IV. Probleme diverse

Să se verifice dacă funcția $\varphi : X \times X \to R$ determină o distanță (566-569).

566. $X = R$

1) $\varphi(x,y) = \left| x|x| - y|y| \right|$;

2) $\varphi(x,y) = \sqrt[3]{|x-y|}$;

3) $\varphi(x,y) = \sqrt[n]{|x-y|}\ (n \in N)$;

4) $\varphi(x,y) = |5x - 6y|$;

5) $\varphi(x,y) = \left| e^x - e^y \right|$;

6) $\varphi(x,y) = \left| x^3 + x - y^3 - y \right|$;

7) $\varphi(x,y) = |\cos x - \cos y|$;

8) $\varphi(x,y) = |arctg\, x - arctg\, y|$;

9) $\varphi(x,y) = \left| e^{\sin x} - e^{\sin y} \right|$;

10) $\varphi(x,y) = \left| \ln(1+|x|) - \ln(1+|y|) \right|$;

11) $\varphi(x,y) = arcctg|x-y|$;

12) $\varphi(x,y) = \dfrac{|arcctg\, x - arcctg\, y|}{1 + |arcctg\, x - arcctg\, y|}$;

13) $\varphi(x,y) = \dfrac{\left|x^3 - y^3\right|}{1 + \left|x^3 - y^3\right|}$;

567. $X = R^m$ (resp. $X = C^m$):

1) $\varphi(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} (j-1)\left|\xi_j - \eta_j\right|^2 \right)^{1/2}$;

2) $\varphi(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{k} \left|\xi_j - \eta_j\right| + \max\limits_{k+1 \le j \le m} \left|\xi_j - \eta_j\right|\ (1 \le k < m)$;

3) $\varphi(x,y) = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \left|\xi_j - \eta_j\right|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum\limits_{j=k+1}^{m} \left|\xi_j - \eta_j\right|^3 \right)^{1/3}\ (1 \le k < m)$;

4) $\varphi(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left|\xi_j - \eta_j\right|^2$;

5) $\varphi(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left|\xi_j - \eta_j\right|^{1/2}$.

568. $X = C[a,b]$:

1) $\varphi(x,y) = \max\limits_{a \le t \le b} \left| e^{x(t)} - e^{y(t)} \right|$;

2) $\varphi(x,y) = \max\limits_{a \le t \le b} e^{|x(t) - y(t)|}$;

3) $\varphi(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^3 dt\right)^{1/3}$;

4) $\varphi(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^{1/3} dt\right)^3$;

5) $\varphi(x,y)=\max\limits_{a\le t\le \frac{a+b}{2}} |x(t)-y(t)| + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |x(t)-y(t)|\, dt$;

6) $\varphi(x,y)=\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |x(t)-y(t)|^3 dt\right)^{1/3}$;

569. $X = N$:

1) $\varphi(x,y)=\left|x^2-y^2\right|$;

2) $\varphi(x,y)=|\sin x-\sin y|$;

3) $\varphi(x,y)=|\cos x-\cos y|$;

4) $\varphi(x,y)=\left|e^{ix}-e^{iy}\right|$;

5) $\varphi(x,y)=\begin{cases} 0 & , x=y \\ 1+\dfrac{1}{x+y}, & x\neq y;. \end{cases}$

6) $\varphi(x,y)=\left|x^n-y^n\right|$;

7) $\varphi(x,y)=\left|e^{\sin x}-e^{\sin y}\right|$.

Să se afle distanța dintre punctele x şi y ale spațiului metric X (570-576).

570. $X = R^m$:

1) $x=(1,2,\ldots,m.)$, $y=(m,m-1,\ldots,1)$;

2) $x=\left(\sqrt{2m+3}\right)_1^m$, $y=\left(\sqrt{6m+9}\right)_1^m$;

3) $x=(1,\cos\alpha,\ldots,\cos(m-1)\alpha.)$, $y=(0,0,\ldots,0)$;

4) $x=(\sin\alpha,\sin 2\alpha,\ldots,\sin m\alpha.)$, $y=(0,0,\ldots,0)$;

5) $x=\left(1,e,\ldots,e^{m-1}\right)$, $y=(0,0,\ldots,0)$;

6) $x=(2n+1)_1^m$, $y=(3n+2)_1^m$;

7) $x=(2n+3)_1^m$, $y=(5n+4)_1^m$;

8) $x=(2n+1)_1^m$, $y=(2n+2)_1^m$.

571. $X = C^m$:

1) $x=\left(1,i,\ldots,i^{m-1}\right)$, $y=(0,0,\ldots,0)$;

2) $x=\left(1,e^i,\ldots,e^{i(m-1)}\right)$, $y=(0,0,\ldots,0)$;

3) $x=(\xi_j)_1^m$, $y=(\eta_j)_1^m$, $\begin{cases}\xi_j\eta_j=i, \\ \xi_j+\eta_j=1\end{cases}$ $(j=1,2,\ldots,m)$.

572. $X = C[0,\pi]$ şi $X = C_2[0,\pi]$:

1) $x = \sin t,\ y = \cos t$;
2) $x = \cos t,\ y = \cos 2t$;
3) $x = \dfrac{1}{2}\sin 5t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t$;
4) $x = \sin t,\ y = \sin 2t$;
5) $x = \cos 2t,\ y = \cos 3t$;
6) $x = t,\ y = \cos t$.

573. $X = C[-2,2]$ şi $C_2[-2,2]$:

1) $x = t,\ y = e^t$;
2) $x = t^2,\ y = t^4$;
3) $x = t^3,\ y = 3t - 1$;
4) $x = t^2,\ y = 2t - 1$;
5) $x = t^2,\ y = 7t - 12$;
6) $x = t^2,\ y = 2t - 5$;
7) $x = t^4 - t^2 + 1,\ y = 3t^2 - 4t - 1$;
8) $x = e^t,\ y = e^{2t}$;
9) $x = sh t,\ y = ch t$.

574. $X = l_1$:

1) $x = \left(\dfrac{n}{3^n}\right)_1^\infty,\ y = (0)_1^\infty$;
2) $x = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_1^\infty,\ y = (0)_1^\infty$;
3) $x = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{1}{3^n}\right)_1^\infty$;
4) $x = \left(\dfrac{n}{2^n}\right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{n}{3^n}\right)_1^\infty$.

575. $X = l_2$:

1) $x = \left(\dfrac{n}{3^n}\right)_1^\infty,\ y = (0)_1^\infty$;
2) $x = \left(\dfrac{1}{n}\right)_1^\infty,\ y = (0)_1^\infty$;
3) $x = \left(\dfrac{n}{2^n}\right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{n}{3^n}\right)_1^\infty$;

4) $x = \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{7^n} \right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{10^n} \right)_1^\infty.$

576. $X = l_\infty$:

1) $x = \left(\dfrac{n+1}{2n-3} \right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{n-1}{3n+1} \right)_1^\infty;$

2) $x = \left(\dfrac{3n+1}{2n+3} \right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{3n+2}{4n+3} \right)_1^\infty;$

3) $x = \left(\dfrac{n-1}{n+1} \right)_1^\infty,\ y = \left(\dfrac{n+1}{3n+1} \right)_1^\infty.$

577. Fie $1 < p_1,\ p_2 < \infty$ şi $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$. Să se arate că dacă $x = (\xi_j)_1^\infty \in l_{p_1}$, $y = (\eta_j)_1^\infty \in l_{p_2}$ atunci $z = (\xi_j \eta_j)_1^\infty \in l_p$ şi

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

578. Fie $1 < p_1,\ p_2, p_3 < \infty$ şi $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_3}$. Să se arate că dacă $x = (\xi_j)_1^\infty \in l_{p_1}$, $y = (\eta_j)_1^\infty \in l_{p_2}$, $z = (\zeta_j)_1^\infty \in l_{p_3}$, atunci $u = (\xi_j \eta_j \zeta_j)_1^\infty \in l_p$ şi

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j \zeta_j|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^{p_2} \right)^{1/p_2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^{p_3} \right)^{1/p_3}.$$

579. Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_1^\infty$ în spaţiul metric $X = l_p$ $(1 \le \mathrm{p} \le \infty), c_0, s$:

1) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, 0, 0, \ldots \right);$

2) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{\ln 2}, \ldots, \dfrac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots \right);$

3) $x_n = \left(1, \dfrac{\ln 2}{2}, \ldots, \dfrac{\ln n}{n}, 0, 0, \ldots \right);$

4) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \ldots, \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}, 0, 0, \ldots \right);$

5) $x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots \right);$

6) $x_n = \left(\underbrace{1,0,\ldots,0,1}_{n+1},0,\ldots\right)$;

7) $x_n = \left(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2^{n-1}},0,\ldots\right)$;

8) $x_n = \left(1,\frac{1}{2!},\ldots,\frac{1}{n!},0,\ldots\right)$;

9) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{2^n},0,\ldots,1}_{n+1},0,\ldots\right)$;

10) $x_n = \left(1,\frac{\ln 2}{2^\alpha},\ldots,\frac{\ln n}{n^\alpha},0,\ldots\right)(\alpha \in R)$.

580. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_1^\infty$ în spațiul metric $X = C[0,1]$ și $C_2[0,1]$:

1) $x_n(t) = t^{3n} - t^{6n}$;

2) $x_n(t) = t^n - t^{n^2}$;

3) $x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \\ nt, & 0 \le t < \frac{1}{n}; \end{cases}$

4) $x_n(t) = \begin{cases} n(1-nt), & 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < t \le 1; \end{cases}$

5) $x_n(t) = t^{5n+7} - t^{5n+10}$.

581. Să se dea exemplu de șir $\left(x^{(n)}\right)_1^\infty$, $x^{(n)} = \left(\xi_j^{(n)}\right)_1^\infty$, $\xi_j \in R$ aparținînd spațiului considerat, care:

1) converge în spațiul l_∞ și nu converge în spațiul l_1;
2) converge în spațiul l_∞ și nu converge în spațiul l_2;
3) converge în spațiul c_0 și nu converge în spațiul l_3;
4) converge în spațiul c_0 și nu converge în spațiul l_p oricare ar fi $1 \le p < \infty$;
5) converge în spațiul l_3 și nu converge în spațiul l_2;
6) converge în spațiul s și nu converge în spațiul l_∞.

582. Să se dea exemplu de șir $\left(x^{(n)}\right)_1^\infty$ aparținînd spațiului considerat, care:

1) converge în spațiul $L_1[0,1]$ și nu converge în spațiul $L_\infty[0,1]$;
2) converge în spațiul $L_2[0,1]$ și nu converge în spațiul $C[0,1]$;

3) converge în spaţiul $L_2[0,1]$ şi nu converge în spaţiul $L_3[0,1]$;
4) converge în spaţiul $L_p[0,1]$ oricare ar fi $1 \le p < \infty$ şi nu converge în spaţiul $L_\infty[0,1]$;
5) converge în spaţiul $L_r[0,1]$ oricare ar fi $1 \le r < p$, însă nu converge în $L_p[0,1]$.

583. Să se arate că şirul $\left(\sqrt{n}\, t^n\right)_1^\infty$ este convergent în spaţiul $L_p[0,1]$ dacă şi numai dacă $p < 2$.

584. Fie $0 < \alpha < 1$. Să se arate că şirul $\left(n^\alpha t^n\right)_1^\infty$ este convergent în spaţiul $L_p[0,1]$ dacă şi numai dacă $p < \dfrac{1}{\alpha}$.

585. Să se arate că mulţimile G sunt deschise, iar F închise în spaţiile metrice respective:

1) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : 2\xi_1 - 3\xi_4 \ge 5\xi_6\right\}$;
2) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : 2\xi_1 - 3\xi_4 \ge 5\right\}$;
3) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in c_0 : 2\xi_1 - 3\xi_4 \ge 5\xi_6\right\}$;
4) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in s : 2\xi_1 - 3\xi_4 \ge 5\xi_6\right\}$;
5) $F = \left\{x \in C[0,1] :\ 3x\left(\dfrac{1}{3}\right) - 2x\left(\dfrac{1}{2}\right) \le x(0)\right\}$;
6) $F = \left\{x \in C[0,1] :\ 3x\left(\dfrac{1}{3}\right) - 2x\left(\dfrac{1}{2}\right) \le 1\right\}$;
7) $F = \left\{x \in C_2[0,1] :\ \int_0^1 x(t)dt \ge 7\right\}$;
8) $G = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : \xi_5 - \xi_{10} < \xi_{15}\right\}$;
9) $G = \left\{x = (\xi_n)_1^\infty \in c_0 : \xi_1 + \xi_4 > \xi_5\right\}$;
10) $G = \left\{x \in C[0,1] :\ 2x\left(\dfrac{1}{2}\right) - 3x\left(\dfrac{1}{4}\right) < 5\right\}$;
11) $G = \left\{x \in C[0,1] :\ 3x(0) - 4x(1) > 7x\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}$;
12) $G = \left\{x \in C_2[0,1] :\ \int_0^1 x(t)dt < 3\right\}$;
13) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^m \in R^m : \xi_1 + \xi_m \le 2\xi_2\ (m \ge 2)\right\}$;
14) $F = \left\{x = (\xi_n)_1^m \in C^m : 2\xi_1 - 3\xi_m \ge 5\ (m \ge 2)\right\}$;
15) $G = \left\{x = (\xi_n)_1^m \in R^m : 2\xi_1 - 3\xi_2 < \xi_m\ (m \ge 2)\right\}$;
16) $G = \left\{x = (\xi_n)_1^m \in C^m : \xi_2 - \xi_m < 0\ (m \ge 2)\right\}$.

586. Să se arate că mulţimea M nu este nici închisă, nici deschisă în spaţiul metric X:

1) $M = \{x \in C[0,1] : 1 < 2x(0) + 3x(1) \le 2\}$;
2) $M = \{x \in C_2[0,1] : x(1) < 5\}$;
3) $M = \{x \in C_2[0,1] : x(1) \le 5\}$;
4) $M = \{x \in C_2[0,1] : x(0) + x(1) < 2\}$;
5) $M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : 1 \le \xi_1 + \xi_2 < 4\}$.

587. Să se arate că spațiul metric (R, ρ), $\rho(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ este separabil.

588. Să se arate că în spațiul metric real s este densă mulțimea șirurilor de rang finit cu coordonate raționale. De aici să se deducă: spațiul metric s este separabil.

589. Să se arate că în spațiul metric $C[0,1]$ sunt dense mulțimile:

$M_1 = \{a_0 \cos t + a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{2n-1} t^{2n-1}; \quad a_j \in R, n \in N\}$,

$M_2 = \{a_0 + a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{2n-1} t^{2n-1}; \quad a_j \in R, n \in N\}$,

însă nu sunt dense mulțimile

$M_3 = \{a_1 t^\alpha + a_3 t^3 + \ldots + a_{2n-1} t^{2n-1}; \quad a_j \in R, n \in N, \alpha > 0\}$,

$M_4 = \{a_0 \sin t + a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{2n-1} t^{2n-1}; \quad a_j \in R, n \in N\}$.

590. Fie M_1 și M_2 mulțimile polinoamelor

$M_1 = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n; \quad n \in N, a_j \in Q\}$,

$M_2 = \{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n; \quad n \in N, a_j \in R \setminus Q\}$.

Să se arate că ambele mulțimi M_1 și M_2 sunt dense în spațiile $C[a,b]$ și $L_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$.

591. Fie M_1 și M_2 mulțimile șirurilor de rang finit

$M_1 = \{x = (\xi_j)_1^\infty : \xi_j \in Q, \ j = 1,2,\ldots\}$,

$M_2 = \{x = (\xi_j)_1^\infty : \xi_j \in R \setminus Q, \ j = 1,2,\ldots\}$.

Să se arate că ambele mulțimi M_1 și M_2 sunt dense în spațiul real l_p $(1 \le p < \infty)$ și c_0.

592. Să se verifice dacă mulțimea M este densă în spațiul metric X :

1) $M = c_0, \quad X = l_\infty$;
2) $M = \{x \in C[a,b] : x(a) = x(b)\}$, $X = C_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$;
3) $M = \{e^t p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, a_j \in R, n = 0,1,\ldots\}$; $X = C[a,b]$;
4) $M = \{e^t p(t) : p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n, a_j \in R, n = 0,1,\ldots\}$; $X = L_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$;
5) $M = \{x : x' \in C[a,b]\}$, $X = C[a,b]$;
6) $M = \{x : x' \in C[a,b]\}$, $X = L_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$;
7) $M = l_p (1 \le p < \infty)$, $\quad X = c_0$;
8) $M = l_p (1 \le p < \infty)$, $\quad X = l_\infty$;

9) $M = l_p (1 \le p < \infty), \quad X = s$.

593. Să se verifice dacă aplicația $A: X \to X$ este aplicație de contracție:

1) $(Ax)(t) = \sqrt{1 + |x(t)|}, \quad X = C[0,1]$;

2) $(Ax)(t) = \sqrt{a + |x(t)|}, (a > 0), \quad X = C[0,1]$;

3) $(Ax)(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds (0 \le t \le 1), \quad X = C[0,1]$;

4) $(Ax)(t) = \int_0^t (t-s)^\alpha x(s)ds (0 \le t \le 1; \alpha > 0), \quad X = C[0,1]$.

594. Fie (X, ρ) spațiul metric $X = [0, \infty)$, $\rho(x,y) = |x-y|$. Să se verifice dacă aplicația $A: X \to X$ este aplicație de contracție:

1) $Ax = \ln(x+2)$;

2) $Ax = \ln(x+a) (a \ge 1)$;

3) $Ax = |\sin \alpha x| (0 < \alpha < 1)$;

4) $Ax = |\cos \alpha x| (0 < \alpha < 1)$;

5) $Ax = e^x$;

6) $Ax = e^{-x}$;

7) $Ax = \frac{1}{2} e^{-x}$.

595. Se consideră spațiile metrice $X_1 = l_1^{(2)}$ şi $X_2 = l_\infty^{(2)}$. Să se verifice dacă aplicația $A: X_k \to X_k \ (k = 1,2)$ este aplicație de contracție:

1) $Ax = \left(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 \right)$;

2) $Ax = \left(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 \right)$;

3) $Ax = (\xi_2, \xi_1)$;

4) $Ax = \left(\frac{2}{5}\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2, \frac{3}{5}\xi_1 + \frac{1}{5}\xi_2 \right)$.

596. Să se arate că aplicațiile $A: C[0,1] \to C[0,1]$ sunt aplicații generalizate de contracție:

1) $(Ax)(t) = \int_0^t sx(s)ds \quad (0 \le t \le 1)$;

2) $(Ax)(t) = \int_0^t (s+t)x(s)ds \quad (0 \le t \le 1)$;

3) $(Ax)(t) = \int_0^t s^2 x(s)ds \quad (0 \le t \le 1)$;

4) $(Ax)(t)=\int_0^t (s^2+t^2)x(s)ds \quad (0\le t\le 1)$.

597. Utilizînd metoda aproximărilor succesive, să se rezolve în spațiul $C[0,1]$ ecuația integrală:

1) $x(t)-3\lambda\int_0^t s^2 x(s)ds=1 \quad (0\le t\le 1)$;

2) $x(t)-4\lambda\int_0^t s^3 x(s)ds=1 \quad (0\le t\le 1)$;

3) $x(t)-\int_0^t (s-t)x(s)ds=t \quad (0\le t\le 1)$;

4) $x(t)-\int_0^t (s-t)x(s)ds=1 \quad (0\le t\le 1)$;

5) $x(t)-\int_0^t (s-t)x(s)ds=1+t \quad (0\le t\le 1)$.

598. Fie $X\subset R$ un interval închis (mărginit sau nemărginit) şi funcția $f: X\to X$ continuă pe X şi derivabilă în interiorul lui X. Să se arate că dacă $|f'(x)|\le q<1$ în interiorul lui X, atunci ecuația $f(x)=x$ are o soluție unică în X şi această soluție poate fi obținută prin metoda aproximărilor succesive $x_n=f(x_{n-1})\,(n=1,2,\ldots;\, x_0\in X)$.

599. Utilizînd afirmația din problema precedentă, să se arate că şirul $(x_n)_1^\infty$ de numere reale este convergent şi să se afle limita acestui şir

1) $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{3}{x_{n-1}}\right),\ x_0=2$;

2) $x_n=\frac{1}{k}\left((k-1)x_{k-1}+\frac{a}{x_{n-1}^{k-1}}\right),\ \left(k>1; x_0\ge\sqrt[k]{a}, a>0\right)$;

3) $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\ x_0=0$;

4) $x_n=\sqrt{2x_{n-1}},\ x_0=1$;

5) $x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}},\ x_0=2$;

6) $x_n=x_{n-1}-\frac{1}{2}\left(x_{n-1}^2-a\right),\ 0<a<1,\ x_0=a$.

600. Să se arate că orice punct fix al aplicației $A: X\to X$ este punct fix şi al aplicației $A^n\ (n=2,3,\ldots)$.

601. Utilizînd afirmația din problema precedentă să se rezolve ecuațiile

1) $(x^2-9x+41)^2-9(x^2-9x+41)-x+41=0$,

2) $(x^2+8x+15)^2+8(x^2+8x+15)-x+15=0$.

602. Să se verifice dacă aplicația A este continuă.

1) $A: l_2 \to l_1,\ Ax = \left(\xi_j^2\right)_1^\infty,\ x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_2$;

2) $A: l_2 \to l_2,\ Ax = \left(\xi_j^2\right)_1^\infty,\ x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_2$;

3) $A: l_1 \to l_1,\ Ax = x,\ x \in l_1$;

4) $A: l_{p_1} \to l_{p_2},\ Ax = x,\ x \in l_{p_1} \quad \left(1 \le p_1 < p_2 < \infty\right)$;

5) $A: l_p \to l_\infty,\ Ax = x,\ x \in l_p$;

6) $A: s \to s,\ Ax = \left(\xi_j + 1\right)_1^\infty,\ x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in s$;

7) $A: l_p \to s,\ Ax = x,\ x \in l_p$;

8) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^t x^2(s)ds\ (0 \le t \le 1)$;

9) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \begin{cases} x(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ x(1), & \frac{1}{2} < t \le 1; \end{cases}$

10) $A: l_1 \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j t^j, \quad x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_1$;

11) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x^3(t)\ (0 \le t \le 1)$;

12) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x^n(t)\ (0 \le t \le 1), n \in N$;

13) $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(0) + x\left(\frac{1}{2}\right)t + x(1)t^2$.

603. Să se verifice dacă mulțimea A este relativ compactă în spațiul metric respectiv:

1) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_p : \left|\xi_j\right| \le 1\ (j = 1,2,\ldots,n_0),\ \xi_j = 0\ (j > n_0)\right\}$;

2) $A = \left\{x \in C[0,1] : x(t) = at + b\ (0 \le t \le 1),\ 2a^2 + 3b^2 = 6\right\}$;

3) $A = \left\{x \in C_p[0,1] : x(t) = at + b\ (0 \le t \le 1),\ 2a^2 + 3b^2 = 6\right\}$;

4) $A = \left\{\{x_\alpha\}_{\alpha \in [0,5]} \subset C[0,1] : x_\alpha(t) = \ln(1 + \alpha t)\ (0 \le t \le 1)\right\}$;

5) $A = \left\{\{x_\alpha\}_{\alpha \in [0,\infty)} \subset C[0,1] : x_\alpha(t) = \ln(1 + \alpha t)\ (0 \le t \le 1)\right\}$;

6) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in c_0 : \left|\xi_j\right| \le 1;\ j = 1,2,\ldots,n_0;\ \xi_j = 0\ (j > n_0)\right\}$;

7) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in c_0 : \left|\xi_j\right| \le 1;\ j = 1,2,\ldots\right\}$;

8) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^m \in R^m : \left|\xi_1\right| + \left|\xi_2\right| + \ldots + \left|\xi_m\right| \le m\right\}$;

9) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^m \in R^m : \left|\xi_1\right| + \left|\xi_2\right| + \ldots + \left|\xi_{m-1}\right| \le 1\right\}$;

10) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^m \in R^m : \left|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m\right| = 1\right\}$;

11) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^m \in R^m : \xi_1^3 + \xi_2^3 + \ldots + \xi_m^3 \le 1\right\}$;

12) $A = \left\{x = \left(\xi_j\right)_1^m \in l_3 : \sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2 \le 1\right\}$.

Să se verifice dacă funcția $\varphi : X \to R$ definește o normă în spațiul liniar X :

604. $X = R^2 \ \left(x = \left(\xi_1, \xi_2\right) : \xi_1, \xi_2 \in R\right)$

1) $\varphi(x) = \sqrt{\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 8\xi_2^2}$;

2) $\varphi(x) = \sqrt{\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2}$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2 + 16\xi_2^2}$;

4) $\varphi(x) = \sqrt{\xi_1^2 + 8\xi_1\xi_2}$;

5) $\varphi(x) = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1\xi_2}$;

605. $X = R^m$

1) $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \left|\xi_{j+1} - \xi_j\right|$;

2) $\varphi(x) = \left|\xi_1\right| + \sum_{j=1}^{m-1} \left|\xi_{j+1} - \xi_j\right|$;

3) $\varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j\right|^{1/2}\right)^2$;

4) $\varphi(x) = \max_{0 \le t \le 1} \left|\sum_{j=1}^{m} \xi_j t^{j-1}\right|$;

5) $\varphi(x) = \max_{a \le t \le b} \left|\sum_{j=1}^{m} \xi_j t^{j-1}\right| \left(-\infty < a < b < +\infty\right)$.

606. $X = l_1$:

1) $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_{j+1} - \xi_j\right| \left(x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_1\right)$;

2) $\varphi(x) = \left|\xi_1\right| + \sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_{j+1} - \xi_j\right| \left(x = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l_1\right)$;

3) $\varphi(x) = \max_{0 \le t \le 1} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j t^{j-1}\right|$;

4) $\varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2\right)^{1/2}$;

5) $\varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p\right)^{1/p} \left(1 \le p < \infty\right)$;

6) $\varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^{k} \left|\xi_j\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^3\right)^{1/3} \left(k \in N\right)$;

7) $\varphi(x, y) = \max_{1 \le j \le k} \left|\xi_j\right| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|$.

607. $X=C[0,1]$:

1) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|e^t x(t)\right|$;

2) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\ln(1+t)x(t)\right|$;

3) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|x(1-t)\right|$;

4) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le \frac{1}{2}}\left|x(2t)\right|$;

5) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le \frac{1}{2}}\left|x(t)\right|+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|x(t)\right|dt$;

6) $\varphi(x)=\left(\int_0^{1/2}\left|x(t)\right|^2dt\right)^{1/2}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|x(t)\right|^3dt\right)^{1/3}$;

7) $\varphi(x)=\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)x(t)\right|$.

608. Să se calculeze norma vectorului x în spațiul liniar normat $\mathbf{N}$:

1) $x=(1,2,\ldots,m)$, $N=R^m$;

2) $x=(1,2,\ldots,m)$, $N=l_3^{(m)}$;

3) $x=\left(2+i,2-i,i\sqrt{15}\right)$, $N=C^3$;

4) $x=\left(1-2i,1+2i,1+i,1-i,i\sqrt{2}\right)$, $N=C^5$;

5) $x=t^2-5t+6,\ N=C[0,4]$;

6) $x=t^2-5t+6,\ N=C_1[0,4]$;

7) $x=t^2-5t+6,\ N=C_2[0,4]$;

8) $x=\sin t+\cos t,\ N=C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

9) $x=\sin t+\cos t,\ N=C_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

10) $x=sh\,t+ch\,t,\ N=C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

11) $x=sh\,t+ch\,t,\ N=C_3\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

12) $x=\left(\sin^6 t+\cos^6 t\right)^{-1},\ N=C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

13) $x=\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)^{-1},\ N=C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

14) $x=3\sin t+5\cos t,\ N=C[0,1]$;

15) $x=5\sin t+3\cos t,\ N=C[0,1]$;

16) $x=\left(\frac{n}{2^n}\right)_1^\infty,\ N=l_1$;

17) $x=\left(\frac{n}{2^n}\right)_1^\infty,\ N=l_2$;

18) $x = \left(\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}\right)_1^\infty$, $N = l_1$;

19) $x = \left(\frac{1}{(6n-5)(6n-2)}\right)_1^\infty$, $N = l_1$;

20) $x = \left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)_1^\infty$, $N = c_0$;

21) $x = \left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)_1^\infty$, $N = l_2$;

22) $x = \left(\frac{2n}{3n^2+5}\right)_1^\infty$, $N = c_0$;

23) $x = \left(\log_{n+1} n\right)_1^\infty$, $N = l_\infty$.

609. Să se arate că pentru orice $\left(a_j\right)_1^m \subset C^m$ sunt adevărate inegalitățile:

1) $\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^5\right)^{1/5} \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^3\right)^{1/3} \le m^{\frac{2}{15}}\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^5\right)^{1/5}$;

2) $\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^8\right)^{1/8} \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^7\right)^{1/7} \le m^{\frac{1}{56}}\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^8\right)^{1/8}$;

3) $\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^8\right)^{1/8} \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^5\right)^{1/5} \le m^{\frac{3}{40}}\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^8\right)^{1/8}$;

4) $\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^{10}\right)^{1/10} \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^5\right)^{1/5} \le m^{\frac{1}{10}}\left(\sum_{j=1}^m |a_j|^{10}\right)^{1/10}$;

5) $\max_{1\le j\le m}|a_j| \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^8\right)^{1/8} \le m^{\frac{1}{8}} \max_{1\le j\le m}|a_j|$;

6) $\max_{1\le j\le m}|a_j| \le \left(\sum_{j=1}^m |a_j|^5\right)^{1/5} \le m^{\frac{1}{5}} \max_{1\le j\le m}|a_j|$.

610. Să se arate că spațiul liniar normat $\left(C[a,b], \|x\|_n\right)(n = 1,2,3,4)$ este spațiu Banach:

1) $\|x\|_1 = \max_{a\le t\le b}|x(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^3 dt\right)^{1/3}$;

2) $\|x\|_2 = \max_{a\le t\le b}|x(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^4 dt\right)^{1/4}$;

3) $\|x\|_3 = \frac{1}{10}\max_{a\le t\le b}|x(t)| + 10\int_a^b |x(t)| dt$;

4) $\|x\|_4 = 2\max\limits_{a\le t\le \frac{a+b}{2}}|x(t)| + 3\max\limits_{\frac{a+b}{2}\le t\le b}|x(t)|$.

611. Să se arate că normele $\|\cdot\|'$ şi $\|\cdot\|''$, definite în spaţiul liniar al polinoamelor cu coeficienţi reali

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \ \left(a_j \in R;\ j = 0,1,\ldots,n;\ldots 0 \le t \le 1\right),$$

nu sunt echivalente:

1) $\|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $\|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^{10} dt\right)^{1/10}$;

2) $\|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^3 dt\right)^{1/3}$, $\|x\|'' = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$;

3) $\|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $\|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^4 dt\right)^{1/4}$;

4) $\|x\|' = \int_0^1 |x(t)| dt$, $\|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^3 dt\right)^{1/3}$;

5) $\|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^{10} dt\right)^{1/10}$, $\|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^{13} dt\right)^{1/13}$.

612. Să se arate că mulţimea M din spaţiul Banach L este închisă şi convexă. Să se calculeze distanţa de la punctul $x_0 \in L$ pînă la mulţimea M :

1) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_7 : 2\xi_1 + 3\xi_2 = 5\right\}$, $x_0 = (1,0,0,\ldots)$;

2) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_5 : \xi_1 - \xi_2 = 2\right\}$, $x_0 = (1,0,0,\ldots)$;

3) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_5 : \xi_1 - \xi_2 = 2\right\}$, $x_0 = (0,0,1,0,\ldots)$;

4) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_5 : \xi_1 - \xi_2 = 2\right\}$, $x_0 = (1,0,1,0,0,\ldots)$;

5) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_2 : \xi_2 + \xi_4 = 6\right\}$, $x_0 = (1,1,1,0,0,\ldots)$;

6) $M = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_2 : \xi_2 + \xi_4 = 6\right\}$, $x_0 = (0,0,0,1,0,0,\ldots)$.

613. Fie L un spaţiu liniar peste cîmpul K al numerelor reale R sau compelxe C. Să se verifice dacă aplicaţia $A : L \times L \to K$ defineşte un produs scalar:

1) $L = R^2$, $A(x,y) = \xi_1\eta_1 + 2(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + 6\xi_2\eta_2$;

2) $L = R^2$, $A(x,y) = \xi_1\eta_1 + 2(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + 4\xi_2\eta_2$;

3) $L = C^2$, $A(x,y) = \xi_1\overline{\eta_1} + 2\xi_1\overline{\eta_2} + 3\xi_2\overline{\eta_1} + 4\xi_2\overline{\eta_2}$;

4) $L = R^m$, $A(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j\eta_j \ln(j+1)$;

5) $L = R^m$, $A(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j\eta_j \ln j$;

6) $L = l_3$, $A(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\xi_j\overline{\eta_j}$;

7) $L = l_3$, $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{j} \ln(j+1)} \xi_j \overline{\eta_j}$;

8) $L = l_\infty$, $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \xi_j \overline{\eta_j}$;

9) $L = l_\infty$, $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^\alpha} \xi_j \overline{\eta_j}$;

10) $L = l_p (p \le 2)$, $A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j}$;

11) $L = L_2[-1,1]$, $A(x, y) = \int_{-1}^{1} t x(t) \overline{y(t)} dt$;

12) $L = L_2[-1,1]$, $A(x, y) = \int_{-1}^{1} t^2 x(t) \overline{y(t)} dt$;

13) $L = L_3[-1,1]$, $A(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t) \overline{y(t)} dt$;

14) $L = L_\infty[-1,1]$, $A(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t) \overline{y(t)} dt$.

614. Să se calculeze poiecția vectorului x_0 pe subspațiul M al spațiului Hilbert H şi distanța de la x_0 la M :

1) $M = \{at^5 + bt^4 + ct^3 : a,b,c \in R\} \subset L_2[0,1]$, $x_0 = t^2$;
2) $M = \{at^5 + bt^4 + ct^3 : a,b,c \in R\} \subset L_2[-1,1]$, $x_0 = t^2$;
3) $M = \{at^5 + bt^3 + c : a,b,c \in R\} \subset L_2[-1,1]$, $x_0 = t^2$;
4) $M = \{at^5 + bt^3 + c : a,b,c \in R\} \subset L_2[-1,1]$, $x_0 = t$;
5) $M = \{at^4 + bt^3 + ct : a,b,c \in R\} \subset L_2[0,1]$, $x_0 = t^2$;
6) $M = \{at^4 + bt^3 + ct : a,b,c \in R\} \subset L_2[0,1]$, $x_0 = 1$;
7) $M = \{at^4 + bt^3 + ct : a,b,c \in R\} \subset L_2[0,1]$, $x_0 = t^2$.

615. Să se aplice sistemului de vectori x_1, x_2, x_3 metoda de ortogonalizare Schmidt şi să se scrie seria Fourier a elementului $x_0 \in H$ în raport cu sistemul onținut:

1) $t^5, t^4, t^3; x_0(t) = t^2$, $H = L_2[0,1]$;
2) $t^5, t^4, t^3; x_0(t) = t^2$, $H = L_2[-1,1]$;
3) $t^5, t^3, 1; x_0(t) = t^2$, $H = L_2[-1,1]$;
4) $t^5, t^3, 1; x_0(t) = t$, $H = L_2[-1,1]$;
5) $t^4, t^3, t; x_0(t) = t^2$, $H = L_2[0,1]$;
6) $t^4, t^3, t; x_0(t) = 1$, $H = L_2[0,1]$;
7) $t^4, t^3, t; x_0(t) = t^5$, $H = L_2[0,1]$.

616. În spațiul Hilbert H să se afle complementul ortogonal al subspațiului M :

1) $M=\left\{x=(\xi_n)_1^m \in R^m : 2\xi_1+3\xi_2=0\right\}$;

2) $M=\left\{x=(\xi_n)_1^\infty \in l_2 : 2\xi_1+3\xi_2=0\right\}$;

3) $M=\left\{x=(\xi_n)_1^\infty \in l_2 : \xi_1+\xi_3=\xi_2+\xi_4=0\right\}$;

4) $M=\left\{x \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^{1} t^2 x(t)dt=0\right\}$;

5) $M=\left\{x \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^{1} t^2 x(t)dt=\int_{-1}^{1} t^3 x(t)dt=0\right\}$;

6) $M=\left\{x \in L_2[0,1] : \int_{0}^{1} (t^2+t)x(t)dt=0\right\}$.