

Capitolul 2

ALGEBRA RELAȚIONALĂ

Algebra relațională deseori e concepută ca un limbaj abstract de formulare a interpelărilor (cererilor) sau ca o colecție de operații pe relații având drept operanzi una sau mai multe relații și producând ca rezultat altă relație. Operațiile algebrei relaționale pot fi divizate în două grupuri: operațiile tradiționale pe mulțimi (vezi fig.2.1) ce consideră relațiile ca mulțimi de tupluri și operațiile relaționale native (fig.2.2).

Denumire	Simbol
Uniunea	$\cup$
Intersecția	$\cap$
Diferența	$\setminus$
Produsul (cartezian)	$\times$

Fig. 2.1. Operațiile tradiționale pe mulțimi

Denumire	Simbol
Proiecția	π
Selecția	σ
Joncțiunea	$\bowtie$
θ - joncțiunea	$\bowtie_{\theta}$
Semijoncțiunea	$\bowtie_{\text{F}}$
Diviziunea	$\div$

Fig.2.2. Operațiile relaționale native

2.1. Operațiile tradiționale

2.1.1. Scheme relaționale compatibile

Operațiile binare asupra relațiilor: uniunea, intersecția și diferența, necesită ca operanzii (relațiile) să fie definiți pe scheme compatibile. Compatibilitatea schemelor se definește în felul următor.

Definiția 2.1. Vom spune că două relații $r(R)$ și $s(S)$ sunt *compatibile* (sau au scheme compatibile), dacă între R și S există o corespondență biunivocă f : pentru orice atribut A din R , există un atribut B în S încât $\text{dom}(A)=\text{dom}(B)$, $B=f(A)$ și $A=f^{-1}(B)$, unde f^{-1} este funcția inversă funcției f .

Remarcă. Două relații cu aceeași schemă sunt compatibile.

<i>vânzări</i>	FIRMĂ	ARTICOL
	f_1	a_1
	f_1	a_2

<i>articole</i>	ARTICOL	CULOARE
	a_1	c_1
	a_1	c_2

f_2	a_1	a_1	c_3
f_3	a_1	a_3	c_2
		a_2	c_1

<i>furnizori</i>	ARTICOL	FURNIZOR
	a_1	f_1
	a_1	f_3
	a_2	f_1
	a_3	f_3

Fig.2.3.

Exemplul 2.1. Fie baza de date din fig.2.3 ce constă din trei relații: *vânzări*(FIRMĂ ARTICOL), *articole*(ARTICOL CULOARE), *furnizori*(ARTICOL FURNIZOR). Schemele relațiilor *vânzări* și *articole* nu sunt compatibile, în timp ce schemele relațiilor *vânzări* și *furnizori* sunt compatibile. Ultimele relații sunt definite pe attribute ce primesc valori din aceleași domenii. Valorile active sunt totuși diferite, fiindcă un furnizor poate să nu fie firmă și viceversa.

2.1.2. Uniunea

Uniunea a două relații presupune că schemele lor sunt compatibile.

r	A	B	C
	a_1	b_1	c_1
	a_1	b_2	c_3
	a_2	b_1	c_2

s	A	B	C
	a_1	b_1	c_1
	a_1	b_1	c_2
	a_1	b_2	c_3
	a_3	b_2	c_3

Fig.2.4. Relațiile $r(A\ B\ C)$ și $s(A\ B\ C)$

q	A	B	C
	a_1	b_1	c_1
	a_1	b_1	c_2
	a_1	b_2	c_3
	a_2	b_1	c_2
	a_3	b_2	c_3

Fig.2.5. Relația $q = r \cup s$

Definiția 2.2. *Uniunea* a două relații compatibile $r(R)$ și $s(S)$, notată cu $r \cup s$, e o relație definită pe schema R sau S și constă din tuplurile ce aparțin relațiilor r sau s , adică

$$r \cup s = \{t \mid t \in r \vee t \in s\}.$$

Exemplul 2.2. Fie relațiile $r(A\ B\ C)$ și $s(A\ B\ C)$ din fig.2.4. Relația din fig.2.5 este $q = r \cup s$.

Operația uniunea are două proprietăți. Ea e comutativă, adică $r \cup s = s \cup r$. Ea este și asociativă, adică $(r \cup s) \cup q = r \cup (s \cup q)$ pentru relațiile mutual compatibile r , s și q . Prin urmare, în expresiile ce conțin o cascadă de operații uniunea, parantezele pot fi omise fără a provoca ambiguități. Deci, dacă avem k relații compatibile $r_1, r_2, \dots, r_k$, uniunea acestor relații poate fi notată cu $\cup(r_1, r_2, \dots, r_k)$.

Operația uniunea are două cazuri speciale. Pentru orice relație $r(R)$ au loc: $r \cup \emptyset = r$ și $r \cup s = s$, dacă $r \subseteq s$.

2.1.3. Intersecția

Similar uniunii, intersecția a două relații cere ca operandii să fie relații cu scheme compatibile.

Definiția 2.3. *Intersecția* a două relații compatibile $r(R)$ și $s(S)$, notată cu $r \cap s$, este o relație definită pe schema R sau S și constă din tuplurile ce aparțin concomitent relațiilor r și s , adică

$$r \cap s = \{t \mid t \in r \ \& \ t \in s\}.$$

Exemplul 2.3. Fie relațiile $r(A \ B \ C)$ și $s(A \ B \ C)$ din fig.2.4. Relația $q = r \cap s$ este prezentată în fig.2.6.

q	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₃

Fig.2.6

2.1.4. Diferența

Operația diferența presupune că operandii sunt relații cu scheme compatibile.

Definiția 2.4. *Diferența* a două relații compatibile $r(R)$ și $s(S)$, notată cu $r \setminus s$, este o relație definită pe mulțimea de attribute R sau S și are în calitate de tupluri, toate tuplurile din relația r ce nu sunt în s , adică

$$r \setminus s = \{t \mid t \in r \ \& \ t \notin s\}.$$

Exemplul 2.4. Fie relațiile $r(A \ B \ C)$ și $s(A \ B \ C)$ din fig.2.4. Relațiile $q_1 = r \setminus s$, și $q_2 = s \setminus r$ sunt prezentate în fig.2.7.

q ₁	A	B	C
	a ₂	b ₁	c ₂

q ₂	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₃	b ₂	c ₃

Fig.2.7.

Din exemplul de mai sus observăm că diferența nu se bucură de proprietatea comutativă, adică $r \setminus s \neq s \setminus r$. Totodată, nu e nici asociativă, adică $(r \setminus s) \setminus q \neq r \setminus (s \setminus q)$, fiindcă $(r \setminus s) \setminus q = r \setminus (s \cup q)$ pentru orice relații mutual compatibile r , s , și q .

tup	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₁	c ₃
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₂
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₂
	a ₂	b ₁	c ₃
	a ₂	b ₂	c ₁
	a ₂	b ₂	c ₂
	a ₂	b ₂	c ₃
	a ₃	b ₁	c ₁
	a ₃	b ₁	c ₂
	a ₃	b ₁	c ₃
	a ₃	b ₂	c ₁
	a ₃	b ₂	c ₂
	a ₃	b ₂	c ₃

$\bar{r}$	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₁	c ₃
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₂
	a ₂	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₃
	a ₂	b ₂	c ₁
	a ₂	b ₂	c ₂
	a ₂	b ₂	c ₃
	a ₃	b ₁	c ₁
	a ₃	b ₁	c ₂
	a ₃	b ₁	c ₃
	a ₃	b ₂	c ₁
	a ₃	b ₂	c ₂
	a ₃	b ₂	c ₃

Fig.2.8.

Diferența a două relații are patru cazuri speciale. Un caz este $\emptyset \setminus r = \emptyset$; altul e $r \setminus \emptyset = r$ pentru orice relație $r(R)$. Celelalte cazuri le vom examina în următoarele două secțiuni.

2.1.5. Complementul

Definiția 2.5. Fie relația $r(R)$. Notăm prin $\text{tup}(R)$ mulțimea tuturor tuplurilor asupra atributelor schemei R și a domeniilor lor. *Complementul* relației r , notat cu $\bar{r}$, este

$$\bar{r} = \text{tup}(R) \setminus r.$$

Exemplul 2.5. Fie relația $r(A \ B \ C)$ din fig.2.4 și fie $\text{dom}(A) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\text{dom}(B) = \{b_1, b_2\}$, $\text{dom}(C) = \{c_1, c_2, c_3\}$. Atunci $\text{tup}(A \ B \ C)$ și $\bar{r}$ sunt cele din fig.2.8.

Este clar că, dacă pentru un atribut A din R domeniul $\text{dom}(A)$ este infinit, atunci și $\bar{r}$ va fi infinită și deci nu va fi o relație conform definiției noastre. Pentru lichidarea acestui dezavantaj se introduce noțiunea de complement activ.

atup	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₁	c ₃
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₂
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₁

$\sim r$	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₁	c ₃
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₂
	a ₂	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₃
	a ₂	b ₂	c ₁

a_2	b_1	c_2
a_2	b_1	c_3
a_2	b_2	c_1
a_2	b_2	c_2
a_2	b_2	c_3

a_2	b_2	c_2
a_2	b_2	c_3

Fig.2.9.

2.1.6. Complementul activ

Versiunea modificată a complementului unei relații, complementul activ, întotdeauna va produce o relație.

Definiția 2.6. Fie r o relație asupra schemei R , $A \in R$ și $\text{adom}(A) = \{a | a \in \text{dom}(A) \text{ și } \exists t \in r \text{ și } t[A] = a\}$. Mulțimea de valori $\text{adom}(A)$ se numește *domeniul activ* al atributului A . Notăm cu $\text{atup}(R)$ mulțimea tuturor tuplurilor asupra atributelor schemei R și a domeniilor lor active. Atunci *complementul activ*, notat cu $\sim r$, este $\sim r = \text{atup}(R) \setminus r$.

Exemplul 2.6. Fie relația $r(A \ B \ C)$ din fig.2.4. Atunci $\text{adom}(A) = \{a_1, a_2\}$, $\text{adom}(B) = \{b_1, b_2\}$, $\text{adom}(C) = \{c_1, c_2, c_3\}$. Relațiile $\text{atup}(A \ B \ C)$ și $\sim r$ sunt prezentate în fig.2.9.

2.1.7. Produsul cartezian

Definiția 2.7. *Produsul cartezian* a două relații $r(A_1 \dots A_n)$ și $s(B_1 \dots B_m)$, notat cu $r \times s$, este o mulțime de tupluri (și nu întotdeauna o relație) definite pe mulțimea de atribute $A_1 \dots A_n \ B_1 \dots B_m$. Tuplurile reprezintă toate posibilele asociații de tupluri din r și s : dacă $t_r \in r$ și $t_s \in s$, atunci concatenarea $t_r t_s$ este un tuplu în $r \times s$; pentru orice pereche de tupluri t_r și t_s din r și s , respectiv, există un tuplu t în $r \times s$ încât $t[A_i] = t_r[A_i]$, $1 \leq i \leq n$ și $t[B_j] = t_s[B_j]$, $1 \leq j \leq m$.

r	A	B	C
	a_1	b_1	c_1
	a_1	b_2	c_3
	a_2	b_1	c_2

s	D	E
	d_1	e_1
	d_1	e_2

Fig.2.10.

Exemplul 2.7. Fie relațiile $r(A \ B \ C)$ și $s(D \ E)$ din fig.2.10. Produsul cartezian $q = r \times s$ arată ca în fig.2.11.

Produsul cartezian a două relații nevide nu întotdeauna produce o relație. Rezultatul e o relație, dacă ambii operanzi sunt relații cu scheme nevide și disjuncte (vezi exemplul 2.7). Dacă, însă, relațiile operanzi au scheme vide sau nondisjuncte, atunci produsul cartezian nu este o relație. Această problemă poate fi soluționată cu ajutorul operației atribuirea, care de fapt produce schimbarea numelor atributelor.

q	A	B	C	D	E
	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1

a ₁	b ₁	c ₁	d ₁	e ₂
a ₁	b ₂	c ₃	d ₁	e ₁
a ₁	b ₂	c ₃	d ₁	e ₂
a ₂	b ₁	c ₂	d ₁	e ₁
a ₂	b ₁	c ₂	d ₁	e ₂

Fig.2.11.

Produsul cartezian nu este o operație comutativă. În schimb se bucură de proprietatea asociativă. Prin urmare, dacă avem o cascadă de produse carteziene $r_1 \times (r_2 \times (\dots r_k))$, ea poate fi reprezentată în formă de prefix $\times (r_1, r_2, \dots, r_k)$. Schemele relațiilor r_i , $1 \leq i \leq k$, trebuie să fie disjuncte două câte două. În caz contrar rezultatul nu va fi o relație.

2.1.8. Atribuirea

Fie $r(R)$ și $s(S)$ două relații cu scheme compatibile și $R \neq S$. Pentru a aplica asupra lor operațiile binare tradiționale se face reatribuirea relațiilor pentru a renumi diferența de atribute $R \setminus S$ sau $S \setminus R$. Atribuirea se utilizează și pentru păstrarea rezultatelor intermediare.

Definiția 2.8. Fie r o relație cu schema $A_1 \dots A_n$ și $\{B_1, \dots, B_n\}$ o mulțime de atribute compatibile, adică $\text{dom}(B_i) = \text{dom}(A_i)$, $1 \leq i \leq n$. O nouă relație $s(B_1 \dots B_n)$ compatibilă cu r se poate defini prin atribuirea: $s(B_1 \dots B_n) := r(A_1 \dots A_n)$. Extensia relației s este extensia relației r : $t_s \in s$ atunci și numai atunci, când $\exists t_r \in r$, unde $t_s[B_i] = t_r[A_i]$, $1 \leq i \leq n$.

r	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₂

s	A	D	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₂

Fig.2.12.

Următorul exemplu ilustrează utilizarea operației atribuirea pentru renumirea atributelor unei scheme.

Exemplul 2.9. Fie relația $r(A \ B \ C)$ din fig.2.12. Atunci, $s(A \ D \ C) := r(A \ B \ C)$.

r	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₂

s	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₃	b ₂	c ₃

q ₁	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₂	b ₁	c ₂
	a ₃	b ₂	c ₃

q ₂	A	B	C
----------------	---	---	---

q	A	B	C
---	---	---	---

a ₁	b ₁	c ₁
a ₁	b ₂	c ₃

a ₁	b ₁	c ₂
a ₂	b ₁	c ₂
a ₃	b ₂	c ₃

Fig.2.13.

În următorul exemplu, operația atribuirea se folosește pentru păstrarea rezultatelor intermediare.

Exemplul 2.10. Fie relațiile $r(A\ B\ C)$ și $s(A\ B\ C)$ din fig.2.13. Atunci $q := (r \cup s) \setminus (r \cap s)$. Relația q s-a construit aplicând consecutivitatea de operații: $q_1 := r \cup s$, $q_2 := r \cap s$, $q = q_1 \setminus q_2$.

2.2. Operațiile relaționale native

2.2.1. Proiecția

Proiecția e o operație unară.

Definiția 2.9. Fie r o relație cu schema R și $X \subseteq R$. *Proiecția* relației r asupra mulțimii de atribute X , notată cu $\pi_X(r)$, e o relație cu schema X ce constă din X -valorile tuturor tuplurilor din r :

$$\pi_X(r) = \{t[X] \mid t \in r\}.$$

Tupluri distincte din r pot deveni identice, când se proiectează pe o mulțime de atribute. Tuplurile duplicate în relația rezultat se elimină.

Exemplul 2.11. Fie relația $r(A\ B\ C)$ din fig.2.14. Atunci $s = \pi_{A,C}(r)$.

r	A	B	C
	a	10	1
	a	20	1
	b	30	1
	b	40	2

s	A	C
	a	1
	b	1
	b	2

Fig.2.14.

Există două cazuri speciale:

- (1) $X = R$. Atunci $\pi_X(r) = r$.
- (2) $r = \emptyset$. Atunci $\pi_X(r) = \emptyset$.

Dacă mulțimea de atribute $X = \emptyset$, atunci proiecția $\pi_{\emptyset}(r)$ este indefinită, fiindcă schema unei relații nu poate fi o mulțime vidă. Schema unei relații, produsă de operația proiecția, are cel puțin un atribut.

Pentru cazul când $R \subset X$, operația proiecția iarăși este indefinită. Mulțimea asupra căreia se face proiecția nu poate fi mai largă decât schema relației inițiale.

Fie relația $r(R)$ și $Y \subseteq X \subseteq R$. Atunci $\pi_Y(\pi_X(r)) = \pi_Y(r)$. Dacă $X = Y$, atunci $\pi_X(\pi_Y(r)) = \pi_X(r) = \pi_Y(r)$.

2.2.2. Selecția

Selecția este o operație unară. Pentru selectarea unor tupluri dintr-o relație e necesară specificarea condițiilor de selectare. În rezultat se obține o relație ce e o submulțime de tupluri a relației inițiale. Fie că condiția de selecție se notează prin formula calculului propozițional, F , definită recursiv:

- (1) $A\theta B$ și $A\theta a$ sunt formule, unde A și B sunt attribute compatibile și $a \in \text{dom}(A)$, iar $\theta \in \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$. Aceste formule sunt atomice.
- (2) Dacă G și H sunt formule, atunci conjuncția $G \& H$, disjuncția $G \vee H$, negațiile $\neg G$ și $\neg H$ sunt formule.
- (3) Nimic altceva nu e formulă.

Definiția 2.10. Vom spune că formula F e *aplicabilă* relației $r(R)$, dacă orice constantă c din F este în $\text{dom}(R)$, și orice atribut A din F este în R . O relație r satisface F (sau F e validă în r), dacă F e aplicabilă relației r și orice tuplu $t \in r$ satisface formula F în sensul că formula G obținută prin substituirea oricărui atribut A din F cu A -valoarea tuplului t are valoarea adevăr.

Definiția 2.11. Selecția relației $r(R)$ conform formulei F , unde F e aplicabilă relației $r(R)$, e o submulțime a relației $r(R)$, notată cu $\sigma_F(r)$, ce constă din toate tuplurile $t \in r$ ce satisfac F , adică

$$\sigma_F(r) = \{t \mid t \in r \ \& \ F(t)\}.$$

Exemplul 2.12. Fie $r(A \ B \ C \ D)$ din fig.2.15. Atunci $s = \sigma_{((A=B) \ \& \ (D>5))}(r)$.

r	A	B	C	D
	a	a	1	7
	b	b	5	5
	b	b	12	3
	b	b	23	10

s	A	B	C	D
	a	a	1	7
	b	b	23	10

Fig.2.15.

Există două cazuri speciale ale selecției.

- (1) Dacă F e o formulă ce nu e compusă nici dintr-o formulă atomică, adică e o formulă nulă, atunci $\sigma_F(r) = r$. În acest caz asupra tuplurilor $t \in r$ nu se impune nici o constrângere pentru selecție.
- (2) Dacă $r(R) = \emptyset$, atunci $\sigma_F(r) = \emptyset$ pentru orice formulă F , fiindcă F e validă în orice relație vidă.

Este evident că $\sigma_G(\sigma_F(r)) = \sigma_{G \& F}(r)$. Întrucât conjuncția este comutativă, adică $\sigma_{F \& G}(r) = \sigma_{G \& F}(r)$, atunci și compoziția a două selecții este comutativă. Deci $\sigma_G(\sigma_F(r)) = \sigma_F(\sigma_G(r))$.

Operația selecția este distributivă în raport cu operațiile binare tradiționale pe mulțimi. Fie r și s două relații compatibile și $\gamma \in \{\cup, \cap, \setminus\}$, atunci $\sigma_F(r \gamma s) = \sigma_F(r) \gamma \sigma_F(s)$. Să arătăm, de exemplu, că $\sigma_F(r \cup s) = \sigma_F(r) \cup \sigma_F(s)$. Într-adevăr:

$$\sigma_F(r \cup s) = \sigma_F(\{t \mid t \in r \vee t \in s\}) =$$

$$\{t^1 \mid t^1 \in \{t \mid t \in r \vee t \in s\} \& F(t^1)\} = \\ \{t \mid t \in r \& F(t)\} \cup \{t \mid t \in s \& F(t)\} = \sigma_F(r) \cup \sigma_F(s).$$

Trebuie menționat că selecția nu comutează cu operația complement. Însă selecția comutează cu proiecția, dacă sunt respectate unele condiții. Fie r o relație cu schema R , $X \subseteq R$, și fie F o formulă ce e satisfăcută de tuplurile $t[X]$. Atunci $\pi_X(\sigma_F(r)) = \sigma_F(\pi_X(r))$. Într-adevăr:

$$\pi_X(\sigma_F(r)) = \pi_X\{t \mid t \in r \& F(t)\} = \{t^1[X] \mid t^1 \in \{t \mid t \in r \& F(t)\}\} = \\ \{t[X] \mid t \in r \& F(t)\} = \{t^1 \mid t^1 \in \{t[X] \mid t \in r\} \& F(t^1)\} = \\ \{t^1 \mid t^1 \in \pi_X(r) \& F(t^1)\} = \sigma_F(\pi_X(r)).$$

2.2.3. θ -joncțiunea

Definiția 2.12. Fie $r(R)$ și $s(S)$ două relații, $R \cap S = \emptyset$, $A \in R$, $B \in S$ și fie θ un element din mulțimea $\{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$. Presupunem că atributele A și B sunt compatibile, adică $\text{dom}(A) = \text{dom}(B)$. θ -joncțiunea relațiilor $r(R)$ și $s(S)$, notată cu $r \mid x \mid_{A \theta B S}$, este o mulțime de tupluri concatenate de forma $t_r t_s$, unde $t_r \in r$, $t_s \in s$ și $t_r(A) \theta t_s(B)$, adică:

$$r \mid x \mid_{A \theta B S} = \{t_r t_s \mid t_r \in r \& t_s \in s \& t_r(A) \theta t_s(B)\}.$$

Condiția $R \cap S = \emptyset$ în definiție este necesară. Dacă $R \cap S \neq \emptyset$, atunci θ -joncțiunea nu este o relație. În cazul când θ este "=", θ -joncțiunea se mai numește *echijoncțiune*.

r	A	B	C	s	D	E
	a ₁	b ₁	4		3	e ₁
	a ₁	b ₂	2		4	e ₁
	a ₂	b ₁	6		1	e ₂

Fig.2.16.

q	A	B	C	D	E
	a ₁	b ₁	4	1	e ₂
	a ₁	b ₁	4	3	e ₁
	a ₁	b ₂	2	1	e ₂
	a ₂	b ₁	6	3	e ₁
	a ₂	b ₁	6	4	e ₁
	a ₂	b ₁	6	1	e ₂

Fig.2.17.

Exemplul 2.13. Fie relațiile $r(A \ B \ C)$ și $s(D \ E)$ din fig.2.16, unde $\text{dom}(C) = \text{dom}(D)$. În fig.2.17 relația $r \mid x \mid_{C > D S}$ este prezentă.

Operația θ -joncțiunea poate fi exprimată prin operațiile produsul cartezian și selecția. Rezultatul unei θ -joncțiuni este același cu rezultatul unei selecții operate asupra unui produs cartezian, adică $r \mid \times \mid s = \sigma_{A\theta B}(r \times s)$.

Să observăm că operația selecția poate fi simulată prin operațiile θ -joncțiunea și proiecție. Fie relația $r(R)$. Pentru a calcula $\sigma_{A\theta a}(r)$ se construiește o relație s definită pe un singur atribut, A . Relația s conține un singur tuplu componenta căruia are valoarea a pentru atributul A . Atunci $\sigma_{A\theta a}(r) = \pi_R(r \mid \times \mid s)$.

2.2.4. Joncțiunea (Joncțiunea naturală)

Definiția 2.13. Fie două relații $r(R)$ și $s(S)$. *Joncțiunea* relațiilor r și s (notația uzuală $r \mid \times \mid s$) este o relație cu schema RS . Tuplul t aparține relației rezultat, dacă există tuplurile t_r și t_s în r și s , respectiv, și satisfac $t[R]=t_r$ și $t[S]=t_s$, adică

$$r \mid \times \mid s = \{t \mid t[R] = t_r \ \& \ t[S] = t_s \ \& \ t_r \in r \ \& \ t_s \in s\}.$$

Deci, fiecare tuplu din relația rezultat este o concatenare a unui tuplu din r cu un tuplu din s ce au $(R \cap S)$ -valori egale. Atributele cu același nume în schema relației rezultat se iau o singură dată.

Exemplul 2.14. În fig.2.18 sunt afișate relațiile $r(A \ B \ C)$, $s(B \ C \ D)$ și $q(A \ B \ C \ D)$, unde $q = r \mid \times \mid s$.

Dacă R și S sunt disjuncte, $R \cap S = \emptyset$, atunci joncțiunea relațiilor r și s este identică cu produsul cartezian al lor, adică $r \mid \times \mid s = r \times s$.

Dacă $R \cap S \neq \emptyset$ și $|R \cap S| = k$, atunci joncțiunea poate fi redată prin operațiile proiecția, selecția și produsul cartezian: $r \mid \times \mid s = \pi_{RS}(\sigma_F(r \times s))$, unde $F = (r.A_1 = s.A_1) \ \& \ (r.A_2 = s.A_2) \ \& \ \dots \ \& \ (r.A_k = s.A_k)$ pentru $A_i \in R \cap S$, $1 \leq i \leq k$.

Dacă $R=S$, atunci $r \mid \times \mid s = r \cap s$. Într-adevăr:

$$\pi_{RS}(\sigma_F(r \times s)) = \pi_R(\sigma_F(r \times s)) = \pi_R((r \cap s) \times (r \cap s)) = r \cap s.$$

Operația joncțiunea nu este comutativă. În schimb, ea se bucură de proprietatea asociativă. Prin urmare, o cascadă de joncțiuni $(r_1 \mid \times \mid (r_2 \mid \times \mid (\dots r_k)))$ poate fi prefixată, adică $\mid \times \mid (r_1, r_2, \dots, r_k)$.

Din exemplul 2.14 se vede că nu toate tuplurile relațiilor r și s participă la joncțiune.

r	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₂

s	B	C	D
	b ₁	c ₁	d ₁
	b ₁	c ₁	d ₂
	b ₁	c ₂	d ₃
	b ₂	c ₂	d ₄

q	A	B	C	D
---	---	---	---	---

a ₁	b ₁	c ₁	d ₁
a ₁	b ₁	c ₁	d ₂
a ₂	b ₁	c ₂	d ₃

Fig.2.18.

s ₁	A	B
	a ₁	b ₁
	a ₂	b ₁

s ₂	B	C
	b ₁	c ₁
	b ₁	c ₂

s ₃	A	C
	a ₁	c ₁
	a ₂	c ₁

q	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₂

Fig.2.19

Definiția 2.14. Fie relațiile $s_1(S_1), \dots, s_k(S_k)$. Considerăm o consecutivitate de tupluri $t_1, \dots, t_k$, unde $t_i \in s_i(S_i)$, $1 \leq i \leq k$. Tuplurile $t_1, \dots, t_k$ se numesc *joncționabile*, dacă există un tuplu t definit pe mulțimea de atribute $S_1 \cup \dots \cup S_k$ și $t[S_i] = t_i$, $1 \leq i \leq k$. În caz contrar se numesc *nonjoncționabile*.

Exemplul 2.15. Fie relațiile $s_1(A, B)$, $s_2(B, C)$, $s_3(A, C)$ și $q(A, B, C)$ din fig.2.19, unde $q = s_1 \bowtie s_2 \bowtie s_3$. Tuplurile $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle b_1, c_1 \rangle$, și $\langle a_1, c_1 \rangle$ sunt joncționabile. De asemenea $\langle a_2, b_1 \rangle$, $\langle b_1, c_2 \rangle$, și $\langle a_2, c_1 \rangle$ sunt joncționabile, dar tuplurile $\langle a_2, b_1 \rangle$, $\langle b_1, c_2 \rangle$, și $\langle a_1, c_1 \rangle$ sunt nonjoncționabile.

Să examinăm acum legătura dintre joncțiune și uniune.

Fie relațiile $r(R)$, $r^1(R)$ și $s(S)$. Atunci are loc următoarea egalitate:

$$(r^1 \cup r) \bowtie s = (r \bowtie s) \cup (r^1 \bowtie s).$$

Într-adevăr, notăm părțile stânga și dreapta cu q și q^1 respectiv. Fie $t \in q$. Atunci există în $r^1 \cup r$ și s două tupluri joncționabile t_r și t_s pentru care $t[R] = t_r$ și $t[S] = t_s$. Dacă $t_r \in r$, atunci $t_s \in r \bowtie s$; dacă, însă $t_r \in r^1$, atunci $t \in r^1 \bowtie s$. Deci $t \in q^1$ și prin urmare $q \subseteq q^1$.

Acum presupunem că $t \in q^1$. Atunci $t \in r \bowtie s$ sau $t \in r^1 \bowtie s$. În ambele cazuri rezultă că $t \in (r^1 \cup r) \bowtie s = q$. Deci $q^1 \subseteq q$. Prin urmare $q = q^1$.

Să cercetăm acum legătura dintre proiecție și joncțiune. Fie două relații $r(R)$ și $s(S)$. Notăm $q = r \bowtie s$ (din definiția operației joncțiunea schema relației q este RS). Proiectăm relația q asupra mulțimii de atribute R : $r^1 = \pi_R(q)$. În ce corelație se află r^1 și r ? Răspuns: $r^1 \subseteq r$. Într-adevăr, fie t un tuplu arbitrar în q . Atunci conform definiției operației proiecție $r^1 = \{t[R] | t \in q\}$. Dar, pe de altă parte (în virtutea definiției operației joncțiunea), $t[R]$ trebuie să fie și tuplu în r .

Exemplul 2.16. Fie relațiile $r(A, B)$ și $s(B, C)$. Notăm $q = r \bowtie s$ și $r^1 = \pi_{AB}(q)$. În urma operațiilor, observăm că tuplurile relației r^1 constituie o submulțime proprie a relației r (vezi fig.2.20.).

r	A	B	
	a ₁	b ₁	
	a ₁	b ₂	

s	B	C
	b ₁	c ₁

q	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁

r ¹	A	B
	a ₁	b ₁

Fig.2.20.

Exemplul 2.17. În acest exemplu $r^1 = r$. Sunt date relațiile $r(R)$ și $s(S)$ cu extensiile ca în fig.2.21, $q = r \bowtie s$, și $r^1 = \pi_{AB}(q)$. Este evident că semnul dintre relațiile r^1 și r este "=", dacă pentru orice tuplu t_r din r există un tuplu t_s în s ce satisfac egalitatea $t_r[R \cap S] = t_s[R \cap S]$. Cu alte cuvinte, dacă $\pi_{R \cap S}(r) = \pi_{R \cap S}(s)$.

r	A	B	
	a ₁	b ₁	
	a ₂	b ₂	

s	B	C
	b ₁	c ₁
	b ₂	c ₂

q	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₂	c ₂

r ¹	A	B
	a ₁	b ₁
	a ₂	b ₂

Fig.2.21.

Să considerăm acum legătura dintre proiecție și joncțiune, schimbând ordinea de aplicare a acestor operații.

Fie relația q definită pe mulțimea de atribute RS . Notăm $r = \pi_R(q)$ și $s = \pi_S(q)$. Fie $q^1 = r \bowtie s$. Care e relația dintre q^1 și q ? Răspuns: $q \subseteq q^1$. Într-adevăr, fie t un tuplu arbitrar al relației q . Atunci tuplurile $t[R]$ și $t[S]$ vor fi în relațiile r și s , corespunzător. Tuplurile $t[R]$ și $t[S]$ sunt jonționabile cu rezultatul t . Deci tuplul t este și în relația q^1 .

În cazul când $q = q^1$, se spune că relația q se descompune fără pierderi pe mulțimile de atribute R și S .

Exemplul 2.18. Relația q din fig.2.22 se descompune fără pierderi pe mulțimile de atribute AB și BC , fiindcă $q = q^1$, unde $r = \pi_{AB}(q)$, $s = \pi_{BC}(q)$, $q^1 = r \bowtie s$.

q	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₁

r	A	B
	a ₁	b ₁
	a ₁	b ₂

s	B	C
	b ₁	c ₁
	b ₂	c ₁

q ¹	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₁

Fig.2.22.

Să continuăm procesul de descompunere a relației q^1 de acum. Fie $r^1 = \pi_R(q^1)$, și $s^1 = \pi_S(q^1)$. Construim joncțiunea $q^{11} = r^1 \bowtie s^1$.

Care este corelația dintre q^1 și q^{11} ? Răspuns: $q^1 = q^{11}$. Într-adevăr, proiectând $r = \pi_R(q)$, și $s = \pi_S(q)$ asupra mulțimii de atribute $R \cap S$ obținem egalitățile: $\pi_{R \cap S}(r) = \pi_{R \cap S}(\pi_R(q))$ și $\pi_{R \cap S}(s) = \pi_{R \cap S}(\pi_S(q))$. Dar $\pi_{R \cap S}(\pi_R(q)) = \pi_{R \cap S}(q)$ și $\pi_{R \cap S}(\pi_S(q)) = \pi_{R \cap S}(q)$.

Din aceste egalități rezultă că $\pi_{R \cap S}(r) = \pi_{R \cap S}(s)$. Ceea ce înseamnă că $r = r^1$ și $s = s^1$, de unde urmează că $q^1 = q^{11}$.

Corelația dintre joncțiune și alte operații se propun în calitate de exerciții la sfârșitul acestui capitol.

2.2.5. Diviziunea

Definiția 2.15. Fie $r(R)$ și $s(S)$ două relații și $S \subseteq R$. Notăm $Q = R \setminus S$. *Diviziunea* relației r la relația s , notată cu $r \div s$, este o relație definită pe mulțimea de atribute Q :

$$r \div s = \{t \mid \text{pentru } \forall t_s \in s(S) \exists t_r \in r(R) \text{ ce satisface } t_r[Q] = t \text{ și } t_r[S] = t_s\}.$$

Remarcă. Operația diviziunea poate fi concepută drept operație inversă produsului cartezian. Fie $q = r \div s$. Atunci $q \times s$ produce o relație cu schema R și relația q va conține numărul maximal de tupluri ce ar satisface expresia $q \times s \subseteq r$.

Teorema 2.1. Fie două relații $q(Q)$ și $s(S)$. Dacă $r = q \times s$, atunci $q = r \div s$.

Demonstrație. Relația r este definită pe schema QS . E suficient să demonstrăm că $q \subseteq r \div s$ și $r \div s \subseteq q$.

Să arătăm că $q \subseteq r \div s$. Fie $w := r \div s$ și t e un tuplu în q . Fiindcă pentru orice tuplu t_s din s concatenarea tuplurilor t și t_s este în $r = q \times s$, urmează (din definiția operației diviziunea) că tuplul t este în relația w . Deci $q \subseteq w$.

Să arătăm acum că $r \div s \subseteq q$. Fie $w := r \div s$ și t_w e un tuplu arbitrar din w . Atunci, pentru orice tuplu t_s din s (din definiția operației diviziunea), concatenarea tuplurilor t_w și t_s este un tuplu din r . Orice tuplu în $q \times s$ constă din concatenarea unui tuplu din q cu un tuplu din s . Prin urmare, există în q un tuplu t , încât $t = t_w$. Deci $t_w \in q$ și atunci $w \subseteq q$.

Exemplul 2.19. Fie relația $r(A \ B \ C)$ din fig.2.23. În fig.2.24(a)-2.24(e) sunt prezentate relațiile s și q , unde $q = r \div s$. Să se observe că $q \times s \subseteq r$ și că q conține un număr maximal de tupluri ce posedă această proprietate.

r	A	B	C
	a ₁	b ₁	c ₁
	a ₂	b ₁	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₂	c ₂
	a ₂	b ₁	c ₂
	a ₁	b ₂	c ₃
	a ₁	b ₂	c ₄
	a ₁	b ₁	c ₅

Fig.2.23.

s	C	q	A	B
	c ₁		a ₁	b ₁
			a ₂	b ₁
			a ₁	b ₂

Fig.2.24(a).

s	C	q	A	B
	c ₁		a ₁	b ₂
	c ₂		a ₂	b ₁

Fig.2.24(b).

s	C	q	A	B
	c ₁		a ₁	b ₂
	c ₂			
	c ₃			
	c ₄			

Fig.2.24(c).

s	B	C	q	A
	b ₁	c ₁		a ₁
				a ₂

Fig.2.24(d).

s	B	C	q	A
	b ₁	c ₁		a ₁
	b ₂	c ₁		

Fig.2.24(e).

Teorema 2.2. Operația diviziunii poate fi exprimată în termenii produsului cartezian, diferenței și proiecției: $r \div s = \pi_Q(r) \setminus \pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$.

Demonstrație. Fie tuplul $t \in \pi_Q(r) \setminus \pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$. Atunci $t \in \pi_Q(r)$ și $t \notin \pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$. Presupunem că există în s un tuplu t_s încât tuplul format prin concatenarea tuplurilor t și t_s , adică tt_s , nu este în relația r . Atunci tuplul t trebuie să aparțină relației $\pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$ ce e contradicție. Prin urmare, tuplul tt_s este în r , adică $t \in r \div s$.

Invers, dacă t este un tuplu în $r \div s$, atunci t este în $\pi_Q(r)$. Tuplul t nu poate aparține relației $\pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$, fiindcă atunci ar trebui să existe în s un tuplu t_s , încât concatenția tt_s să fie în $\pi_Q(r) \times s$ și să nu fie relația r .

Deci $t \in \pi_Q(r) \setminus \pi_Q((\pi_Q(r) \times s) \setminus r)$.

Să subliniem că operația diviziunea nu este nici comutativă, nici asociativă.

Din definiția diviziunii și remarcă urmează că, dacă relația $r[R]$ este o submulțime proprie de tupluri a relației $s(S)$, atunci $r \div s$ este o relație vidă.

Dacă $S = \emptyset$ atunci $r \div s$ este indefinită, fiindcă indefinită este $s(\emptyset)$.

2.2.6. Semijoncțiunea

Semijoncțiunea e o operație binară. Ea constă în construirea unei relații din cele două și e formată numai din tuplurile unei singure relații ce participă la joncțiune.

Definiția 2.16. Fie două relații $r(R)$ și $s(S)$. *Semijoncțiunea* relației r și s , notată cu $r \bowtie s$, este o mulțime de tupluri determinată de expresia $r \bowtie s = \pi_R(r \bowtie s)$.

Exemplul 2.20. Fie relațiile $r(A \ B)$, $s(B \ C)$ și $q(A \ B)$ din fig.2.25. Relația $q = r \bowtie s$.

r	A	B
	a ₁	b ₁
	a ₁	b ₂
	a ₂	b ₁

s	B	C
	b ₁	c ₁

q	A	B
	a ₁	b ₁
	a ₂	b ₁

Fig.2.25.

2.3. Expresii algebrice

Uniunea, diferența, produsul cartezian, proiecția, selecția și atribuirea sunt operațiile de bază ale algebrei relaționale. Celelalte operații, precum s-a văzut, se exprimă prin aceste șase. Dar un limbaj algebric de interpelări ce ar folosi numai operațiile de bază e destul de neeficient. Prin urmare, sunt utile și operațiile adiționale: intersecția, θ -joncțiunea, joncțiunea, semijoncțiunea și diviziunea.

Definiția 2.17. Fie $U = A_1 \dots A_n$ mulțimea universală de attribute, $\text{dom}(U) = \{\text{dom}(A_i) \mid A_i \in U \ \& \ 1 \leq i \leq n\}$ și, $f_{\text{dom}}: U \rightarrow \text{dom}(U)$, o funcție ce pune în corespondență fiecărui atribut din U un singur domeniu (unele attribute pot avea aceleași domenii de valori). Fie $Db = \{R_1, \dots, R_m\}$ schema bazei de date asupra U , unde $U = R_1 \dots R_m$, și $db = \{r_1, \dots, r_m\}$ o bază de date cu schema Db . Fie $\Theta = \{=, \neq, <, \leq, >, \geq\}$ mulțimea de operații aritmetice de comparare asupra domeniilor din $\text{dom}(U)$ și fie O mulțimea de operații ce include cel puțin cele șase operații relaționale de bază. *Algebra relațională* asupra U , $\text{dom}(U)$, f_{dom} , Db , db , Θ și O este tuplul $A = (U, \text{dom}(U), f_{\text{dom}}, Db, db, \Theta, O)$. *Expresie algebrică* asupra A este orice expresie bine formată (în corespundere cu restricțiile impuse operațiilor relaționale) de relații din db și relații constante cu scheme din Db legate cu operații din O .

În expresiile algebrice, se admit parantezele și se presupune că operațiile binare nu au prioritate una față de alta, cu excepția priorității operației $\cap$ față de $\cup$. Într-o consecutivitate de relații legate cu aceeași operație parantezele pot fi omise, dacă, bineînțeles, operația este asociativă. Numele de relații $r_1, \dots, r_m$ servesc drept variabile, unde r_i parcurge mulțimea de relații cu schema R_i , $1 \leq i \leq m$. Să nu luăm în seamă ambiguitatea că r_i denotă atât numele unei relații, cât și o instanță curentă a unei relații cu schema R_i .

Exemplul 2.21. Fie relațiile *articole*(ART_ID ART_NUME ORAȘ BUCĂȚI PREȚ), *clienți*(CL_ID, CL_NUME, CL_ORAȘ, REDUCERE), *agenți*(AG_ID, AG_NUME, AG_ORAȘ, COMISION), *comenzi*(LUNĂ, CL_ID, AG_ID, ART_ID, BUCĂȚI, SUMĂ). Expresiile algebrei relaționale ce corespund unor interpelări puse la baza de date $db = (articole, clienți, agenți, comenzi)$ sunt redată mai jos.

- (a) Să se găsească numele clienților ce au comandat cel puțin un articol la prețul 0.50 lei.

$$\pi_{CL_NUME} ((\pi_{ART_ID} (\sigma_{PREȚ=0.50} (articole)) \mid \times \mid comenzi) \mid \times \mid clienți)$$

- (b) Să se găsească numele clienților ce n-au dat nici o comandă prin agentul a03.

$$\pi_{CL_NUME} (clienți \mid \times \mid (\pi_{CL_ID} (clienți) \setminus \pi_{CL_ID} (\sigma_{AG_ID="a03"} (comenzi))))$$

- (c) Să se găsească clienții ce-și plasează comenzile numai prin agentul a03.

$$\pi_{CL_ID} (clienți) \setminus \pi_{CL_ID} (\sigma_{AG_ID \neq "a03"} (comenzi))$$

- (d) Să se găsească articolele ce nu au fost comandate de vreun client din Chișinău printr-un agent cu sediul la Bălți.

$$\pi_{ART_ID} (articole) \setminus \pi_{ART_ID} ((\pi_{CL_ID} (\sigma_{CL_ORAȘ="Chișinău"} (clienți)) \mid \times \mid comenzi) \mid \times \mid \sigma_{AG_ORAȘ="Bălți"} (agenți))$$

- (e) Să se găsească numele clienților ce au comandat toate tipurile de articole la prețul 0.50 lei.

$$\pi_{CL_NUME} (clienți \mid \times \mid (\pi_{CL_ID \ ART_ID} (comenzi) \div \pi_{ART_ID} (\sigma_{PREȚ=0.50} (articole))))$$

- (f) Să se găsească clienții ce au comandat toate tipurile de articole comandate de oricine.

$$\pi_{CL_ID \ ART_ID} (comenzi) \div \pi_{ART_ID} (comenzi)$$

- (g) Să se găsească agenții ce au primit comenzi de livrare ale articolelor comandate și de clientul c004.

$$\pi_{AG_ID \ ART_ID} (comenzi) \div \pi_{ART_ID} (\sigma_{CL_ID="c004"} (comenzi))$$

- (h) Să se găsească clienții ce au comandat articolele art01 și art07.

$$\pi_{CL_ID} (\sigma_{ART_ID="art01"} (comenzi)) \cap \pi_{CL_ID} (\sigma_{ART_ID="art07"} (comenzi))$$

- (i) Să se găsească clienții ce au plasat comenzi prin agenții care au livrat articolul art03.

$$\pi_{CL_ID} (comenzi \mid \times \mid \pi_{AG_ID} (\sigma_{ART_ID="art03"} (comenzi)))$$

- (j) Să se găsească clienții ce au comandat articole cu o reducere la preț ca a clienților din Chișinău sau Iași.

$$\pi_{CL_ID} (clienți \mid \times \mid \pi_{REDUCERE} (\sigma_{CL_ORAȘ="Chișinău" \vee CL_ORAȘ="Iași"} (clienți)))$$

- (k) Să se găsească articolele, ce au fost comandate prin agenții, ce au primit comenzi de la clienții, ce au comandat cel puțin un articol printr-un agent, ce a servit clientul c001.

$$\pi_{\text{ART_ID}} (\text{comenzi} \mid \times \mid (\pi_{\text{AG_ID}} (\text{comenzi} \mid \times \mid (\pi_{\text{CL_ID}} (\text{comenzi} \mid \times \mid (\pi_{\text{AG_ID}} (\sigma_{\text{CL_ID}} = \text{"c001"} (\text{comenzi}))))))))))$$

Evaluarea unei expresii algebrice presupune efectuarea operațiilor asupra relațiilor din expresie în ordinea indicată de operatorii din expresie sau de paranteze. Rezultatul evaluării unei expresii este o relație. Deci orice expresie algebrică definește o funcție, ce aplică mulțimea de relații din expresie într-o singură relație. Schema acestei relații depinde de schemele relațiilor ce compun expresia algebrică. Notăm cu $\text{sch}(E)$ schema expresiei algebrice E .

Definiția 2.18. Schema expresiei algebrice $\text{sch}(E)$ se definește recursiv:

- (1) dacă E este o relație constantă, atunci $\text{sch}(E)$ este schema relației;
- (2) dacă E este relația r_i cu schema R_i , atunci $\text{sch}(E) = R_i$;
- (3) dacă E este una din expresiile $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$, $\sim E_1$ și $\sigma_F(E_1)$, unde F este o formulă aplicabilă lui E_1 , atunci $\text{sch}(E) = \text{sch}(E_1)$;
- (4) dacă E este $\pi_X(E_1)$, atunci $\text{sch}(E) = X$;
- (5) dacă E este $E_1 \div E_2$, atunci $\text{sch}(E) = \text{sch}(E_1) \setminus \text{sch}(E_2)$;
- (6) dacă E este una din expresiile $E_1 \times E_2$, $E_1 \mid \times \mid_F E_2$ și $E_1 \mid \times \mid E_2$, atunci $\text{sch}(E) = \text{sch}(E_1) \cup \text{sch}(E_2)$;
- (7) dacă E este $r_i \bowtie r_j$, unde relațiile r_i și r_j au schemele R_i și R_j , respectiv, atunci $\text{sch}(E) = R_j$.

2.4. Exerciții

- 2.1. Fie relațiile $r(A \ B \ C)$ și $s(B \ C \ D)$, $a \in \text{dom}(A)$ și $b \in \text{dom}(B)$. Care din expresiile algebrei relaționale de mai jos sunt corecte?
- (a) $r \cup s$;
 - (b) $\pi_B(r) \setminus \pi_B(s)$;
 - (c) $\sigma_{B=b}(r)$;
 - (d) $\sigma_{A=a, B=b}(s)$;
 - (e) $r \mid \times \mid s$;
 - (f) $\pi_A(r) \mid \times \mid \pi_D(s)$.

r	A	B	C
	a	b	c
	a	b ₁	c ₁
	a	b ₂	c ₁
	a ₁	b ₁	c

s	B	C	D
	b ₁	c ₁	d
	b ₂	c ₁	d ₁
	b ₂	c	d

Fig.2.26.

- 2.2. Fie r și s sunt relațiile din fig.2.26. Să se calculeze expresiile:
- (a) $\sim r$;

- (b) $\sim s$;
- (c) $\sigma_{A=a}(r)$;
- (d) toate expresiile formulate corect din exercițiul 2.1.
- 2.3. Fie relațiile $r(R)$ și $s(S)$, și fie $K \subseteq R$ este cheia relațiilor r și s . Care din relațiile de mai jos au în calitate de cheie mulțimea K ?
- (a) $r \cup s$;
- (b) $r \cap s$;
- (c) $r \setminus s$;
- (d) $\sim r$;
- (e) $\pi_K(r)$;
- (f) $r \mid X \mid s$.
- 2.4. Fie relația $r(R)$, $A \in R$, $a, b \in \text{dom}(A)$. Care din expresiile de mai jos sunt corecte?
- (a) $\sigma_{A=a, A=b}(r) = \emptyset$;
- (b) $\sigma_{A=a, A=b}(r) = \sigma_{A=a}(r)$.
- 2.5. Fie relațiile $r(R)$ și $s(S)$, $A \in R$ și $a \in \text{dom}(A)$. Confirmați sau infirmați următoarele egalități:
- (a) $\sigma_{A=a}(\sim r) = \sigma_{A=a}(r)$;
- (b) $\sigma_{A=a}(r \cap s) = \sigma_{A=a}(r) \cap s$.
- 2.6. Fie relația $r(\underline{A} \ B \ C)$. Ce se poate de spus despre numărul de tupluri ale relației $\sigma_{A=a}(r)$?
- 2.7. Fie relația $r(R)$, $X \subseteq R$, $A \in R$ și $A \notin X$. Să se găsească un exemplu ce ar infirma egalitatea $\pi_X(\sigma_{A=a}(r)) = \sigma_{A=a}(\pi_X(r))$.
- 2.8. Fie relațiile $r(R)$, $s(R)$ și $X \subseteq R$. Confirmați sau infirmați egalitățile:
- (a) $\pi_X(r \cap s) = \pi_X(r) \cap \pi_X(s)$;
- (b) $\pi_X(r \cup s) = \pi_X(r) \cup \pi_X(s)$;
- (c) $\pi_X(r \setminus s) = \pi_X(r) \setminus \pi_X(s)$;
- (d) $\pi_X(\sim r) = \sim \pi_X(r)$.
- 2.9. Fie relația $r(R)$, $A \in R$. Notăm $S = R \setminus A$. Care sunt corelațiile dintre dimensiunile relațiilor r , $\sigma_{A=a}(r)$, $\pi_A(r)$, $\pi_S(r)$, $\sigma_{A=a}(\pi_A(r))$?
- 2.10. Fie relațiile r și s . Să se arate că:
- (a) $s \mid X \mid s = s$;
- (b) $r \mid X \mid s = r \mid X \mid (r \mid X \mid s)$.
- 2.11. Fie relațiile $r(R)$, $s(S)$ și $A \in R$. Să se arate că $\sigma_{A=a}(r \mid X \mid s) = \sigma_{A=a}(r) \mid X \mid s$.
- 2.12. Fie relațiile $r(R)$, $r^1(R)$ și $s(S)$. Confirmați sau infirmați egalitățile:
- (a) $(r \cap r^1) \mid X \mid s = (r \mid X \mid s) \cap (r^1 \mid X \mid s)$;

$$(b) \quad (r \setminus r^1) | \mathbf{x} | s = (r | \mathbf{x} | s) \setminus (r^1 | \mathbf{x} | s);$$

$$(c) \quad \sim r | \mathbf{x} | \sim s = r | \mathbf{x} | s.$$

2.13. Fie relațiile $r(R)$, $s(S)$ și $R \cap S = \emptyset$. Să se arate că $(r | \mathbf{x} | s) \div s = r$.

2.14. Fie relațiile $r(R)$, $s(S)$, $s^1(S)$ și $S \subseteq R$. Să se arate că $s \subseteq s^1$ implică $r \div s^1 \subseteq r \div s$. Să se arate că afirmația inversă nu e corectă.

2.15. Fie relațiile $r(ABC)$ și $s(BCD)$. Care este schema expresiei algebrice

$$E = \pi_A(\sigma_{B=b}(\sim r)) | \mathbf{x} | \pi_B(\pi_{BC}(r) \setminus \pi_{BC}(s)).$$