

II. Spații liniare normate

Să se verifice dacă funcția $\varphi : L \rightarrow R$ (unde L este spațiul liniar indicat) definește o normă (305-321).

$$305. \varphi(x) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, x = (\xi, \eta) \in R^2.$$

$$306. \varphi(x) = \sqrt{3\xi^2 + 2\eta^2}, x = (\xi, \eta) \in R^2.$$

$$307. \varphi(x) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta}, x = (\xi, \eta) \in R^2.$$

$$308. \varphi(x) = \sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}, x = (\xi, \eta) \in R^2.$$

$$309. \varphi(x) = \xi^2 + \eta^2, x = (\xi, \eta) \in R^2.$$

$$310. \varphi(x) = |\xi| + |\xi - \eta|, x = (\xi, \eta) \in C^2.$$

$$311. \varphi(x) = 2|\xi| + 3|\eta|, x = (\xi, \eta) \in C^2.$$

$$312. \varphi(x) = a|\xi| + b|\eta|, x = (\xi, \eta) \in C^2, a \geq 0, b \geq 0.$$

$$313. \varphi(x) = |\xi + \eta| + |\xi - \eta|, x = (\xi, \eta) \in C^2.$$

$$314. \varphi(x) = \sqrt{|\xi|} + \sqrt{|\eta|}, x = (\xi, \eta) \in C^2.$$

$$315. \varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty), x = (\xi_j)_1^m \in C^m.$$

$$316. \varphi(x) = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j |\xi_j|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), x = (\xi_j)_1^m \in C^m, \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

$$317. \varphi(x) = \max_{0 \leq t \leq 2} |x(t)|, x \in C[0, 2].$$

$$318. \varphi(x) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, x \in C[0, 2].$$

$$319. \varphi(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, x \in C[0, 2], 0 \leq a < b \leq 2.$$

$$320. \varphi(x) = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), x \in C[a, b].$$

$$321. \varphi(x) = \left(\int_a^b u(t) |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), x \in C[a, b], u : [a, b] \rightarrow R \text{ este o}$$

funcție integrabilă și pozitivă.

Fie L spațiul liniar al funcțiilor $x : [a, b] \rightarrow R$ cu derivate continue. Să se verifice dacă funcția $\varphi : L \rightarrow R$ definește o normă (322-327).

$$322. \varphi(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

$$323. \varphi(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

$$324. \varphi(x) = |x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

$$325. \varphi(x) = |x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

$$326. \varphi(x) = \int_a^b |x(t)| dt + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

$$327. \varphi(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

În cele ce urmează, în mulțimea sistemelor de m numere (sau a șirurilor de numere) reale sau complexe vor fi definite operațiile de adunare și înmulțire cu scalari din câmpul K în mod natural, și anume, $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$ implică $x + y = (\xi_j + \eta_j)$, $\lambda x = (\lambda \xi_j)$, iar în mulțimea funcțiilor $x, y: [a, b] \rightarrow R$ implică $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$ ($a \leq t \leq b$).

Să se arate că mulțimea L formează un spațiu liniar normat cu operațiile algebrice definite în mod natural și cu norma dată de formula respectivă (328-340).

328. Mulțimea R^m a sistemelor de m numere reale $x = (\xi_j)_1^m$ cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^m \xi_j^2 \right)^{1/2}.$$

329. Mulțimea C^m a sistemelor de m numere complexe $x = (\xi_j)_1^m$ cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^2 \right)^{1/2}.$$

330. Mulțimea $l_p^{(m)}$ ($1 \leq p < \infty$) a sistemelor de m numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^m$ cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p \right)^{1/p}.$$

331. Mulțimea $l_\infty^{(m)}$ a sistemelor de m numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^m$ cu norma

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq m} |\xi_j|.$$

332. Mulțimea l_p ($1 \leq p < \infty$) a șirurilor de numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^\infty$, avînd proprietatea $\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p < \infty$, cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p \right)^{1/p}.$$

333. Mulțimea l_∞ a șirurilor mărginite de numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^\infty$ cu norma

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|.$$

334. Mulțimea c_0 a șirurilor de numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^\infty$ convergente la zero cu norma

$$\|x\| = \max_j |\xi_j|.$$

335. Mulțimea c a șirurilor convergente de numere reale sau complexe $x = (\xi_j)_1^\infty$ cu norma

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|.$$

336. Mulțimea $C[a, b]$ a funcțiilor continue $x: [a, b] \rightarrow R$ cu norma

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

337. Mulțimea $C_p[a, b]$ ($1 \leq p < \infty$) a funcțiilor continue $x: [a, b] \rightarrow R$ cu norma

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

338. Mulțimea $C^m[a, b]$ a funcțiilor $x: [a, b] \rightarrow R$ cu derivate continue de ordinul $1, 2, \dots, m$ și norma

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sum_{k=1}^m \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|.$$

339. Mulțimea $BV[a, b]$ a funcțiilor $x: [a, b] \rightarrow R$ cu variație mărginită și norma

$$\|x\| = |x(a)| + \int_a^b V(x).$$

340. Mulțimea $H^\alpha[a, b]$ ($0 < \alpha \leq 1$) a funcțiilor $x: [a, b] \rightarrow R$ ce verifică condiția Hölder cu exponentul α și cu norma

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sup_{a \leq t_1 < t_2 \leq b} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

Să se calculeze norma vectorului x în spațiul liniar normat N (341-359).

341. $x(t) = t^3 - t^2, N = C[-2, 2].$

342. $x(t) = t^3 - t^2, N = L_1[-2, 2].$

343. $x(t) = t^3 - t^2, N = L_2[-2, 2].$

344. $x(t) = \frac{1+t}{1-t}, N = C[2, 5].$

345. $x = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \right)_1^\infty, N = l_\infty.$

$$346. x = \left(\sqrt[3]{n} \cdot 2^{-n} \right)_1^\infty, N = l_3.$$

$$347. x = \left(n^{-2} \right)_1^\infty, N = l_1.$$

$$348. x = \left(n^{-1} \right)_1^\infty, N = l_2.$$

$$349. x = \left(n^{-2} \sin \frac{\pi n}{2} \right)_1^\infty, N = l_1.$$

$$350. x = \left(2^{-n} \sqrt{n+2} \right)_1^\infty, N = l_2.$$

$$351. x = \left(\frac{3n}{2n^2 + 7} \right)_1^\infty, N = l_\infty.$$

$$352. x = \left(\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)_1^\infty, N = l_\infty.$$

$$353. x = \left(n^{-1} (n+1)^{-1} \right)_1^\infty, N = l_1.$$

$$354. x = \left(n^{-1} (n+1)^{-1} \right)_1^\infty, N = l_2.$$

$$355. x = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)_1^\infty, N = c_0.$$

$$356. x = \left(\frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} \right)_1^\infty, N = l_1.$$

$$357. x(t) = \begin{cases} 1, & t = 0; \\ 2 - t, & 0 < t < 2; \\ 6, & t = 2. \end{cases} \quad N = BV[0,2].$$

$$358. x(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t, N = C[-1,1].$$

$$359. x = \left(\frac{(n-1)! \cdot 2^n}{\sqrt{(2n)!}} \right)_1^\infty, N = l_2.$$

Să se reprezinte grafic sfera unitate $\bar{S}(0,1)$ în spațiul liniar normat $\mathbf{N}$ (360-371).

$$360. N = R^2.$$

$$361. N = l_1^{(2)} = \{x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in R; \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|\}.$$

$$362. N = l_\infty^{(2)} = \{x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in R; \|x\| = \max(|\xi_1|, |\xi_2|)\}..$$

$$363. N = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in R; \|x\| = \frac{|\xi_1|}{a} + \frac{|\xi_2|}{b}; a > 0, b > 0 \right\}.$$

$$364. N = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in R; \|x\| = \sqrt{\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2}}; a > 0, b > 0 \right\}.$$

$$365. N = \{x = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in R; \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| + \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}\}.$$

$$366. N = R^3.$$

$$367. N = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R; \|x\| = \sqrt{\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2}}; \begin{matrix} a > 0, b > 0, c > 0 \end{matrix} \right\}.$$

$$368. N = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R; \|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|\}.$$

$$369. N = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R; \|x\| = |\xi_3| + \max(|\xi_1|, |\xi_2|)\}.$$

$$370. N = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R; \|x\| = \max\left\{|\xi_3|, \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right\} \right\}.$$

$$371. N = C[a, b].$$

372. Să se arate că în spațiul liniar l_p ($0 < p < 1$) cu metrica

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p$$

nu poate fi definită o normă $\|\cdot\|$ astfel încât $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

373. Să se arate că în spațiul liniar s cu metrica

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|} \quad (x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty})$$

nu poate fi definită o normă $\|\cdot\|$ astfel încât $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

374. Fie N un spațiu liniar normat, $x, y, x_n, y_n \in N$ ($n = 1, 2, \dots$). Să se arate:

a) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atunci mulțimea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ este mărginită;

b) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$;

c) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ ($\lambda, \lambda_n \in K$) atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x$;

d) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$;

e) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$;

f) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \|x - y\|$;

g) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$
 $(\lambda, \mu, \lambda_n, \mu_n \in K)$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n x_n + \mu_n y_n\| = \|\lambda x + \mu y\|$.

375. Să se arate că $\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$ oricare ar fi $x, y \in N$.

376. Să se arate că $l_p \subset c_0$ ($1 \leq p < \infty$) și $\|x\|_{c_0} \leq \|x\|_{l_p}$ ($x \in l_p$).

377. Să se arate că $l_{p_1} \subset l_{p_2}$ ($1 \leq p_1 < p_2$) și $\|x\|_{l_{p_2}} \leq \|x\|_{l_{p_1}}$ ($x \in l_{p_1}$).

378. Să se arate că $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{l_p} = \|x\|_{c_0}$ ($x \in l_1$).

379. Să se arate că

$$\bigcup_{1 \leq r < p} l_r \subsetneq l_p \subsetneq \bigcap_{r > p} l_r.$$

380. Să se arate că:

a) dacă $x \in L_p[a, b]$, $y \in L_q[a, b]$ ($1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$) atunci $xy \in L_1[a, b]$ și $\|xy\|_{L_1} \leq \|x\|_{L_p} \|y\|_{L_q}$;

b) dacă $x \in L_{p_1}[a, b]$, $y \in L_{p_2}[a, b]$ ($1 < p_1, p_2 < \infty$) $p_1^{-1} + p_2^{-1} = p^{-1}$ ($1 \leq p < \infty$) atunci $xy \in L_p[a, b]$ și $\|xy\|_{L_p} \leq \|x\|_{L_{p_1}} \|y\|_{L_{p_2}}$.

381. Să se arate că $L_{p_2}[a, b] \subset L_{p_1}[a, b]$ ($1 \leq p_1 < p_2 < \infty$) și

$$\|x\|_{L_{p_1}} \leq (b-a)^r \|x\|_{L_{p_2}} \quad (x \in L_{p_2}[a, b]), \text{ unde } r = \frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}.$$

382. Să se arate că dacă $x \in L_\infty[a, b]$, $y \in L_p[a, b]$ atunci $xy \in L_p[a, b]$ și

$$\|xy\|_{L_p} \leq \|x\|_{L_\infty} \|y\|_{L_p}.$$

383. Să se arate că dacă $x \in L_{p_1}[a, b]$, $y \in L_{p_2}[a, b]$, $z \in L_{p_3}[a, b]$ și $p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$ atunci $xyz \in L_1[a, b]$ și $\|xyz\|_{L_1} \leq \|x\|_{L_{p_1}} \|y\|_{L_{p_2}} \|z\|_{L_{p_3}}$.

384. Fie $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. Să se afle valorile parametrului $1 \leq p < \infty$ astfel ca funcția $x(t) = (t^\alpha + t^\beta)^{-1}$ să aparțină spațiului $L_p[0, +\infty)$.

385. Să se arate dacă $p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, p_1 \neq p_2$ atunci există $x \in L_{p_1}[0, +\infty)$, $x \notin L_{p_2}[0, +\infty)$ și $y \in L_{p_2}[0, +\infty)$, $y \notin L_{p_1}[0, +\infty)$. (Să se compare cu problema 381).

386. Să se arate că dacă $x \in L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, unde $x(t) = t^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $x \in L_{p_1}[0, 1]$ oricare ar fi $p_1 \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$.

387. Să se dea exemplu de funcție $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca $x \in L_5[0, 1]$ și $x \notin L_p[0, 1]$ oricare ar fi $p > 5$.

388. Fie $1 < p < \infty$. Să se dea exemplu de funcție $x: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca $x \in L_p[0, \infty)$ și $x \notin L_s[0, \infty)$ oricare ar fi $s \in [1, \infty) \setminus \{p\}$.

389. Să se arate că dacă $\|\cdot\|'$ și $\|\cdot\|''$ sunt două norme echivalente în spațiul liniar L și $(L, \|\cdot\|')$ este spațiu Banach atunci și $(L, \|\cdot\|'')$ este de asemenea spațiu Banach.

390. Să se arate că spațiul liniar $C[a, b]$ al funcțiilor continue înzestrat cu norma

$$a) \|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|;$$

$$b) \|x\|' = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \int_a^b |x(t)| dt;$$

$$c) \|x\|'' = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

este spațiu Banach.

391. Să se arate că spațiul liniar l_p ($1 \leq p < \infty$) înzestrat cu norma

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \|x\| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p}; \\ \text{b)} \quad \|x\|' &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \max_n |\xi_n|; \\ \text{c)} \quad \|x\|'' &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^r \right)^{1/r} \quad (r > p) \end{aligned}$$

este spațiu Banach.

392. Să se arate că orice subspațiu al unui spațiu Banach este la rândul său un spațiu Banach.

Fie L spațiul liniar al polinoamelor

$$L = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k t^k : a_k \in R; n \in N \right\}.$$

Să se arate că normele $\|\cdot\|'$ și $\|\cdot\|''$, definite pe L , nu sunt echivalente (393-396).

$$393. \quad \|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^3 dt \right)^{1/3}, \quad \|x\|'' = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

$$394. \quad \|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|x\|'' = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

$$395. \quad \|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^3 dt \right)^{1/3}, \quad \|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$$396. \quad \|x\|' = \left(\int_0^1 |x(t)|^{p_1} dt \right)^{1/p_1}, \quad \|x\|'' = \left(\int_0^1 |x(t)|^{p_2} dt \right)^{1/p_2} \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \infty).$$

Fie L spațiul liniar al șirurilor de numere reale sau complexe de rang finit $x = (\xi_n)_1^\infty$. Să se arate că normele $\|\cdot\|'$ și $\|\cdot\|''$, definite pe L , nu sunt echivalente (397-399).

$$397. \quad \|x\|' = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|, \quad \|x\|'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^3 \right)^{1/3}.$$

$$398. \quad \|x\|' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|x\|'' = \max_k |\xi_k|.$$

$$399. \quad \|x\|' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_1} \right)^{1/p_1}, \quad \|x\|'' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p_2} \right)^{1/p_2} \quad (1 \leq p_1 < p_2 < \infty).$$

400. Fie L spațiul liniar al polinoamelor cu coeficienți reali. Să se arate că:

- dacă $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ și notăm $\varphi(p) = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$, atunci φ este o normă în L și $\varphi(p_1 p_2) \leq \varphi(p_1) \varphi(p_2)$;
- dacă p' este polinomul derivat al lui p , să se verifice că aplicația $f : p \rightarrow p'$ este o aplicație liniară, care însă nu este continuă în norma φ ;

c) fie $\psi(p) = \max_{-1 \leq t \leq 1} |p(t)|$. Să se arate că ψ este o normă, însă φ și ψ nu sunt echivalente.

Să se arate că (401-404)

- a) pentru orice $x = (a_k)_1^m \in C^m$ sunt adevărate inegalitățile 401-404;
b) constanta c_1 (respectiv c_2) este cea mai mare (respectiv cea mai mică) dintre toate constantele pentru care este adevărată inegalitatea respectivă.

$$401. c_1 \max_{1 \leq k \leq m} |a_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^3 \right)^{1/3} \leq c_2 \max_{1 \leq k \leq m} |a_k|, \quad \left(c_1 = 1, c_2 = m^{1/3} \right).$$

$$402. c_1 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^5 \right)^{1/5} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^4 \right)^{1/4} \leq c_2 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^5 \right)^{1/5}, \quad \left(c_1 = 1, c_2 = m^{1/20} \right).$$

$$403. c_1 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^3 \right)^{1/3} \leq \sum_{k=1}^m |a_k| \leq c_2 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^3 \right)^{1/3}, \quad \left(c_1 = 1, c_2 = m^{2/3} \right).$$

$$404. c_1 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^{12} \right)^{1/12} \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^8 \right)^{1/8} \leq c_2 \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^{12} \right)^{1/12}, \quad \left(c_1 = 1, c_2 = m^{1/24} \right).$$

Să se verifice dacă șirul $(x_n)_1^\infty$ este convergent în spațiul Banach L (405-413).

$$405. x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}, \quad L = C[0,1].$$

$$406. x_n(t) = t^{2n+3}, \quad L = C[0,1].$$

$$407. x_n(t) = t^{2n+3}, \quad L = L_1[0,1].$$

$$408. x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}, \quad L = L_1[0,1].$$

$$409. x_n(t) = \left(\frac{t}{2} \right)^n + e^{t^2}, \quad L = L_2[-2,2].$$

$$410. x_n = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \dots, \frac{1}{\ln n}, 0, 0, \dots \right), \quad L = c_0.$$

$$411. x_n = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \dots, \frac{1}{\ln n}, 0, 0, \dots \right), \quad L = l_p.$$

$$412. x_n = \left(1, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \frac{1}{\sqrt[5]{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[5]{n}}, 0, 0, \dots \right), \quad L = l_p.$$

$$413. x_n = \left(1, \frac{1}{2 \ln 2}, \frac{1}{3 \ln 3}, \dots, \frac{1}{n \ln n}, 0, 0, \dots \right), \quad L = l_p \quad (1 \leq p < \infty).$$

Să se dea exemplu (414-420) de șir $(x_n)_1^\infty$ aparținând spațiului considerat care este

414. Convergent în c_0 și divergent în l_1 .

415. Convergent în l_2 și divergent în l_1 .

416. Convergent în l_{p_1} și divergent în l_{p_2} ($p_1 > p_2$).

417. Convergent în $L_1[0,1]$ și divergent în $C[0,1]$.

418. Convergent în $L_1[0,1]$ și divergent în $L_2[0,1]$.

419. Convergent în $L_p[0,1]$ ($1 \leq p < \infty$) și divergent în $L_\infty[0,1]$.

420. Convergent în $L_{p_1}[0,1]$ și divergent în $L_{p_2}[0,1]$ ($1 \leq p_1 < p_2 < \infty$).

421. Să se arate că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ($x_n \in N$) este convergentă în spațiul liniar normat N atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Este oare adevărată reciproca acestei afirmații?

Să se verifice dacă următoarele serii sunt convergente în spațiile respective (422-428).

$$422. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}; L = C[0,1], L = L_p[0,1] (1 \leq p \leq \infty).$$

$$423. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}; L = C[0,1], L = L_p[0,1] (1 \leq p \leq \infty).$$

$$424. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}; L = C[a,b], L = L_p[a,b] (-\infty < a < b < \infty; 1 \leq p \leq \infty).$$

$$425. \sum_{n=1}^{\infty} t^2 e^{-nt}; L = C[a,b], L = L_p[a,b] (-\infty < a < b < \infty; 1 \leq p \leq \infty).$$

$$426. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e_n, e_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots \right); L = l_p (1 \leq p \leq \infty).$$

$$427. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} e_n; L = c_0, l_p (1 \leq p < \infty).$$

$$428. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} e_n, L = l_\infty.$$

429. Fie L un spațiu Banach, $x_n \in L, x_n \neq 0$ ($n=1,2,\dots$). Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\inf_n \|x_n\| > 0$;

b) convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ implică $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$;

c) convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ implică $\sup_n |\alpha_n| < \infty$.

Fie L un spațiu Banach. Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (x_n \in L) \tag{4}$$

se numește **necondiționat convergentă** (sau **comutativ convergentă**) dacă pentru

orice bijecție $\sigma : N \rightarrow N$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ este convergentă.

Bijecția $\sigma : N \rightarrow N$ se numește permutare a șirului de numere naturale.

Să se arate (430-434).

430. Seria (4) este necondiționat convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime finită $L \subset N$ astfel încât pentru orice mulțime finită $M \subset N$, $M \cap L = \emptyset$ este adevărată inegalitatea $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$.

431. Dacă seria (4) este necondiționat convergentă atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

432. Seria (4) este necondiționat convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ este convergentă oricare ar fi subșirul $(n_k)_1^{\infty}$.

433. Seria (4) este necondiționat convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ este convergentă oricare ar fi ε_n , unde $\varepsilon_n = 1$ sau $\varepsilon_n = -1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

434. Dacă $L = R$ atunci seria (4) este necondiționat convergentă dacă și numai dacă $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

435. Fie $x = (\xi_n)_1^{\infty} \in c_0$. Să se arate:

a) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ este comutativ convergentă la x în c_0 ;

b) seria $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ este absolut convergentă dacă și numai dacă $x \in l_1$;

c) $(e_n)_1^{\infty}$ este bază Schauder în spațiul c_0 .

436. Să se arate că $(e_n)_1^{\infty}$ este bază Schauder în spațiul l_p ($1 \leq p < \infty$).

437. Să se arate că sistemul $\{t^n\}_0^{\infty}$ este liniar independent și complet în spațiul $C[0,1]$ însă nu formează bază Schauder în $C[0,1]$.

438. Fie N un spațiu liniar normat finit dimensional și $(e_k)_1^m$ o bază a spațiului N . Să se arate că convergența în N este echivalentă cu convergența în coordonate, adică $x_n = \sum_{k=1}^m \xi_k^{(n)} e_k \rightarrow x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

439. Să se arate că orice varietate liniară finită dimensională într-un spațiu liniar normat este subspațiu.

440. Fie N un spațiu liniar normat. Să se arate că mulțimea $A \subset N$ este mărginită dacă și numai dacă oricare ar fi șirul $(x_n)_1^{\infty} \subset A$ și șirul numeric $(\lambda_n)_1^{\infty}$, convergent la zero, șirul $(\lambda_n x_n)_1^{\infty}$ converge la zero.

441. Fie N un spațiu liniar normat și $(x_n)_1^{\infty}$ un șir din N convergent la zero. Să se arate că există un șir numeric $(\lambda_n)_1^{\infty}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = 0$.

442. Să se arate că c_0 este un subspațiu al spațiului liniar normat c .

443. Să se arate că c_0 și c sunt subspații ale spațiului liniar normat l_∞ .

444. Să se arate că într-un spațiu liniar normat $\text{diam } \bar{S}(a, r) = \text{diam } S(a, r) = 2r$.

445. Să se arate că într-un spațiu liniar normat incluziunea $\bar{S}(a, r) \subset \bar{S}(b, R)$ implică $r \leq R$ și $R - r \geq \|a - b\|$.

446. Să se arate că într-un spațiu liniar normat este adevărată egalitatea $\overline{S(a, r)} = \bar{S}(a, r)$ (să se compare cu 132, 133).

447. Fie N_1 și N_2 două spații liniare normate. Să se arate că dacă ele sunt izomorfe și unul din aceste spații este complet, atunci și celălalt spațiu este de asemenea complet.

Fie E un subspațiu al spațiului liniar L . Se zice că vectorul x este **congruent modulo** E cu vectorul y și se scrie $x \equiv y \pmod{E}$ dacă $x - y \in E$.

Să se arate (448-452)

448. Congruența modulo E este o relație de echivalență și, prin urmare, spațiul liniar L se descompune în clase de echivalență de vectori congruenți modulo E .

Clasa generată de vectorul x va fi notată cu $\mathfrak{E}$. Mulțimea claselor de echivalență se notează, de obicei, L/E .

449. Dacă $x \equiv y \pmod{E}$, $x_1 \equiv y_1 \pmod{E}$ atunci $x + x_1 \equiv y + y_1 \pmod{E}$, $\alpha x \equiv \alpha y \pmod{E}$ ($\alpha \in K$).

450. Dacă în mulțimea L/E se definesc operațiile de adunare și înmulțire cu scalari prin relațiile $\mathfrak{E} + \mathfrak{F} = x + y$, $\alpha \mathfrak{E} = \alpha x$ ($x \in \mathfrak{E}, y \in \mathfrak{F}$) atunci L/E devine un spațiu liniar. Spațiul L/E se numește **spațiul cât**.

451. Dacă N este un spațiu liniar normat și E un subspațiu al spațiului N atunci spațiul cât L/E devine un spațiu liniar normat cu norma

$$\|\mathfrak{E}\| = \inf_{x \in \mathfrak{E}} \|x\| = \inf_{y \in E} \|x_0 + y\|,$$

unde x_0 este un vector arbitrar din clasa $\mathfrak{E}$.

452. Dacă L este un spațiu Banach și E un subspațiu al spațiului L atunci L/E este un spațiu Banach cu norma definită în 451.

Mulțimea M din spațiu liniar L se numește absorbantă dacă pentru orice $x \in L$ există un număr $\alpha \in K$ așa ca $\alpha x \in M$.

Pentru orice $x \in L$, $x \neq 0$ mulțimea $\{\alpha x\}_{\alpha > 0}$ se numește rază de direcție x în spațiul L .

Să se arate (453-454).

453. Orice sferă $S(0, r)$ (sau $\bar{S}(0, r)$) într-un spațiu liniar normat este o mulțime convexă, absorbantă, simetrică în raport cu $x = 0$ și nu conține raze.

454. Dacă A este o mulțime convexă, absorbantă, simetrică în raport cu $x = 0$ și care nu conține raze într-un spațiu liniar L atunci în L poate fi definită o normă astfel încât în spațiul liniar normat obținut să avem

$$S(0, 1) \subset A \subset \bar{S}(0, 1).$$

Să se arate că mulțimea $M \subset L$ este convexă și închisă și să se afle distanța de la $x_0 \in L$ la M (455-460).

455. $M = \{x = (\xi_n)_{n=1}^\infty \in l_4 : \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 3\}, x_0 = e_1$.

$$456. M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_4 : \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 3\}, x_0 = e_2.$$

$$457. M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_5 : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1\}, x_0 = e_1 + e_2.$$

$$458. M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in c_0 : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1\}, x_0 = e_1 + e_2$$

$$459. M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_5 : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1\}, x_0 = e_4.$$

$$460. M = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_2 : \xi_1 - \xi_3 = 1\}, x_0 = e_2.$$

461. În spațiul $C[0,1]$ să se afle dinstanța de la x_0 , $x_0(t) = t$ ($0 \leq t \leq 1$), la subspațiul polinoamelor de gradul zero.

Să se determine subspațiul M_2 din spațiul Banach L așa ca L să se reprezinte ca sumă directă a două subspații M_1 și M_2 (462-474).

$$462. M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : \xi_1 = \xi_3 = \dots = \xi_{2n-1} = \dots = 0\}.$$

$$463. M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0\}.$$

$$464. M_1 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3 : \xi_1 + \xi_2 = 0\}.$$

$$465. M_1 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3 : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

$$466. M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

$$467. M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : 2\xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0\}.$$

$$468. M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in c_0 : \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}.$$

$$469. M_1 = \{x \in C[0,1] : \int_0^1 x(t)dt = 0\}.$$

$$470. M_1 = \{x \in C[0,1] : \int_0^1 tx(t)dt = 0\}.$$

$$471. M_1 = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}.$$

$$472. M_1 = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3 : \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$473. M_1 = \left\{ x = (\xi_n)_1^\infty \in l_p : \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

$$474. M_1 = \{x \in C[0,1] : \int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 tx(t)dt = 0\}.$$

475. În spațiul l_2 se consideră subspațiile

$$M_1 = \{x = (\xi_n)_1^\infty \in l_2 : \xi_{2k} = 0, k = 1, 2, \dots\},$$

$$M_2 = \left\{ x = (\xi_n)_1^\infty \in l_2 : \xi_{2k} = \frac{1}{k} \xi_{2k-1}, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Să se arate că $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ și suma directă $M_1 + M_2$ este peste tot densă însă nu coincide cu l_2 și, prin urmare, $M_1 + M_2$ nu este subspațiu (este doar varietate liniară).

476. a) Fie N un spațiu liniar normat, M un subspațiu finit dimensional. Să se arate că pentru orice $x \in N$ există $y \in M$ astfel încât $\rho(x, M) = \|x - y\|$. Este unic un astfel de element?

b) Fie $x \in C[a, b]$. Să se arate că în mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n există un polinom $P(t)$ astfel încât

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - P(t)| = \min_{Q: \text{grad } Q \leq n} \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - Q(t)| \quad (\text{P.Cebîşev})$$

477. Fie $\mathbf{N}$ un spațiu liniar normat finit dimensional și M ($\neq N$) un subspațiu din $\mathbf{N}$. Să se arate că există un vector $x_0 \in N$ cu proprietățile: $\|x_0\| = 1$, $\rho(x_0, M) = 1$.