\{f < c\} = \{f < c\} \bigcap ((X \setminus E) \sqcup E) = \{x \in X \setminus E \mid f(x) < c\} \bigsqcup \{x \in X \cap E \mid f(x) < c\}$$

pe $X \setminus E$ funcţia f este măsurabilă conform teoremei 2.4.1 şi cum μ – măsură completă, $f \in \mathcal{M}(X)$.

Teorema 2.4.3. *(Egorov) Fie* (f_n) *un şir de funcţii măsurabile,* $f_n \to f$ *(mod* μ*),* $f \in \mathcal{M}(X)$*. Atunci pentru* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ *cu* $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ *şi pe* $X \setminus A_\varepsilon$ f_n *converge uniform la* f*.*

Demonstraţie. Fie $F \in \mathfrak{A}$, $\mu(F) = 0$ şi $\forall x \in X \setminus F$ $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$. Pentru fiecare $j \geq 1$ şi $k \geq 1$ considerăm mulţimile

$$E_{jk} \overset{def}{=} \bigcap_{i=j}^{\infty} \left\{ x \in X \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\} \in \mathfrak{A}.$$

Pentru fiecare $k \geq 1$ avem $E_{1k} \subset E_{2k} \subset ...$ şi $X \setminus F \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{jk}$. Prin urmare, $\overline{E}_{1k} \supset \overline{E}_{2k} \supset ...$ şi $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \overline{E}_{jk} \subset X \setminus F$. De aici, conform condiţiilor teoremei şi continuităţii măsurii

$$0 = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{E}_{jk}\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(\overline{E}_{jk}).$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din ultima egalitate avem

$$\forall k \geq 1 \quad \exists j(k,\varepsilon)\ :\ \mu(\overline{E}_{j(k,\varepsilon),k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Considerăm mulţimea

$$A_\varepsilon \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{E}_{j(k,\varepsilon),k} \in \mathfrak{A}$$

pentru care din σ-semiaditivitatea măsurii μ avem

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\overline{E}_{j(k,\varepsilon),k}) < \varepsilon.$$

Dacă $x \in X \setminus A_\varepsilon$, atunci $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{j(k,\varepsilon),k} \Rightarrow$

$$\forall k \geq 1 \qquad \sup_{x \in X \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in E_{j(k,\varepsilon),k}} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \qquad n \geq j(k,\varepsilon),$$

ce demonstrează converganţa uniformă a şirului f_n pe $X \setminus A_\varepsilon$.

Observaţie 2.4.1. Teorema Egorov nu are loc pentru măsuri ce primesc valoarea $+\infty$, chiar şi dacă ele sunt σ-finite.

Definiţie 2.4.2. *Fie funcţiile $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ măsurabile. Vom spune că şirul de funcţii f_n converge în măsură la funcţia f (notaţie $f_n \xrightarrow{\mu} f$, sau $\mu \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$), dacă* $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$

Teorema 2.4.4. *Dacă $f_n \xrightarrow{\mu} f$ şi $f_n \xrightarrow{\mu} g$, atunci $f = g$ (mod μ).*

Demonstraţie. Pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall \varepsilon > 0$ avem

$$\mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \mu\left(\{x \in X \ \big| \ |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X \ \middle| \ |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \longrightarrow 0, \quad (54)$$

$$n \to \infty$$

s-a folosit semiaditivitatea măsurii μ şi incluziunea $\{x \in X \ | \ |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \bigcup \left\{x \in X \ \middle| \ |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$

Cum

$$\{x \in X \ | \ f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in X \ \middle| \ |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

din (54) şi σ-semiaditivitatea măsurii μ rezultă

$$\mu(\{x \in X \ | \ f(x) \neq g(x)\}) = 0,$$

adică $f = g$ (mod μ).

Teorema 2.4.5. *(Lebesgue) Fie şirul de funcţii finite, măsurabile (f_n) a.p.t. converge la funcţia măsurabilă f. Atunci $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Demonstraţie. Fie $A = \{x \in X \ | \ f_n(x) \not\to f(x)\}$, conform condiţiilor teoremei $\mu(A) = 0$. Fie

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X \ | \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \quad R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon).$$

Uşor de verificat că mulţimile introduse sunt măsurabile. Avem $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \dots$.

Prin urmare, conform teoremei despre continuitatea măsurii

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = \mu(M). \tag{55}$$

Să arătăm că $M \subset A$. În adevăr, fie $x \notin A$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ şi pentru $\varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $\forall k \geq n \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, adică $x \notin E_k(\varepsilon)$, $\forall k \geq n$. Aşadar, $M \subset A$ şi cum $\mu(A) = 0$ şi $\mu(M) = 0$. Din (55) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = 0$ şi cum $E_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$ teorema este demonstrată.

Observaţie 2.4.2. 1) Observaţia 2.4.1 rămâne valabilă şi în cazul teoremei Lebesgue. 2) Din convergenţa în măsură, în general, nu rezultă convergenţa a.p.t. În acelaşi timp are loc:

Teorema 2.4.6. *(Riesz) Fie şirul de funcţii finite, măsurabile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în măsură la funcţia f. Atunci există subşir $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $f_{n_k} \to f$ (mod μ).*

5. Funcţii simple

Fie $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un spaţiu cu măsură.

Definiţie 2.5.1. *Funcţia numerică $f : X \to \mathbb{R}$, definită pe spaţiul măsurabil $(X, \mathfrak{A})$ se numeşte simplă, dacă ea primeşte un număr finit de valori distincte.*

Observaţie 2.5.1. a) Fie f o funcţie simplă cu $f(X) = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Considerăm mulţimile $A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\}$, $j = \overline{1,n}$. Atunci, cum $c_i \neq c_j$,

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j = X \tag{56}$$

şi

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathbf{1}_{A_j}(x), \quad x \in X. \tag{57}$$

b) Suma şi produsul a două funcţii simple este o funcţie simplă.

Teorema 2.5.1. *Funcţia simplă* (57) *este măsurabilă atunci şi numai atunci când toate mulţimile A_j sunt măsurabile.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $f \in \mathcal{M}(X)$, atunci fiecare din mulţimile $A_j = \{x \in X \mid f(x) = c_j\} = f^{-1}(\{c_j\})$ sunt măsurabile, ca proimagini ale mulţimilor boreliene $\{c_j\} \subset \mathbb{R}$.

Suficienţa. Cum fiecare din mulţimile A_j sunt măsurabile, $I_{A_j}(x)$ – este funcţie măsurabilă, $j = \overline{1, n}$, şi, prin urmare, şi $f \in \mathcal{M}(X)$ ca combinaţie liniară de funcţii măsurabile.

Teorema 2.5.2. *Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie măsurabilă definită pe spaţiu măsurabil $(X, \mathfrak{A})$. Atunci există un şir de funcţii simple măsurabile $(f_n)_n$ astfel încât*

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X.$$

Dacă funcţia f este mărginită pe X, atunci şirul (f_n) poate fi ales astfel încât

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad n \to \infty \text{ pe } X.$$

Dacă funcţia f este nenegativă pe X, atunci şirul $(f_n)_n$ poate fi ales crescător.

Demonstraţie. Iniţial vom demonstra teorema pentru funcţii nenegative. Fie $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in X$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{dacă } \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n}, \qquad k = 1, 2, ..., n \cdot 2^n, \\ n, & \text{dacă } f(x) \geq n. \end{cases} \tag{58}$$

Este evident că şirul $(f_n)_n$ este crescător şi că f_n este o funcţie simplă nenegativă (ea primeşte cel mult $n \cdot 2^n + 1$ valori). Din $f \in \mathcal{M}(X)$ şi (58) rezultă $f_n \in \mathcal{M}(X), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Vom demonstra că pentru $\forall x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x). \tag{59}$$

În adevăr, dacă $f(x) < +\infty$, pentru n destul de mari vom avea $f(x) < n$ şi atunci din (58) rezultă

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n},$$

şi, prin urmare, $f_n \to f$. Dacă $f(x) = +\infty$, atunci $f_n(x) = n$ şi iarăşi $f_n \to f$. Aşadar (59) are loc pentru funcţii nenegative.

Fie, în plus, funcţia f este mărginită, adică $0 \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in X$. Atunci, pentru $n > M$ din (58) rezultă,

$$\forall x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n},$$

de unde $f_n \rightrightarrows f$ pe X. Aşadar, pentru funcţii nenegative teorema este demonstrată.

Fie acum f – funcţie măsurabilă arbitrară. Considerăm funcţiile f_+ şi f_-:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2},$$

$$f_-(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Cum f_+ şi f_- sunt funcţii măsurabile nenegative, teorema pentru ele este demonstrată. Rămâne de observat că $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$.