A. Corlat

TEORIA MĂSURII

ŞI

INTEGRALA LEBESGUE

Note de curs

Chişinău – 2004

INTRODUCERE

Sunt prezentate ideile de bază ale cursului "Teoria măsurii şi integrala Lebesgue" ţinut studenţilor anului III, facultatea Matematică şi Informatică, specialităţile "Matematică" şi "Matematică şi informatică". În mare măsură cursul se sprijină pe manualele [1], [2], [10], [11].

CAPITOLUL 1

MĂSURĂ

1. Algebre şi σ-algebre

Fie X – o mulţime abstractă, numită în continuare spaţiu. Vom nota cu $\mathcal{P}(X)$ – mulţimea tuturor submulţimilor (părţilor) spaţiului X, $\varnothing$ – mulţimea vidă.

Definiţie 1.1.1. *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte inel (clan), dacă ea este închisă în raport ce operaţiile de reuniune şi diferenţă a două mulţimi, adică:*

$$\forall \{A, B\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{K},\ A \setminus B \in \mathcal{K}.$$

Observaţie 1.1.1. Fie $\mathcal{K}$ – inel. Cum pentru orice $A, B \in \mathcal{K}$:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B),$$

rezultă, că inelul $\mathcal{K}$ este închis şi în raport cu operaţiile de diferenţă simetrică şi intersecţie a două mulţimi. Totodată

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \quad A \setminus B = (A \triangle B) \cap A,$$

adică putem defini inelul şi în felul următor.

Definiţie 1.1.2. *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte inel, dacă ea este închisă în raport ce operaţiile de intersecţie şi diferenţă simetrică a două mulţimi.*

Observaţie 1.1.2. Fie $\mathcal{K}$ – inel. Din definiţia lui rezultă nemijlocit următoarele proprietăţi:

1. $\varnothing \in \mathcal{K}$;

2. $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{K},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K},\ \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}.$

Exemplul 1.1.1. **a)** Fie $A \subset X,\ A \neq \varnothing,$ atunci $\mathcal{K} = \{\varnothing, A\}$ – inel (cel mai "sărac" inel).

b) $\mathcal{K} = \mathcal{P}(X)$ – inel (cel mai "bogat" inel).

c) Fie $X = \mathbb{R}$. $\mathcal{K} = \{A \subset X \mid cardA < \infty\}$ – inel.

d) Fie $X = \{a, b, c\}$, atunci $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ – inel.

Teorema 1.1.1. *Orice intersecţie de inele este un inel.*

Demonstraţie. Fie $\{\mathcal{K}_i\}_{i \in I}$ o familie de inele, şi $\mathcal{K} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{K}_i$. Fie $A \in \mathcal{K}$ si $B \in \mathcal{K}$. Atunci $A \in \mathcal{K}_i$ şi $B \in \mathcal{K}_i$ oricare ar fi $i \in I$. Cum pentru orice $i \in I$, $\mathcal{K}_i$ – inel, rezultă că odată cu A şi B avem $A \bigcup B \in \mathcal{K}_i$, $A \setminus B \in \mathcal{K}_i$ oricare ar fi $i \in I$. Prin urmare, $A \bigcup B \in \mathcal{K}$, $A \setminus B \in \mathcal{K}$ şi $\mathcal{K}$ este inel.

Teorema 1.1.2. *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unic un inel $\mathcal{K}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

1. $S \subset \mathcal{K}(S)$;

2. dacă $\mathcal{B}$ – inel şi $S \subset \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{B}$.

Demonstraţie. Există inele, ce conţin S, de exemplu, $\mathcal{P}(X)$. Considerem intersecţia tuturor inelelor, ce conţin S:

$$\mathcal{K}(S) = \bigcap_{K \in \Sigma} \mathcal{K}, \tag{1}$$

unde Σ – mulţimea tuturor inelelor ce conţin familia S. Conform teoremei 1.1.1, $\mathcal{K}(S)$ este inel şi conţine familia S. Cum $\mathcal{K}(S)$ este intersecţia tuturor inelelor ce conţin S, $\mathcal{K}(S)$ se conţine în fiecare dintre aceste inele. Din (1) rezultă şi unicitatea lui $\mathcal{K}(S)$.

Observaţie 1.1.3. 1. Inelul (1) se numeşte inel generat de familia S.

2. Demonstraţia teoremei 1.1.2 nu este constructivă. Totodată indicăm următorul procedeu de obţinere a inelului generat de S: $\mathcal{K}(S)$ este familia de mulţimi, ce se obţine din mulţimile familiei S ca rezultat al aplicării unui număr finit de operaţii de reuniune şi diferenţa (toate posibile). De exemplu, fie $X = \{a, b, c\}, S = \{\{a\}, \{b\}\}$. Atunci $\mathcal{K}(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

În continuare vom folosi adesea următoarea lema:

Lema 1.1.1. *Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ un şir arbitrar de mulţimi din inelul $\mathcal{K}$. Atunci există mulţimile $B_1, B_2, ..., B_n, ..., \quad \forall i \in N \quad B_i \in K$ ce posedă proprietăţile:*

1. $B_i \subset A_i, \forall i \in \mathbb{N}$;

2. $B_i \cap B_j = \varnothing, \quad i \neq j$;

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Demonstraţie. Şirul de mulţimi $(B_n)_n$ va fi construit astfel:

$B_1 = A_1$,

$B_2 = A_2 \setminus A_1$,

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$,

...

$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j \right)$,

...

Din modul de definire a şirului $(B_n)_n$ rezultă nemijlocit că: a) $\forall i \in \mathbb{N} : B_j \in \mathcal{K}$ şi b) $\forall i \in \mathbb{N} : B_j \subset A_j$.

Să demonstrăm 2. Fie $B_j = A_j \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} A_i \right)$, $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i \right)$ şi $j < k$. Cum $B_k = A_k \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_j} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}}$ si $B_k \cap B_j \subset B_k \cap A_j$, rezultă $B_k \cap B_j = \varnothing$.

Să demonstrăm 3. Cum $A_j \supset B_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j. \tag{2}$$

Fie $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Atunci $\exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n$. Notăm cu n_0 cel mai mic număr natural cu proprietatea: $x \in A_{n_0}$ şi $x \notin A_1, x \notin A_2, ..., x \notin A_{n_0-1},$. Rezultă $x \in B_{n_0}$ şi prin urmare $x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Din faptul că $n_0 = 1$, rezultă $x \in B_1$ şi iar $x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$. Aşadar

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subset \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j$.

Definiţie 1.1.3. *Inelul de mulţimi $\mathcal{K}$ se numeşte σ-inel (clan borelian de mulţimi) dacă împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ el contine şi reuniunea lor, adică*

$$\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

Definiţie 1.1.4. *Inelul de mulţimi $\mathcal{K}$ se numeşte δ-inel, dacă împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ el conţine şi intersecţia lor, adică*

$$\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

Teorema 1.1.3. *Orice σ-inel este şi δ-inel.*

Observaţie 1.1.4. Afirmaţia reciprocă nu este justă.

Exemplul 1.1.2. a) $\mathcal{P}(X)$ atât σ-inel cât şi δ-inel.

b) Familia tuturor mulţimilor mărginite ale spaţiului euclidian n-dimensional este δ-inel, dar nu este σ-inel (reuniunea numărabilă de mulţimi mărginite nu numaidecât este o mulţime mărginită).

c) Familia formată din submulţimile cel mult numărabile ale spaţiului X şi din complementarele lor constituie un σ-inel.

Teorema 1.1.4. *Orice intersecţie de σ-inele este σ-inel.*

Teorema 1.1.5. *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unic σ-inelul σ-$\mathcal{K}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

1. $S \subset \sigma$-$\mathcal{K}(S)$;

2. dacă B – σ-inel şi $S \subset B$, atunci σ-$\mathcal{K}(S) \subset B$.

σ-$\mathcal{K}(S)$ se numeşte σ-inel denerat de familia S.

Demonstraţiile teoremelor 1.1.4 şi 1.1.5 sunt similare demonstraţiilor teoremelor 1.1.1 şi 1.1.2 respectiv.

Definiţie 1.1.5. *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte algebră (corp) dacă ea este închisă în raport cu operaţiile de reuniune a două mulţimi şi complementară a mulţimii, adică*

1. $\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathfrak{A}$;

2. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathfrak{A}$.

Din definiţie rezultă următoarele consecinţe:

1. $X \in \mathfrak{A}$;

2. $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$ (prin inducţie);

3. $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$ (în adevăr, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}}$);

4. $\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathfrak{A}$.

Exemplul 1.1.3. **a)** Familiile $\{\varnothing, X\}$ şi $\mathcal{P}(X)$ sunt cele mai simple exemple de algebre.

b) Fie $X = \{a, b, c\}$. $\mathfrak{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ – algebră.

c) Orice inel $\mathcal{K}$ cu proprietatea $X \in \mathcal{K}$ este algebră.

Teorema 1.1.6. *Orice intersecţie de algebre este algebră.*

Teorema 1.1.7. *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unică algebra $\mathfrak{A}(S)$ cu următoarele proprietăţi:*

1. $S \subset \mathfrak{A}(S)$;

2. dacă $\mathfrak{A}$ – algebră şi $S \subset \mathfrak{A}$, atunci $\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}$.

Algebra $\mathfrak{A}(S)$ se numeşte algebră generată de familia S.

Definiţie 1.1.6. *Algebra de mulţimi $\mathfrak{A}$ se numeşte σ-algebră, dacă ea este σ-inel, adică împreună cu orice şir de mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{A}$ se conţine şi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Definiţie 1.1.7. *Algebra de mulţimi $\mathfrak{A}$ se numeşte δ-algebră, dacă este δ-unel.*

Observaţie 1.1.5. Orice σ-algebră este δ-algebră si orice δ-algebră este σ-algebră.

Teorema 1.1.8. *Orice intersecţie de σ-algebre este σ-algebră.*

Teorema 1.1.9. *Pentru orice familie nevidă $S \subset \mathcal{P}(X)$ există şi este unică σ-algebra σ-$\mathfrak{A}(S)$ cu proprietăţile:*

1. $S \subset \sigma$-$\mathfrak{A}(S)$;

2. dacă $\mathfrak{A}$ – σ-algebră şi $S \subset \mathfrak{A}$, atunci σ-$\mathfrak{A}(S) \subset \mathfrak{A}$.

Sigma-algebra σ-$\mathfrak{A}(S)$ se numeşte σ-algebră generată de familia S.

Exemplul 1.1.4. a) $\mathcal{P}(X)$ – σ-algebră.

b) Fie $\mathfrak{A} = \{B \subset X \mid$ cel puţin una din multimile $B, \overline{B}$ este cel mult numarabilă$\}$. $\mathfrak{A}$ – σ-algebră.

Definiţie 1.1.8. *Şirul de mulţimi $\{A_n\}$ se numeşte crescător (descrescător), dacă $A_n \subset A_{n+1} \quad (A_n \supset A_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Prin definiţie limita unui şir crescător $\{A_n\}$ (descrescător $\{B_n\}$) este $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$. Şirurile crescătoare şi descrescătoare se numesc şiruri monotone.

Definiţie 1.1.9. *O colecţie nevidă de submulţimi $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ se numeşte familie monotonă, dacă împreună cu orice şir monoton de mulţimi $\{A_n\}$ ea conţine şi $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.*

Exemplul 1.1.5. a) $\mathcal{P}(X)$ – familie monotonă de mulţimi.

b) Orice σ-inel $\mathfrak{M}$ este familie monotonă de mulţimi. În adevăr, odată cu orice şir de mulţimi (nu numaidecât monoton) σ-inelul $\mathfrak{M}$ conţine şi reuniunile şi intersecţiile numărabile ale lor.

Teorema 1.1.10. *Dacă inelul $\mathcal{K}$ este familie monotonă, atunci el este σ-inel.*

Demonstraţie. Fie $\{A_n\}$ un şir arbitrar de mulţimi din inelul $\mathcal{K}$, $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i,\ k \in \mathbb{N}$. Cum $\mathcal{K}$ – inel, rezultă $B_k \in \mathcal{K},\ \forall k \in \mathbb{N}$. Şirul $\{B_k\}$ este un şir crescător de mulţimi din $\mathcal{K}$ şi cum $\mathcal{K}$ – familie monotonă, rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} B_k \in \mathcal{K}$. Ramâne de observat că

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{k\to\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k \in \mathcal{K}.$$

Teorema 1.1.11. *Fie $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ – inel. Atunci σ-inelul $\sigma(\mathcal{K})$ generat de inelul $\mathcal{K}$ şi familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ generată de inelul $\mathcal{K}$, coincid.*

Demonstraţie. Cum σ-inelul $\sigma(\mathcal{K})$ este familie monotonă (exemplul 1.1.5 b)) avem $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K})$.

Să demonstrăm că $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel, atunci comform teoremei precedente $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – σ-inel ce conţine $\mathcal{K}$ şi, prin urmare, $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ cu ce demonstraţia teoremei va fi încheiată.

Demonstraţia afirmaţiei $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel o vom petrece în câteva etape.

1. Fie $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ şi $L(B) = \{A \subset X \mid \{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})\}$. Din simetria condiţiilor impuse se observă echivalenţa $A \in L(B) \Leftrightarrow B \in L(A)$.

2. $L(B)$ – familie monotonă. În adevăr, fie $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ un şir crescător de mulţimi din $L(B)$ şi $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Cum

a) $A \cup B = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \bigcup B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \cup B) = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \cup B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$, deoarece $\{A_j \cup B\}_{j\in\mathbb{N}}$ este un şir crescător de mulţimi din familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Similar

b) $A \setminus B = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) \setminus B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus B) = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n \setminus B) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$;

c) $B \setminus A = B \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (B \setminus A_j) = \lim\limits_{n\to\infty} (B \setminus A_n) \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$, deoarece $\{B \setminus A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de mulţimi din familia monotonă $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Prin urmare, $A \in L(B)$.

Similar, dacă $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...,\quad A_j \in L(B) \quad \forall j \in \mathbb{N}$, atunci

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L(B).$$

Aşadar $L(B)$ – clasă monotonă.

3. Fie $B \in \mathcal{K}$. Atunci $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$. În adevăr, cum $\mathcal{K} \subset L(B)$ (dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci $\{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathcal{K}$ şi cu atât mai mult $\{A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A\} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{K})$) rezultă $L(B)$ – familie monotonă ce conţine $\mathcal{K}$ şi $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$.

4. Fie $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Atunci $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$. În adevăr, fie $A \in \mathcal{K}$. Conform p.3, $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(A)$. Cum $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ avem $B \in L(A)$ şi conform p.1 $A \in L(B)$. Aşadar $\mathcal{K} \subset L(B)$ şi, prin urmare, $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$.

5. $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ – inel. Fie $A, B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$. Cum $B \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ conform p.4 $\mathfrak{M}(\mathcal{K}) \subset L(B)$ şi în particular, $A \in L(B)$.

2. Funcţii de mulţimi

Fie X – spaţiu, $H \subset \mathcal{P}(X)$ – o colecţie nevidă de submulţimi.

Definiţie 1.2.1. *Aplicaţia $\mu : H \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie de mulţimi.*

Definiţie 1.2.2. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte nenegativă, dacă $\forall A \in H$: $\mu(A) \geq 0$.*

Definiţie 1.2.3. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte monotonă, dacă $\forall \{A, B\} \subset H$ cu $A \subset B$, avem $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

Definiţie 1.2.4. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte aditivă (finit aditivă), dacă $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset H$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in H$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$: $\mu\left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.*

Definiţie 1.2.5. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte semiaditivă (finit semiaditivă), dacă $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset H$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in H$: $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.*

Definiţie 1.2.6. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte σ-aditivă (numărabil aditivă), dacă $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset H$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$: $\mu\left(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Definiţie 1.2.7. *Funcţia de mulţimi μ se numeşte σ-semiaditivă (numărabil semiaditivă), dacă $\forall \{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset H$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$: $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Definiţie 1.2.8. *Funcţia de mulţimi $\mu : H \to (-\infty; +\infty]$ se numeşte finită, dacă $\forall A \in H : \mu(A) < +\infty$.*

Definiţie 1.2.9. *Funcţia de mulţimi $\mu : H \to (-\infty; +\infty]$ se numeşte σ-finită, dacă există $\{A_n\} \subset H : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = H$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(A_n) < +\infty$.*

Definiţie 1.2.10. *Fie $\mu : H \to \mathbb{R}$, $A \subset H$. Funcţia de mulţimi $\mu\big|_A : A \to \mathbb{R}$ se numeşte restricţie a funcţiei μ pe A (iar μ se numeşte prelungire a funcţiei $\mu\big|_A$ pe H), dacă $\forall B \in A$: $\mu(B) = \mu\big|_A(B)$.*

3. Notiunea de măsură. Proprietăţi elementare

Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o algebră şi $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe algebră $\mathfrak{A}$.

Definiţie 1.3.1. *Funcţia $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ se numeşte măsură, dacă ea este nenegativă şi σ-aditivă.*

Observaţie 1.3.1. Din definiţia 1.3.1 rezultă:

1. măsura este o funcţie aditivă de mulţimi;

2. $\mu(\varnothing) = 0$.

Exemplul 1.3.1. Fie $X \neq \varnothing,\ x_0 \in X$. Aplicaţia $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$, definită astfel

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A, \end{cases}$$

pentru $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, este o măsură (măsura Dirac).

Exemplul 1.3.2. Fie X un spaţiu arbitrar, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – un şir fixat de puncte distincte din X, $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ – un şir de numere nenegative cu $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < +\infty$, $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi definită pe σ-algebra $\mathcal{P}(X)$ în felul următor:

$$\mu(A) = \sum_{j: x_j \in A} \mu_j, \quad \forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \mu(\varnothing) = 0.$$

Funcţia μ este o măsură, ce se numeşte măsură discretă.

În adevăr: a) nenegativitatea este evidentă;

b) σ-aditivitatea: fie $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathcal{P}(X)$ cu $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$. Cum termenii unei serii absolut convergente pot fi grupaţi şi permutaţi:

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{k: x_k \in \bigcup\limits_j A_j} \mu_k = \sum_{\bigcup\limits_j \{k | x_k \in A_j\}} \mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k: x_k \in A_j} \mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Observaţie 1.3.2. Sensul fizic al măsurii discrete este repartiţia punctuală a maselor.

Exemplul 1.3.3. Orice măsură μ cu $\mu(X) = 1$ se numeşte probabilistică. Măsura Dirac este o măsură probabilistică, măsura discretă este probabilistică, dacă $\sum\limits_i \mu_i = 1$.

Proprietăţi 1.3.1.

1. Măsura este o funcţie monotonă de mulţimi.

În adevăr, fie $\{A, B\} \subset \mathfrak{A}$ cu $A \subset B$. Cum $B = A \sqcup (B \setminus A)$,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

2. Măsură este o funcţie substractivă de mulţimi

$$\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{A} \quad \text{cu } A \subset B \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

3. Măsură este o funcţie aditivă de mulţimi.

4. $\forall \{A, B\} \subset \mathfrak{A} \qquad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$

5. Formula lui Poincaré. Pentru orice $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathfrak{A}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{L\subset\{1,2,...,n\}} (-1)^{cardL+1}\mu\left(\bigcap_{i\in L} A_i\right).$$

6. Măsură este o funcţie σ-semiaditivă de mulţimi.

Fie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$. Aplicând lema 1.1.1 şi monotonia măsurii, se obţine

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

4. Măsură exterioară

Fie X – spaţiu, $\mathfrak{A}$ – algebră de mulţimi din $\mathcal{P}(X)$, μ – o măsură definită pe $\mathfrak{A}$.

Oricare n-ar fi mulţimea $A \subset X$, există aşa mulţimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ astfel încât $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ – de exemplu, $A_1 = X, A_2 = A_3 = ... = \varnothing$. Considerăm funcţia μ^*, definită în felul următor:

$$\forall A \subset X : \mu^*(A) = \inf \sum_j \mu(A_j), \tag{4}$$

unde infimul se ia după toate acoperirile posibile ale mulţimii A cu mulţimi A_j din algebra $\mathfrak{A}$.

Definiţie 1.4.1. *Funcţia μ^* definită în (2) se numeşte măsură exterioară.*

Observaţie 1.4.1. μ^* nu este măsură (μ^* nu este σ-aditivă).

Definiţie 1.4.2. *Se numeste măsură interioară a mulţimii $A \subset X$ numărul $\mu_*(A)$:*

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A). \tag{5}$$

Proprietăţi 1.4.1.

1. $\mu_*(A) \leq \mu^*(A) \quad \forall A \subset X.$

2. $\forall A \in \mathfrak{A} \ : \ \mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A).$

În adevăr, avem $A \in \mathfrak{A}$, printre toate acoperirile posibile ale lui A cu mulţimi din algebra $\mathfrak{A}$ avem şi $A_1 = A,\ A_2 = A_3... = \varnothing$, astfel

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \tag{6}$$

Pe de altă parte, conform definiţiei infimumului, pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o acoperire $\{A_j\}_j$ a mulţimii A cu mulţimi $A_j \in \mathfrak{A}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_j \mu(A_j) < \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{7}$$

Cum

$$A = A \cap \left(\bigcup_j A_j\right) = \bigcup_j (A \cap A_j),$$

ţinând seamă de monotonia şi σ-aditivitatea măsurii se obţine

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_j (A \cap A_j)) \leq \sum_j \mu(A \cap A_j) \leq \sum_j \mu(A_j)$$

şi utilizând (7) $\quad \mu(A) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Cum ε este ales arbitrar, de aici rezultă

$$\mu(A) \leq \mu^*(A). \tag{8}$$

Din (6) şi (8) rezultă $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Conform definiţiei măsurii interioare

$$\mu_*(A) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(X \setminus A) = \mu(A).$$

3. Măsura exterioară este o funcţie nenegativă şi $\mu^*(\varnothing) = 0$.

4. Măsura exterioară este o funcţie monotonă.

5. Măsura exterioară este o funcţie semiaditivă.

6. Măsura exterioară este o funcţie σ-semiaditivă, adica pentru orice $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din X are loc inegalitatea

$$\mu^*(\bigcup_j A_j) \leq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{9}$$

Dacă seria din (9) este divergentă, inegalitatea este demonstrată. Fie ea converge. Conform definiţiei măsurii exterioare, oricare n-ar fi $\varepsilon > 0$ şi j fixat se va găsi aşa un şir de mulţimi $\{A_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ astfel încât $A_{j_k} \in \mathfrak{A}$, $\bigcup\limits_k A_{j_k} \supset A$ şi

$$\sum_k \mu(A_{j_k}) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{10}$$

Însumând (10) după j de la 1 la ∞ se obţine

$$\sum_j \sum_k \mu(A_{j_k}) < \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon. \tag{11}$$

În plus, $\bigcup_j \bigcup_k A_{j_k} \supset \bigcup_j A_j$ si conform definitiei μ^*:

$$\mu^*\left(\bigcup_j A_j\right) \le \sum_j \sum_k \mu(A_{j_k}). \tag{12}$$

Din (11) şi (12) se obţine

$$\mu^*\left(\bigcup_j A_j\right) < \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon,$$

de unde, ε fiind arbitrar, obţinem σ-aditivitatea măsurii exterioare.

7. $\forall \{A, B, C\} \subset X \ : \ \mu^*(A \triangle B) \le \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B)$.

8. $\forall \{A, B\} \subset X \ : \mid \mu^*(A) - \mu^*(B) \mid \le \mu^*(A \triangle B)$.

9. Măsura interioară este o funcţie nenegativă, monotonă şi σ-semiaditivă de mulţimi.

Observaţie 1.4.2. Uneori este comod de a defini măsura exterioară axiomatic:

Definiţie 1.4.3. *Funcţia de mulţimi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ se numeşte măsură exterioară, dacă*

1. $\forall A \in \mathcal{P}(X) \ : \ \mu^*(A) \ge 0; \ \mu^*(\varnothing) = 0;$

2. μ^* *este funcţie monotonă;*

3. μ^* *este o funcţie σ-semiaditivă.*

5. Mulţimi măsurabile. Extinderea măsurii

Fie $\mathfrak{A}_1$ o algebră şi $\mu_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathbb{R}$ o masură, $\mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}$ – de asemenea o algebră şi $\mu_2 : \mathfrak{A}_2 \to \mathbb{R}$ – măsură. Dacă $A \in \mathfrak{A}_1$ implică $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, se spune că μ_2 constituie o prelungire (extensiune) a măsurii μ_1 la algebra $\mathfrak{A}_2$.

În acest paragraf vom arăta cum cu ajutorul noţiunii de măsură exterioară poate fi prelingită măsura definită pe algebra $\mathfrak{A}$ pe o σ-algebră ce conţine $\mathfrak{A}$.

Fie X – spaţiu, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ – o algebră de mulţimi, $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură, μ^* – măsura exterioară definită de (2) §4 pentru $\forall A \subset X$.

Definiţie 1.5.1. *Mulţimea $A \subset X$ se numeşte măsurabilă (μ^*-măsurabilă, măsurabilă în sens Carathéodory), dacă pentru $\forall E \subset X$ are loc egalitatea*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}). \tag{13}$$

Observaţie 1.5.1. Deoarece măsura exterioară este o funcţie semiaditivă şi $E = (E \cap A) \bigsqcup (E \cap \overline{A})$, avem

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \qquad \forall E \subset X,$$

de aceea, pentru a verifica dacă mulţimea E e măsurabilă sau ba, este suficient de a verifica inegalitatea opusa.

Vom nota totalitatea mulţimilor măsurabile a $\widetilde{\mathfrak{A}}$, iar restrictia masurii exterioare μ^* pe $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ca $\widetilde{\mu}$:

$$\widetilde{\mu} = \mu^* \mid_{\widetilde{\mathfrak{A}}} .$$

Teorema 1.5.1. $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – *σ-algebră ce conţine algebra* $\mathfrak{A}$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema în câteva etape.

I. $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră.

a) Fie $\forall \{A_1, A_2\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Să arătăm că $A_1 \cup A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Cum $A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, conform definiţiei 1.5.1

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X,$$

de unde

$$\mu^*(E \cap A_1) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X, \tag{14}$$

$$\mu^*(E \cap \overline{A_1}) = \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}), \qquad \forall E \subset X. \tag{15}$$

Însumând (14) cu (15) şi ţinând seama că $A_1 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ se obţine

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}), \ \forall E \subset X. \tag{16}$$

Înlocuim în această ultimă egalitate mulţimea E prin mulţimea $E \cap (A_1 \cup A_2)$ şi obţinem

$$\mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_1 \cap \overline{A_2}) + \mu^*(E \cap \overline{A_1} \cap A_2), \qquad \forall E \subset X. \tag{17}$$

Din (16) şi (17) rezultă

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \cap (\overline{A_1 \cup A_2})), \qquad \forall E \subset X,$$

adică $A_1 \cup A_2 \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

b) Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci $\overline{A} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ (rezultă imediat din simetria egalităţii (13) în raport cu A şi $\overline{A}$).

Aşadar, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră.

Observaţie 1.5.2. Daca $\{A_1, A_2\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ din (17) rezultă

$$\mu^*(E \cap (A_1 \sqcup A_2)) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2), \quad \forall E \subset X. \tag{18}$$

Prin inducţie, daca $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j), \quad \forall E \subset X. \tag{19}$$

II. $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – σ-algebră. Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ mulţimi măsurabile. Să arătăm ca $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Vom considera că $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (pentru cazul general se utilizează Lema 1 §1). Conform observaţiei la definiţia 1.5.1 este suficient să stabilim inegalitatea

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigsqcup_{j} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \overline{\left(\bigsqcup_{j} A_j\right)}\right), \forall E \subset X. \tag{20}$$

Cum $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – algebră, $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi, prin urmare,

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \overline{\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A_j\right)}\right), \forall E \subset X,$$

de unde untilizând (19) şi monotonia măsurii exterioare se obţine

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap \overline{\left(\bigsqcup_{j} A_j\right)}\right), \forall E \subset X.$$

Trecând în ultima inegalitate la limită cu $n \to \infty$, se obţine

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*\left(E \cap \overline{\left(\bigsqcup_{j} A_j\right)}\right), \forall E \subset X. \tag{21}$$

Cum măsura exterioară este σ-semiaditivă

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigsqcup_{j} A_j\right)\right) = \mu^*\left(\bigsqcup_{j} (E \cap A_j)\right) \leq \sum_{j} \mu^*(E \cap A_j)$$

şi ţinând seamă de (21) se obţine

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\left(E \cap \left(\bigsqcup_{j} A_j\right)\right) + \mu^*\left(E \cap \overline{\left(\bigsqcup_{j} A_j\right)}\right), \forall E \subset X,$$

adica $\bigsqcup_j A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi, prin urmare, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – σ-algebră.

III. $\mathfrak{A} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, adica orice mulţime $A \in \mathfrak{A}$ este măsurabilă. Conform observaţiei 1.5.1 este suficient să arătăm ca pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap \overline{A}\right), \quad \forall E \subset X. \tag{22}$$

Conform definiţiei infimumului pentru $\forall \varepsilon > 0$ există mulţimile $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ din $\mathfrak{A}$ astfel încât $E \subset \bigcup\limits_n A_n$

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_j \mu(A_j). \tag{23}$$

Cum $A_j = (A_j \cap A) \sqcup (A_j \cap \overline{A}), \quad \mu(A_j) = \mu(A_j \cap A) + \mu(A_j \cap \overline{A})$, şi (23) se scrie

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_j \mu(A_j \cap A) + \sum_j \mu(A_j \cap \overline{A}). \tag{24}$$

În plus

$$E \cap A \subset \left(\bigcup_j A_j\right) \cap A = \bigcup_j (A_j \cap A),$$
$$E \cap \overline{A} \subset \left(\bigcup_j A_j\right) \cap \overline{A} = \bigcup_j (A_j \cap \overline{A}),$$

de unde rezultă (a se vedea definiţia măsurii exterioare)

$$\sum_j \mu(A_j \cap A) \geq \mu^*(E \cap A), \qquad \sum_j \mu(A_j \cap \overline{A}) \geq \mu^*(E \cap \overline{A})$$

şi, prin urmare, din (24) se obţine

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \quad \forall E \subset X. \tag{25}$$

Cum ε este arbitrar, din (25) rezultă (22).

Teorema 1.5.2. *Restricţia $\widetilde{\mu} = \mu^* |_{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ este măsură.*

Demonstraţie. Nenegativitatea $\widetilde{\mu}$ este clară. Rămâne să demonstrăm σ-aditivitatea funcţiei $\widetilde{\mu}$, pentru ce este suficient să arătăm că măsura exterioară este σ-aditivă pe $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ... \subset \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$. Înlocuind în (21) $E = \bigsqcup\limits_j A_j$ se obţine

$$\mu^*(\bigsqcup_j A_j) \geq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{26}$$

Cum măsura exterioară este o funcţie σ-semiaditivă

$$\mu^*(\bigsqcup_j A_j) \leq \sum_j \mu^*(A_j). \tag{27}$$

Din (26) şi (27) rezultă $\mu^*(\bigsqcup_j A_j) = \sum_j \mu^*(A_j)$.

Teorema 1.5.3. *(Existenţa prelungirii măsurii). Fie μ o măsură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Atunci există o σ-algebră $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}$ şi o măsură $\mu_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathbb{R}$ astfel încât $\mu_1 |_{\mathfrak{A}} = \mu$.*

Demonstraţie. Demonstraţia rezultă din teoremele 1.5.1 şi 1.5.2. În adevăr, construim măsura exterioară μ^* după măsura μ, în calitate de $\mathfrak{A}_1$ considerăm σ-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ mulţimilor μ^*-măsurabile, iar în calitate de μ_1 – măsura $\widetilde{\mu}$. Astfel se obţine prelungirea măsurii μ pe σ-algebră.

Observaţie 1.5.3. Fie μ o măsură pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathfrak{A})$ – σ-algebra generată de algebra $\mathfrak{A}$. Prelungirea masurii μ pe $\sigma(\mathfrak{A}), \mu_\sigma$ se numeşte prelungire minimală a măsurii μ. Cum $\widetilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$, $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$, prin urmare, putem defini μ_σ astfel: $\mu_\sigma = \widetilde{\mu} |_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Este clar, că μ_σ – măsură şi, în plus, $\mu_\sigma |_{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mu} |_{\mathfrak{A}} = \mu$, adică μ_σ – prelungire minimală a măsurii μ.

Teorema 1.5.4. *(Unicitatea prelungirii măsurii). Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ – algebră, $\sigma(\mathfrak{A})$ – σ-algebra generată de $\mathfrak{A}$, μ, ν – măsuri definite pe $\sigma(\mathfrak{A})$. Dacă $\mu(A) = \nu(A)$ pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$, atunci $\mu = \nu$.*

6. Proprietăţile mulţimilor măsurabile şi măsurii

Definiţie 1.6.1. *Măsura μ definită pe algebra $\mathfrak{A}$ se numeşte completă, dacă $A \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ şi $\mu(A) = 0$ implică $B \in \mathfrak{A}$.*

Teorema 1.6.1. *Fie μ o masură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, μ^* – masura exterioară respectivă. Dacă $\mu^*(A) = 0$ pentru un careva $A \subset X$, atunci $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\widetilde{\mu}(A) = 0$.*

Demonstraţie. Pentru demonstra că $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ este suficient să stabilim inegalitatea

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \overline{A}), \quad \forall E \subset X.$$

Cum $E \cap A \subset A$ utilizând monotonia şi nenegativitatea măsurii exterioare, se obţine

$$0 \leq \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0,$$

adică $\mu^*(E \cap A) = 0$.

În plus, $E \cap \overline{A} \subset E$ şi cum măsura exterioară e monotonă

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap \overline{A}) = \mu^*(E \cap \overline{A}) + \mu^*(E \cap A),$$

rezultă $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A) = 0$.

Teorema 1.6.2. *Măsura $\widetilde{\mu}$ este o măsură completă.*

Demonstraţie. Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, $B \subset A$ şi $\widetilde{\mu}(A) = 0$. Atunci $\mu^*(A) = 0$ şi cum măsura exterioară este monotonă, $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$, de unde $\mu^*(B) = 0$. Conform teoremei precedente $B \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\widetilde{\mu}(B) = 0$.

Teorema 1.6.3. *(Continuitatea măsurii în raport cu reuniunile). Fie μ – măsură definită pe σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\{A_n\}$ – un şir crescător de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Demonstraţie. Cum

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus A_2) \sqcup \ldots$$

utilizând σ-aditivitatea şi subtractivitatea măsurii se obţine

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\mu(A_1) + \sum_{j=2}^{n} (\mu(A_j) - \mu(A_{j-1}))\right] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Teorema 1.6.4. *(Continuitatea măsurii în raport cu intersecţiile). Fie μ – măsură definită pe σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\{A_n\}$ – un şir descrescător de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Demonstraţie. Considerând A_1 ca spaţiu ce conţine toate mulţimile A_j, conform legilor De Morgan

$$A_1 \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (A_1 \setminus A_j)$$

de unde

$$\bigcap_j A_j = A_1 \setminus \bigcup_j (A_1 \setminus A_j)$$

şi cum măsura μ e substractivă

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_j (A_1 \setminus A_j)\right).$$

Dar şirul de mulţimi $\{A_1 \setminus A_j\}_j$ este crescător şi conform teoremei precedente

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Observaţie 1.6.1. Teoremele 1.6.3 şi 1.6.4 pot fi formulate ca o singură teoremă, şi anume

Teorema 1.6.5. *(Continuitatea măsurii). Fie μ – măsură definită pe σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X), \{A_n\}_n$ un şir monoton de mulţimi din $\mathfrak{A}$. Atunci*

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Teorema 1.6.6. *(Condiţie necesară de măsurabilitate). Fie μ – măsură definită pe algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\widetilde{\mu}$ – prelungirea măsurii μ pe σ-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$ mulţimilor măsurabile. Atunci pentru $\forall A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ astfel încât*

$$\widetilde{\mu}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{28}$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Conform definiţiei măsurii exterioare pentru $\widetilde{\mu}(A) = \mu^*(A)$ şi numărul $\dfrac{\varepsilon}{2}$ se va găsi aşa o acoperire $\{A_j\}_j$ a mulţimii A cu mulţimi $A_j \in \mathfrak{A}$

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_j \widetilde{\mu}(A_j). \tag{29}$$

Din (29), ţinând seamă de monotonia şi σ-aditivitatea măsurii $\widetilde{\mu}$ se obţine pentru fiecare $n \geq 1$

$$\widetilde{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right) \geq \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right). \tag{30}$$

Cum $\bigcup\limits_j A_j = A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup ...$, conform teoremei 1.6.3

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right).$$

Prin urmare, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{n_0} A_j\right) + \frac{\varepsilon}{2} > \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right). \tag{31}$$

Fie $A_\varepsilon = \bigcup\limits_{j=1}^{n_0} A_j$. Atunci din (30) şi (31) se obţine

$$\widetilde{\mu}(A_\varepsilon \setminus A) \le \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\widetilde{\mu}(A \setminus A_\varepsilon) \le \widetilde{\mu}\left(\bigcup_j A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} A_j\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde rezultă

$$\widetilde{\mu}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

7. Măsuri σ-finite

Definiţia măsurii dată în §3 presupunea $\mu(A) < +\infty$ pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$. În acelaşi timp se consideră şi măsuri ce pot lua valori infinite. Măsurile considerate până acum se numesc *finite*.

Definiţie 1.7.1. *Fie $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o algebră de mulţimi. Funcţie μ, definită pe $\mathfrak{A}$ se numeşte măsura, dacă*

1. $\forall A \in \mathfrak{A}: \quad 0 \le \mu(A) \le +\infty, \quad \mu(\varnothing) = 0$;

2. μ este o funcţie σ-aditivă de mulţimi.

Observaţie 1.7.1. Rămân valabile afirmaţiile §3 şi §4 şi teoremele 1.6.1-1.6.5 din §6, atât cât în teorema 1.6.4 este necesar de a adăuga condiţia: $\exists j \in \mathbb{N} : \mu(A_j) < +\infty$. Pentru valabilitatea celorlalte afirmaţii este necesar de a considera măsurii σ-finite.

Definiţie 1.7.2. *Măsura $\mu : \mathfrak{A} \to [0; +\infty]$ se numeşte σ-finită, dacă există un şir ascendent de mulţimi $\{A_n\}_n$ din algebra $\mathfrak{A}$ astfel încât $\mu(A_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $X = \bigcup\limits_n A_n$.*

Observaţie 1.7.2. Condiţia $\{A_n\}_n$ – şir ascendent în definiţia 1.7.2 poate fi omisă.

Exemplul 1.7.1. a) Fie $X = \mathbb{N}, \quad \mathfrak{A} = \sigma(\mathbb{N}), \quad \mu : \sigma(\mathbb{N}) \to [0; +\infty]$:

$$\mu(A) = \begin{cases} cardA, & \text{dacă } A \text{ este mulţime finită;} \\ \infty, & \text{dacă } A \text{ este mulţime infinită.} \end{cases}$$

μ – măsură σ-finită.

b) Dacă în cazul măsurii discrete se omite condiţia $\sum\limits_j \mu_j < +\infty$, se obţine o masură discretă σ-finită.

8. Măsura Lebesgue

Un exemplu important de măsură este măsura Lebesgue, întrodusă în tendinţa de a extinde noţiunea de integrală.

Fie $X = [a, b)$, unde $-\infty < a < b < +\infty$, un interval fixat al axei reale, $\mathfrak{A}$ – algebra generată de familia semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$. Fiecare element al algebrei $\mathfrak{A}$ se reprezintă ca

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i). \tag{32}$$

Lungimea semiintervalului $[\alpha, \beta)$ (segmentului $[\alpha, \beta]$, intervalului (α, β)) este egală cu $\beta - \alpha$. Lungimea elementului (32) se defineşte astfel:

$$l(A) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i). \tag{33}$$

Considerăm funcţia $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$\mu(A) = l(A), \quad A \in \mathfrak{A}, \quad A \neq \varnothing, \quad \mu(\varnothing) = 0. \tag{34}$$

Teorema 1.8.1. *Funcţia μ, definită de (34) este măsură.*

Definiţie 1.8.1. *Fie μ^* – măsura exterioară indusă de măsură μ din teorema 1.8.1. Mulţimile μ^*-măsurabile se numesc măsurabile în sens Lebesgue, iar prelungirea m a măsurii μ pe σ-algebra $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}([a, b))$ a mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue se numeşte măsura Lebesgue.*

Observaţie 1.8.1. Măsura Lebesgue a mulţimii mărginite A nu depinde de alegerea semiintervalului $[a, b)$, în sens că dacă $A \subset [a, b)$ şi $A \subset [a_1, b_1)$, m şi m_1 – măsurile Lebesgue construite pentru $[a, b)$ respectiv $[a_1, b_1)$, A măsurabilă după măsura m, atunci A este masurabilă după m_1 şi $m(A) = m_1(A)$.

Proprietăţi 1.8.1.

1. Mulţimea ce constă dintr-un singur punct este măsurabilă în sens Lebesgue şi are măsura Lebesgue egală cu zero.

Fie $A = \{x\}$. Este suficient să arătăm că $m^*(A) = 0$, unde m^* – măsura exterioară, după care e construită măsura Lebesgue.

Conform definiţiei măsurii exterioare

$$0 \leq m^*(\{x\}) \leq \inf \sum_j m(A_j), \quad A_j \in \mathfrak{A}, \ \forall j : \bigcup_j A_j \supset \{x\},$$

dar în calitate de acoperire a mulţimii $\{x\}$ poate fi luat orice semiinterval $[\alpha, \beta)$ ce conţine acest punct. Prin urmare,

$$0 \leq m^*(\{x\}) \leq \inf_{x \in [\alpha,\beta)} m([\alpha, \beta)) = \inf_{x \in [\alpha,\beta)} (\beta - \alpha) = 0,$$

de unde $m^*(\{x\}) = 0$. Aşadar $\{x\} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ şi $m(\{x\}) = 0$.

2. Orice mulţime mărginită, cel mult numărabilă de puncte ale axei reale, este măsurabilă şi măsura ei este egală cu zero.

Observaţie 1.8.2. Măsura punctelor raţionale de pe segmentul [0,1] este egală cu zero.

3. Orice interval (deschis, semideschis, închis) este măsurabil în sens Lebesgue şi măsura lui coincide cu lungimea lui.

$$m([\alpha, \beta)) = m([\alpha, \beta]) = m((\alpha, \beta)) = m((\alpha, \beta]) = \beta - \alpha.$$

4. Orice mulţime mărginită, deschisă sau închisă este măsurabilă în sens Lebesgue.

Definiţie 1.8.2. *Fie X – un spaţiu topologic arbitrar. σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ generată de familia tuturor mulţimilor deschise din X se numeşte σ-algebră boreliană, iar elementele ei – mulţimi boreliene.*

Mulţimi boreliene sunt, în particular, toate mulţimile deschise, închise, mulţimile de tip F_σ (reuniuni numărabile de mulţimi închise), G_δ (intersecţii numărabile de mulţimi deschise), $F_{\sigma\delta}$ (intersecţii numărabile de mulţimi F_σ), $G_{\delta\sigma}$ (reuniuni numărabile de mulţimi G_δ) etc.

În particular, dacă $X = [a, b)$ se obţine $\mathcal{B}([a, b))$. Mulţimea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ se numeşte mulţime boreliană mărginită, dacă ea se conţine într-o careva σ-algebră boreliană $\mathcal{B}([a, b))$.

5. Orice mulţime boreliană mărginită de pe dreaptă este măsurabilă în sens Lebesgue.

6. Fie A – o mulţime măsurabilă, mărginită a dreptei reale. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o mulţime deschisă, mărginită $G \subset \mathbb{R}$ astfel încât $G \supset A$ şi $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

7. Fie A – o mulţime măsurabilă, mărginită a dreptei reale. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există aşa o mulţime închisă F astfel încât $F \subset A$ şi $m(A \setminus F) < \varepsilon$.

Observaţie 1.8.3. Am construit măsura Lebesgue pentru mulţimile mărginite de pe axa reală, însă familia tuturor mulţimilor măsurabile mărginite pe axă nu formează o σ-algebră, chiar nici σ-inel. Vom construi măsura Lebesgue pentru mulţimi arbitrare ale axei reale. Această măsură ce poate primi şi valoarea $+\infty$ este σ-finită, iar familia mulţimilor măsurabile este σ-algebră.

Definiţie 1.8.3. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte măsurabilă în sens Lebesgue, dacă pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ este măsurabilă Lebesgue mulţimea mărginită $A \cap [-n, n)$.*

Vom nota cu $\widetilde{\mathfrak{A}}$ familia tuturor mulţimilor măsurabile în sens Lebesgue.

Teorema 1.8.2. $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – *σ-algebră.*

Demonstraţie. a) $\mathbb{R} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. În adevăr, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ mulţimea $\mathbb{R} \cap [-n, n) = [-n, n)$ este o mulţime măsurabilă mărginită.

b) Fie $\{A, B\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ mulţimea

$$(A \setminus B) \cap [-n, n) = (A \cap [-n, n)) \setminus (B \cap [-n, n))$$

este o mulţime măsurabilă mărginită ca diferenţa a două astfel de mulţimi. Prin urmare, $A \setminus B \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

c) Fie $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \widetilde{\mathfrak{A}}$. Atunci mulţimea

$$\left(\bigcup_j A_j\right) \cap [-n, n) = \bigcup_j (A_j \cap [-n, n))$$

este o mulţime măsurabilă mărginită, $\forall n \in \mathbb{N}$. Rezultă $\bigcup\limits_j A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Din a)-c) rezultă că $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – σ-algebră.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime arbitrară. Considerăm şirul numeric $m_n(A) = m(A \cap [-n, n))$. Şirul numeric cu termeni pozitivi $m_n(A)$ fiind crescător $(A \cap [-n, n) \subset A \cap [-(n+1), n+1))$ are limită (finită sau infinită).

Definiţie 1.8.4. *Fie $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Măsură Lebesgue a mulţimii A se numeşte limita*

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A \cap [-n, n)). \tag{35}$$

Teorema 1.8.3. *Funcţia de mulţimi* (35) *este o măsură σ-finită definită pe σ-algebra* $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Demonstraţie. 1. m-măsură. În adevăr, din definiţie rezultă $m(A) \geq 0$ şi $m(\varnothing) = 0$. Fie $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ mulţimi măsurabile $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \ i \neq j$. Atunci

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \lim_{n \to \infty} m\left(\left(\bigsqcup_j A_j\right) \cap [-n, n)\right) = \lim_{n \to \infty} m\left(\bigsqcup_j (A_j \cap [-n, n))\right),$$

de unde tinând seamă de σ-aditivitatea măsurii Lebesgue a mulţimilor mărginite din intervalul $[-n, n)$

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_j m\left(A_j \cap [-n, n)\right).$$

Trecând la limită termen cu termen (termenii seriei sunt nenegativi) se obţine

$$m\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \sum_j \lim_{n\to\infty} m\left(A_j \cap [-n, n)\right) = \sum_j m(A_j),$$

adică m – funcţie σ-aditivă de mulţimi. Prin urmare, m – măsură.

2. m-măsură σ-finită. Cum $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-n, n)$ şi $\forall n \in \mathbb{N} \quad m([-n, n)) < +\infty$, m – măsură σ-finită.

Observaţie 1.8.4. Măsurabilitatea mulţimii A şi valoarea măsurii ei Lebesgue nu depind de alegerea sistemului ascendent de semiintervale, adică dacă în definiţiile 1.8.3 şi 1.8.4 de înlocuit semiintervalele $[-n, n)$ cu orice sistem de semiintervale $[\alpha_n, \beta_n)$ cu

$$[\alpha_1, \beta_1) \subset [\alpha_2, \beta_2) \subset ... \subset [\alpha_n, \beta_n) \subset ...$$

şi $\bigcup\limits_n [\alpha_n, \beta_n) = \mathbb{R}$, totalitatea mulţimilor măsurabile şi măsura lor Lebesgue nu se schimbă.

9. Măsura Lebesgue-Stieltjes

Fie $X = [a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$ un semiinterval fixat al axei reale, $\mathfrak{A}$ – algebră generată de familia tuturor semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$, adică algebra mulţimilor

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j), \tag{36}$$

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$, o funcţie crescătoare, mărginită şi continuă la stânga, $\mu_f : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi, definită în felul următor

$$\mu_f(\varnothing) = 0, \quad \mu_f(A) = \sum_{j=1}^{n} (f(\beta_j) - f(\alpha_j)), \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \tag{37}$$

Teorema 1.9.1. *Funcţia de mulţimi μ_f definită de (37) este o măsură finită pe $\mathfrak{A}$.*

Demonstraţie. Cum funcţia f este crescătoare, μ_f – funcţie nenegativă şi monotonă. Fie $A = [\alpha, \beta) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k)$. Atunci $\alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \beta_2 = \alpha_3 < ... < \beta_n = \beta$ şi, prin urmare,

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) = f(\beta_n) - f(\alpha_n) + f(\beta_{n-1}) - f(\alpha_{n-1}) + ... + f(\beta_1) - f(\alpha_1) = \sum_{k=1}^{n} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)),$$

adică μ_1 este o funcţie aditivă de mulţimi. Pentru a demonstra σ-aditivitatea funcţiei μ_f vom stabili iniţial σ-semiaditivitatea ei.

Fie $[\alpha, \beta) \subset \bigsqcup_k [\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b)$. Cum $\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha)$ şi funcţia f este continuă la stânga, pentru $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ astfel încât

$$f(\beta) - f(\beta - \delta) < \varepsilon, \tag{38}$$

şi pentru fiecare $k \in \mathbb{N} \quad \exists \delta_k > 0$ încât

$$f(\alpha_k) - f(\alpha_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{39}$$

Pentru intervalele noi are loc incluziunea

$$[\alpha, \beta - \delta] \subset \bigcup_k (\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Conform lemei Borel-Lebesgue $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$[\alpha, \beta - \delta] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Din ultima incluziune rezultă

$$[\alpha, \beta - \delta) \subset \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k - \delta_k, \beta_k).$$

Alegem δ_k suficient de mici pentru ca semiintervalele $[\alpha_k - \delta_k, \beta_k),\ k = \overline{1, n}$ să nu se intersecteze. Atunci, cum μ_f – monotonă şi finit aditivă, se obţine

$$f(\beta - \delta) - f(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{n} (f(\beta_k) - f(\alpha_k - \delta_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (f(\beta_k) - f(\alpha_k - \delta_k)),$$

de unde, ţinând seamă de (38) şi (39) avem

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) + 2\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)) + 2\varepsilon.$$

Trecând în ultima inegalitate la limită cu $\varepsilon \to 0+$ se obţine

$$\mu_f([\alpha, \beta)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k, \beta_k)). \tag{40}$$

adică μ_f – σ-semiaditivă.

Demonstram σ-aditivitatea. Fie $[\alpha,\beta) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k)$, unde $[\alpha_k,\beta_k) \cap [\alpha_j,\beta_j) = \varnothing,\ j \neq k$. Atunci pentru $n \in \mathbb{N}$ arbitrar: $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k, \beta_k) \subset [\alpha,\beta)$ de unde rezultă

$$\mu_f([\alpha,\beta)) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu_f([\alpha_k,\beta_k)). \tag{41}$$

Trecem în (41) la limită cu $n \to \infty$ şi obţinem

$$\mu_f([\alpha,\beta)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k,\beta_k)). \tag{42}$$

Din (40) şi (42) rezultă $\mu_f\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} [\alpha_k,\beta_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_f([\alpha_k,\beta_k))$, adică μ_f – σ-aditivă şi deci măsura.

Definiţie 1.9.1. *Fie μ_f^* – măsura exterioară generată de măsura μ_f. Prelungirea măsurii μ_f pe σ-algebra mulţimilor μ_f^*-măsurabile se numeşte măsură Lebesgue-Stieltjes generată de funcţia f.*

Observaţie 1.9.1. 1. μ_f – măsură completă.

2. Pentru $f(x) = x$ măsura Lebesgue-Stieltjes coincide cu măsura Lebesgue.

Proprietăţi 1.9.1.

1. Orice mulţime ce constă dintr-un singur punct este măsurabilă în sens Lebesgue-Stieltjes şi

$$\mu_f(\{x\}) = f(x+0) - f(x).$$

În adevăr, cum

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[x,\ x+\frac{1}{k}\right) \tag{43}$$

unde k este ales aşa ca $x + \frac{1}{k} \leq b$, $\{x\}$ este măsurabilă. Cum seminitervalele din (43) formează un şir descendent, conform proprietăţii de continuitate a măsurii

$$\mu_f(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_f\left(\left[x,\ x+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f(x+0) - f(x).$$

2. Orice interval (deschis, semideschis, închis) din $[a,b)$ este măsurabil şi

$$\mu_f((\alpha,\beta)) = f(\beta) - f(\alpha+0),$$

$$\mu_f([\alpha,\beta]) = f(\beta+0) - f(\alpha),$$

$$\mu_f((\alpha,\beta]) = f(\beta+0) - f(\alpha+0).$$

În adevăr, $[\alpha, \beta)$ – mulţime măsurabilă conform definiţiei; oricare alt interval se reprezintă ca diferenţa sau reuniune de mulţimi măsurabile:

$$(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\}, \qquad [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \setminus \{\beta\}, \qquad (\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha\}.$$

În plus

$$\mu_f((\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) - f(\alpha + 0) + f(\alpha) = f(\beta) - f(\alpha + 0),$$

$$\mu_f([\alpha, \beta]) = f(\beta) - f(\alpha) + f(\beta + 0) - f(\beta) = f(\beta + 0) - f(\alpha),$$

$$\mu_f((\alpha, \beta]) = f(\beta + 0) - f(\alpha) - f(\alpha + 0) + f(\alpha) = f(\beta + 0) - f(\alpha + 0).$$

3. Orice mulţime boreliană din $[a, b)$ este măsurabilă.

Observaţie 1.9.2. Fie $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ – algebra generată de familia semiintervalelor $[\alpha, \beta)$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie crescătoare, mărginită şi continuă la stângă (în aşa caz există $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ şi $f(+\infty) \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$). Repetând raţionamentele precedente vom obţine o măsură Lebesgue-Stieltjes finită pe $\mathbb{R}$.

Observaţie 1.9.3. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi $\lim\limits_{x \to -b} f(x) = +\infty$. Şi în acest caz funcţie f generată o măsură Lebesgue-Stieltjes, care însă nu va fi finită. Pentru a construi măsura în acest caz, observăm, că pentru orice $\varepsilon > 0$ funcţia f pe $X_\varepsilon = [a, b - \varepsilon)$ este mărginită şi generează o măsură Lebesgue-Stieltjes μ_f pe X_ε. Vom numi mulţimea $A \subset [a, b)$ măsurabilă dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ mulţimea $A \subset [a, b - \varepsilon)$ este măsurabilă în spaţiul X_ε. În aşa caz definim

$$\mu_f(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_f(A \cap [a, b - \varepsilon)). \tag{44}$$

Cum măsura $\mu_f(A \cap [a, b - \varepsilon))$ este monotonă, limita (44) există (finită sau infinită). Măsura generată de funcţia f pe $[a, b)$ este σ-finită, deoarece $[a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right)$ şi $\mu_f\left(\left[a, b - \frac{1}{n}\right)\right) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observaţie 1.9.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, continuă la stânga şi nemărginită. Şi în acest caz ea generează o măsură Lebesgue-Stieltjes σ-finită. Construcţia este similară cu construcţia măsurii Lebesgue pe axa reală (se utilizează un sistem de intervale ascendent).

Aşadar, orice funcţie crescătoare, continuă la stânga generează pe axă o măsură Lebesgue-Stieltjes finită sau σ-finită.

Teorema 1.9.2. *Fie $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură σ-finită pe σ-algebra $\mathfrak{A}$ de mulţimi din $\mathbb{R}$, ce conţine σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – tuturor mulţimilor boreliene de pe axă. Atunci exisă aşa o funcţie crescătoare, continuă la stânga $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ încât măsura μ coincide pe $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ cu măsura Lebesgue-Stieltjes μ_f generată de funcţia f.*

Demonstraţie. Vom demonstra teorema pentru cazul μ – măsură finită. Fie

$$f(x) = \mu((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

şi vom arăta că f verifică condiţiile teoremei.

1. f – funcţie crescătoare. În adevăr, cum $x_1 < x_2$ implică $(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)$ şi μ-monotona

$$f(x_1) = \mu((-\infty, x_1)) \leq \mu((-\infty, x_2)) = f(x_2).$$

2. f – continuă la stânga, adică $f(x-0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Fie (x_n) un şir numeric crescător, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Atunci $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x)$ şi utilizând continuitatea măsurii în raport cu reuniunile se obţine

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n)) = \mu((-\infty, x)) = f(x)$$

adică $f(x-0) = f(x)$.

3. Fie μ_f – măsura Lebesgue-Stieltjes, generată de funcţia f. Atunci $\mu_f = \mu$ pe $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. În adevăr, fie $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ un semiinterval arbitrar, conform definiţiei măsurii Lebesgue-Stieltjes şi substractivităţii măsurii μ

$$\mu_f([\alpha, \beta)) = f(\beta) - f(\alpha) = \mu((-\infty, \beta)) - \mu((-\infty, \alpha)) = \mu((-\infty, \beta) \setminus (-\infty, \alpha)) = \mu([\alpha, \beta)),$$

adică pentru orice semiintervalele $[\alpha, \beta)$ măsurile μ_f şi μ coincid. Rezultă ca $\mu_f = \mu$ şi pe algebra $\mathfrak{A}$ generată de familia tuturor semiintervalelor $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Atunci conform teoremei despre unicitatea prelungirii minimale, rezultă $\mu_f(A) = \mu(A)$ pentru $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Observaţie 1.9.5. Pentru a demonstra teorema în cazul măsurii σ-finite μ, funcţia f se defineşte, de exemplu, astfel

$$f(x) = \begin{cases} \mu([0, x)), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\mu([x, 0)), & x < 0. \end{cases}$$

10. Măsuri cu semn

Fie X – spaţiu, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ o σ-algebră de mulţimi, $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o funcţie de mulţimi.

Definiţie 1.10.1. *Funcţia de mulţimi ω se numeşte măsură cu semn dacă a) $\omega(\varnothing) = 0$ şi b) ω este o funcţie σ-aditivă.*

Observaţie 1.10.1. a) Vom considera doar măsuri cu semn finite.

b) Din definiţia măsurii cu semn rezultă următoarele proprietăţi ale ei: aditivitate, subtractivitate şi continuitate în raport cu reuniunile (intersecţiile).

c) Orice măsură cu semn este mărginită.

Exemplul 1.10.1. Fie μ şi ν două măsuri finite definite pe σ-algebra $\mathfrak{A}$ şi $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, $\omega(A) = \mu(A) - \nu(A)$, $\forall A \in \mathfrak{A}$. ω – măsură cu semn.

În adevăr, $\omega(\varnothing) = \mu(\varnothing) - \nu(\varnothing) = 0$ şi $\forall\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\} \subset \mathfrak{A}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ avem $\omega\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \mu\left(\bigsqcup_j A_j\right) - \nu\left(\bigsqcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j) - \sum_j \nu(A_j) = \sum_j (\mu(A_j) - \nu(A_j)) =$
$= \sum_j \omega(A_j)$.

Definiţie 1.10.2. *Mulţimea $A \in \mathfrak{A}$ se numeşte pozitivă (negativă, nulă) în raport cu măsura cu semn ω (sau ω-pozitivă, ω-negativă, ω-nulă), dacă $\omega(B) \geq 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$ ($\omega(B) \leq 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$, respectiv $\omega(B) = 0$, $\forall B \subset A$, $B \in \mathfrak{A}$).*

Teorema 1.10.1. *(Descompunerea lui Hahn) Fie $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură cu semn. Atunci există aşa două mulţimi disjuncte X_+ şi X_- astfel încât $X = X_+ \sqcup X_-$, X_+ – mulţime ω-pozitivă, X_- – mulţime ω-negativă.*

Observaţie 1.10.2. a) Se spune că mulţimile X_+ şi X_- formează o descompunere în sens Hahn a spaţiului X în raport cu măsura cu semn ω.

b) Descompunerea lui Hahn este unică cu exactitate de mulţimi ω-nule.

Fie $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ o măsură cu semn definită pe σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $X = X_+ \sqcup X_-$ – descompunerea Hahn a spaţiului X. Pentru $\forall A \in \mathfrak{A}$ definim $\omega_+(A) = \omega(A \cap X_+)$ şi $\omega_-(A) = -\omega(A \cap X_-)$

Definiţie 1.10.3. *Funcţiile de mulţimi ω_+ şi ω_- se numesc variaţie pozitivă şi respectiv variaţie negativă a măsurii cu semn ω. Funcţia de mulţimi*

$$|\omega|(A) = \omega_+(A) + \omega_-(A), \qquad \forall A \in \mathfrak{A}$$

se numeşte variaţie totală a măsurii cu semn ω.

Observaţie 1.10.3. Din definiţie rezultă că ω_+, ω_- şi $|\omega|$ sunt măsuri finite.

Teorema 1.10.2. *(Descompunerea lui Jordan) Orice măsură cu semn poate fi reprezentată ca diferenţă a două măsuri finite:* $\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A), \ \forall A \in \mathfrak{A}$.

Demonstraţie. Utilizând descompunerea Hahn se obţine:

$$\omega(A) = \omega(A \cap X_+) + \omega(A \cap X_-) = \omega_+(A) - \omega_-(A).$$

Observaţie 1.10.4. a) Descompunerea lui Jordan nu este unică. În adevăr, fie $\omega = \omega_+ - \omega_-$ o descompunere în sens Jordan, μ – o măsură finită arbitrară. Atunci $\omega = (\omega_+ + \mu) - (\omega_- + \mu)$ la fel este o reprezentare a măsurii cu semn ω ca diferenţă a două măsuri.

b) Descompunerea Jordan este minimală în următorul sens: dacă $\omega = \omega_+ - \omega_-$ este descompunerea Jordan, $\omega = \mu - \nu$ – o altă reprezentare a măsurii cu semn ω ca diferenţă a două măsuri finite, atunci $\omega_+(A) \leq \mu(A), \quad \omega_-(A) \leq \nu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.

În adevăr,

$$\omega_+(A) = \omega(A \cap X_+) = \mu(A \cap X_+) - \nu(A \cap X_+) \leq \mu(A \cap X_+) \leq \mu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Similar se arată şi $\omega_-(A) \leq \nu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{A}$.

c) Analog se consideră şi măsuri cu semn ce primesc doar una din valorile $+\infty$ sau $-\infty$.

d) Uneori se consideră şi măsuri cu semn complexe: $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, unde ω_1, ω_2 – măsuri cu semn.

11. Funcţii cu variaţie mărginită

Definiţie 1.11.1. *Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie cu variaţie mărginită, dacă $\exists L \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice deviziune λ a segmentului $[a,b], \lambda = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ avem*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq L.$$

Se notează $f \in BV([a,b])$.

Definiţie 1.11.2. *Fie $f \in BV([a,b])$. Numărul*

$$V(f; [a,b]) = \sup_{\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \right\},$$

unde supremul se ia după toate diviziunile posibile se numeşte variaţie a funcţiei f.

Exemplul 1.11.1. 1. Fie f – funcţie monotonă pe $[a,b]$. Atunci $f \in BV([a,b])$ şi $V(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.

2. Funcţiile ce verifică condiţia Lipschitz sunt funcţii cu variaţie mărginită, în particular $f \in C^{(1)}([a,b]) \;\Rightarrow\; f \in BV([a,b])$.

3. $f \in C([a,b]) \;\not\Rightarrow\; f \in BV([a,b])$, dar

$$(f \in C([a,b]) \;\wedge\; |f| \in BV([a,b])) \;\Rightarrow\; f \in BV([a,b]).$$

Proprietăţi 1.11.1.

1. $V(f;[a,b]) \geq 0$.

2. $V(f;[a,b]) \geq |f(b) - f(a)|$.

3. $f \in BV([a,b]) \;\Rightarrow\; f$ – mărginită pe $[a,b]$.

În adevăr, $\forall x \in [a,b]$: $|f(x)| = |f(a) + f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq$ $\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V(f;[a,b])$.

4. Fie $\{f,g\} \subset BV([a,b])$. Atunci

a) $\forall c \in \mathbb{R} : (cf) \in BV([a,b])$;

b) $(f \pm g) \in BV([a,b])$, $\quad (f \cdot g) \in BV([a,b])$;

c) dacă, în plus, $\exists \alpha > 0$ astfel încât $\forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \geq \alpha$, atunci $\dfrac{f}{g} \in BV([a,b])$.

Demonstraţiile a)-c) sunt similare şi rezultă din definiţia 1.11.1. De exemplu, pentru c): $\forall x_1, x_2 \subset [a,b]$:

$$\left|\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - \frac{f(x_1)}{g(x_1)}\right| = \left|\frac{f(x_2)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)}{g(x_1)g(x_2)}\right| \leq \frac{1}{\alpha^2}\{|f(x_2)g(x_1) - f(x_1)g(x_1) + f(x_1)g(x_1) -$$

$$- f(x_1)g(x_2)|\} \leq \frac{1}{\alpha^2}\left\{\sup_{[a,b]}|g| \cdot |f(x_2) - f(x_1)| + \sup_{[a,b]}|f| \cdot |g(x_2) - g(x_1)|\right\},$$

de unde, pentru orice diviziune λ a sedmentului $[a,b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}\right| \leq \frac{1}{\alpha^2}\left\{\sup_{[a,b]}|g| \cdot V(f;[a,b]) + \sup_{[a,b]}|f| \cdot V(g;[a,b])\right\}.$$

5. Fie $f \in BV([a,b])$, $c \in (a,b)$. Atunci $f \in BV([a,c])$, $f \in BV([c,b])$ şi $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$.

Demonstraţie. Fie $\lambda_1 = \lambda_1([a,c]) = \{u_0, u_1, ..., u_{n(1)}\}$, $\lambda_2 = \lambda_2([c,b]) = \{v_0, v_1, ..., v_{n(2)}\}$, $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Cum

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| + \sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f;[a,b]) \tag{46}$$

rezultă

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| \leq V(f;[a,b]),$$

$$\sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f;[a,b]),$$

adică $f \in BV([a,c])$ şi $f \in BV([a,b])$ şi în plus din (46) rezultă

$$V(f;[a,c]) + V(f;[c,b]) \leq V(f;[a,b]). \tag{47}$$

Demonstrăm inegalitatea opusă. Fie $\lambda^* = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ şi $c \in (x_j, x_{j+1}]$. Atunci $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum\limits_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{j+1}) - f(c) + f(c) - f(x_j)| + + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum\limits_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)| + + \sum\limits_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$,
de unde

$$V(f;[a,b]) \leq V(f;[a,c]) + V(f;[c,b]). \tag{48}$$

Din (47)-(48) rezultă $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$.

6. Teorema Jordan. $f \in BV([a,b]) \Leftrightarrow f$ se reprezintă ca diferenţă a două funcţii crescătoare pe $[a,b]$.

Demonstraţie. *Suficienţa.* Fie g, h – funcţii crescătoare, monotone pe $[a,b]$. Atunci (exemplul 1.11.1) $\{g,h\} \subset BV([a,b])$ şi conform proprietăţii 3 $(g-h) \in BV([a,b])$.

Necesitatea. Fie $f \in BV([a,b])$. Definim funcţiile $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel:

$$g(a) = 0, \quad \forall x \in (a,b], \quad g(x) = V(f;[a,x]),$$

$$h(x) = g(x) - f(x), \quad \forall x \in (a,b].$$

Funcţiile g şi h sunt crescătoare. În adevăr, pentru $\forall\{x_1,x_2\} \subset [a,b]$ cu $x_1 < x_2$ avem:

$$g(x_1) = V(f;[a,x_1]) \leq V(f;[a,x_1]) + V(f;[x_1,x_2]) = V(f;[a,x_2]) = g(x_2);$$

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1) = V(f; [x_1, x_2]) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

7. Mulţimea punctelor de discontinuitate a unei funcţii cu variaţie finită este cel mult numărabilă.

8. Orice funcţie cu variaţie mărginită determină o măsura cu semn.
În adevăr, fie $f \in BV([a,b])$ – continuă la stânga pe $[a,b]$. Conform teoremei Jordan

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \tag{49}$$

unde φ şi ψ sunt funcţii crescătoare, continue la stânga şi mărginite pe $[a,b]$. Fie μ_φ şi μ_ψ – măsurile Lebesgue-Stieltjes generate de φ şi ψ şi definite cel puţin pe σ-algebra mulţimilor boreliene $\mathcal{B}([a,b])$ şi

$$\omega_f(A) = \mu_\varphi(A) - \mu_\psi(A), \qquad \forall A \in \mathcal{B}([a,b]). \tag{50}$$

Cum μ_φ şi μ_ψ sunt măsuri finite, ω_f – măsură cu semn. Să arătăm, că ω_f nu depinde de reprezentarea (49). În adevăr, dacă $[\alpha,\beta) \subset [a,b)$, atunci
$\omega_f([\alpha,\beta)) = \mu_\varphi([\alpha,\beta)) - \mu_\psi([\alpha,\beta)) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - \psi(\beta) + \psi(\alpha) =$
$= (\varphi(\beta) - \psi(\beta)) - (\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)) = f(\beta) - f(\alpha),$
adică $\omega_f([\alpha,\beta))$ nu depinde de reprezentarea (49). Rezultă, că şi pentru $\forall A \in \mathcal{B}([a,b])$ valoarea $\omega_f(A)$ nu depinde de φ şi ψ în (49).

9. Fie $f \in BV([a,b])$, ω_f – măsură cu semn, generată de funcţia f, $|\omega_f|$ – variaţia totală a măsurii cu semn ω_f. Atunci

$$|\omega_f([a,b))| = V(f; [a,b]).$$