# Eseu asupra dezvoltării analizei matematice

Analiza Matematică încadrează în sine calculul diferenţial şi integral al funcţiilor de variabilă reală şi complexă, teoria seriilor, teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale şi teoria calculului variaţional.

Analiza Matematică prezintă metode generale de rezolvare a problemelor cu un caracter atât matematic, cât şi aplicativ.

Unele idei şi metode de bază ale analizei matematice îşi trag rădăcinile încă din antichitate. Primele idei de calcul integral au apărut la filosoful grec Democrit (460-370 î. Hr.) care considera corpurile ca fiind formate dintr-un număr enorm de particule. În sec. IV î. Hr. pe baza teoriei relaţiilor între mărimi, construită de matematicianul grec Eudoxis (408-355 î. Hr.) a fost iniţiată metoda de demonstraţie a formulelor pentru calcularea ariei figurilor plane şi a volumelor corpurilor. Această metodă constă în aproximarea obiectelor studiate cu figuri sau corpuri simple, cum ar fi: dreptunghiuri, paralelipipede, cilindri, etc. Rezultate importante în acest domeniu îi aparţin lui Arhimede (287-212 î. Hr.)

Descrierea mişcării planetelor în sistemul solar, de către astronomul Ptolomeus (178-100 î. Hr.) cu ajutorul epiciclelor de ordin superior poate fi interpretată ca fiind prima încercare de descompunere a mişcării periodice (funcţiei periodice) în armonici simpli (sume parţiale a seriei Fourier). Practic el deja folosea ideea de funcţie trigonometrică ca secţiune a cercului; şi chir a alcătuit primul tabel al sinusurilor cu intervalul de 30'.

Tot în matematica antică au fost făcuţi primii paşi în studiul sumelor infinite. E bine cunoscut paradoxul lui Zenon (490-430 î. Hr.) ce constă în aceea că Ahiles nu poate ajunge broasca ţestoasă, deoarece în timp ce Ahiles parcurge jumătate din distanţă, broasca se îndepărtează şi ea şi cât timp Ahiles parcurge încă jumătate din distanţa rămasă, broasca se îndepărtează din nou şi aşa până la infinit. Aşa numitu-l paradox obţinut era legat de aceea că sumele infinite nu erau înţelese corect şi nu se presupunea că ele pot avea o valoare finită. Situaţii de tipul acesta, când paradoxul este înlăturat prin studierea mai intensă a modelelor sunt caracteristice întregii dezvoltări a matematicii. Referindu-ne la sumele infinite, constatăm că încă Arhimede lucra cu sume de termeni ai progresiei geometrice şi calcula valorile lor.

Odată cu dispariţia culturii antice în dezvoltarea matematicii intervine o perioadă de stagnare, care va dura până prin secolul XIV.

În acele vremuri grele, când în Europa ardeau flăcările inchiziţiei, dura războiul de o sută de ani dintre Franţa şi Anglia, iar Rusia era sub invazia tătarilor, călugărul francez Oresme (1323-1382), în liniştita sa chelie medita asupra sumelor infinite. El a construit un exemplu geometric prin care demonstra că suma infinită poate avea valoare finită $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1\right)$ şi a demonstrat divergenţa seriei armonice $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$ astfel arătând că condiţia de tindere la zero a termenului general nu este suficientă pentru convergenţa seriei. Aşa au fost făcuţi primii paşi principiali în studiul sumelor infinite – serii numerice.

Matematicianul scoţian Neper (1550-1617) a descoperit o nouă dependenţă funcţională – cea logaritmică şi a alcătuit primele tabele logaritmice ale funcţiilor trigonometrice. El a trăit într-un secol aprig şi într-o ţară săracă, pustiită de războaie religioase şi hărţuielile feudalilor. Neper în acele timpuri era considerat slujitorul diavolului.

În epoca Renaşterii, literatura şi ştiinţa au cunoscut o dezvoltare intensă, s-a trezit interesul faţă de cultura antică, multe merite ale căreia fusese deja pierdute fără urmă. Nu uşor au fost găsite şi scrierile păstrate, aşa că de fapt matematicienii au fost nevoiţi să redescopere ceea ce se cunoştea încă în antichitate.

Aşa cum Italia era centrul Renaşterii, nu este de mirare că anume în lucrările matematicienilor italieni ai acestei epoci: Bombeli (1530-1572), Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Fermat (1601-1665), etc. s-a obținut un progres semnificativ în dezvoltarea matematicii. Dar desigur că şi în multe alte țări în aceiaşi perioadă de timp lucrau mulți oameni de vază, cum ar fi matematicianul şi astronomul german Kepler (1571-1630), matematicienii francezi Descartes (1596-1650) şi Pascal (1623-1662). Aceşti învățați au îmbogățit matematica cu multe descoperiri, stimulând progresul multor direcții actuale. În particular, cercetările lor au pus baza calculului integral şi diferențial.

În sec. XVI la matematicienii italieni în procesul rezolvării ecuațiilor algebrice au apărut numerele complexe. În lucrarea lui Bombeli: „Algebra” au fost descrise regulile de lucru cu ele, dar abia în 1799 matematicianul german Gauss (1777-1855) a dat interpretarea lor geometrică pe plan. Folosind metoda antică de divizare, Kepler în cartea sa: „Noua stereometrie a butoaielor de vin” a aflat volumul multor corpuri de rotație. Noi idei de calculare a ariei şi volumului a dat discipolul lui Galileo – Kavalieri. El a formulat principiul ce-i poartă numele, conform căruia două corpuri au acelaşi volum, dacă secțiunile lor cu acelaşi plan au arii egale. Din punctul de vedere al matematicii contemporane acest principiu poate fi interpretat ca fiind primul pas de reducere a integralei multiple la una iterată.

Descartes, un pilon important al geometriei (inventatorul metodei coordonatelor carteziene) a avut un aport deosebit şi în dezvoltarea analizei matematice: el a introdus noțiunea de variabilă şi a rezolvat un şir de probleme referitoare la calculul ariei şi ducerii tangentelor, ceea ce a reprezentat un pas nou în apariția teoriei geometrice de integrare şi diferențiere.

Fermat prin cercetările sale a îmbogățit multe ramuri ale matematicii, dar mai cu seamă: teoria numerelor, algebra şi geometria. El, ca şi Descartes, a dezvoltat în geometrie metoda coordonatelor, el practic manipula cu noțiunea de derivată pentru polinoame algebrice şi funcția putere de exponent fracționar. Pentru apariția calculului diferențial un rol important l-a jucat metoda inventată de el referitoare la aflarea punctelor de extrem – prima metodă analitică de acest tip (până atunci problemele de extrem se rezolvau pe cale analitică). De aceea este şi normal că condiția necesară pentru extremul unei funcții diferențiabile – egalitatea cu zero a derivatei sale – îi poartă numele. Fermat s-a ocupat şi cu metoda cuadraturilor.

Pascal este cunoscut în matematică datorită nemaipomenitelor sale lucrări de geometrie, algebră şi teoria probabilității. El primul a formulat exact şi a aplicat în demonstrația teoremelor metoda inducției matematice. Aportul său în dezvoltarea analizei matematice este exprimat prin metodele geometrice de aflare a ariei figurilor plane, a volumului şi ariei suprafețelor.

Descartes, Fermat şi Pascal de fapt ştiau să deriveze polinoame şi să verifice tangentele la parabolele de orice ordin, iar tripletul de infiniți mici: $dx$, $dy$, $ds$ deja se întâlnea în lucrările lui Pascal.

Introducerea noțiunilor de bază a calculului integral şi diferențial – derivata şi integrala; şi a diferitor proprietăți şi aplicații ale lor îi aparțin mecanicului, fizicianului, matematicianului şi teologului englez Newton (1643-1727) şi filosofului, matematicianului, istoricului, fizicianului şi diplomatului german Leibniz (1646-1716). Calculul diferențial a fost format pe baza lucrărilor precedente referitoare la problemele despre tangentele duse la curbe şi la aflarea valorilor extreme (Appolonius Pergamski (260-170 î. Hr.), Arhimede, Fermat, Descartes, etc.). Calculul integral s-a dezvoltat pe baza problemelor referitoare la calcularea ariilor şi volumelor (Democrit, Eudoxis, Arhimede, Kepler, Cavalierri, Fermat, Decartes, Pascal, etc.).

Primul matematician ce şi-a dat seama despre legătura dintre problema ducerii tangentei şi problema aflării ariei figurii generate de curba respectivă, a fost învățătorul lui Newton – Barrow (1630-1679). Dar anume Newton şi Leibniz au inventat metoda de rezolvare a problemei bazată pe noțiunile de derivată şi integrală („fluxion” şi „fluent” în terminologia lui Newton), au înțeles importanța lor principială şi au soluționat cu ajutorul lor multe probleme cu caracter atât pur matematic, cât şi aplicativ (în special în mecanică). Iată de ce ei pe drept sunt considerați creatorii calculului diferențial şi integral, sau cum i se mai spune: analiza infiniților mici.

Newton reieşea din mărimea continuă – fluentul, ce reprezenta o abstracție a mişcării mecanice, argumentul fluentului fiind timpul. Vitezele de schimbare a fluenților Newton i-a numit fluxioni. El a studiat problema aflării fluxionilor (vitezelor) după fluenți (legile mişcării), despre aflarea fluenților (primitivei) după fluxioni (aflarea legii de mişcare dacă se cunoaşte viteza), despre aflarea relației dintre fluenți după relațiile date dintre fluxioni (integrarea ecuațiilor diferențiale). Un rol important în aceste cercetări ale lui Newton l-au jucat nu numai metodele mecanice, dar şi cele geometrice.

Lui de asemenea îi aparțin şi studii intense din teoria seriilor, algebră, teoria interpolării funcțiilor. Pentru el metoda de bază a rezolvării ecuațiilor diferențiale era descompunerea funcțiilor în serii de puteri întregi şi fracționare. Newton nu studia convergența seriilor respective, deoarece prin fluent el considera doar funcții de acest tip şi seriile corespunzătoare lor erau de fapt convergente. El a inventat seriile, ce mai târziu au luat numele elevului său Taylor, şi a aflat descompunerile în serii de puteri a tuturor funcțiilor elementare.

Viața ştiințifică a lui Newton a fost extrem de variată: el s-a ocupat cu optica, a creat primul în lume telescop cu oglinzi – reflectorul, a dezvoltat noua teorie a luminii şi culorilor, a creat unicul sistem al mecanicii terestre şi cosmice pe baza legii atracției şi a celor trei legi ale mecanicii ce-i poartă numele. De asemenea Newton s-a ocupat mult de alchimie şi teologie. Dar nu totul a fost bine în viața lui Newton. El a fost nevoit să lupte pentru unele descoperiri ale sale. De exemplu Huck (1635-1703) a luat cuvântul la Şedința Societății Regale Londoneze pretinzând prioritatea descoperirii legii atracției. Relațiile dintre ei se înrăutățiseră până într-atât că Newton, odată devenit preşedinte al Societății Regale Londoneze (1703), a ordonat ca după moartea lui Huck să fie distruse toate portretele lui. Acest ordin a fost urmat atât de bine încât nu s-a păstrat nici un portret al lui Huck.

Metoda sa despre fluxioni şi fluenți Newton nu a publicat-o din start, ci doar în 1686 în lucrarea sa „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” („Inițieri matematice în filozofia naturală”). Leibniz a publicat calculul său al infiniților mici cu doi ani mai devreme, ceea ce i-a dat posibilitatea lui şi discipolilor săi de a pretinde la prioritatea în crearea calculului diferențial şi integral. Conflictul referitor la această prioritate a durat mulți ani şi uneori a avut un caracter destul de aprig.

La Leibniz analiza infiniților mici, spre de Newton, este relatată ca un studiu algebric formal. Lui îi aparțin notațiile de azi ale integralei şi diferențialei. El a stabilit că operațiile de integrare şi derivare sunt reciproc inverse, a demonstrat formula pentru derivata de ordin superior a produsului de funcții, a indicat metoda de aflare a extremelor şi punctelor de inflexiune cu ajutorul analizei infiniților mici, a pus baza integrării funcțiilor raționale, a găsit metode de integrare a unui şir de ecuații diferențiale.

El de asemenea a dat o importanță deosebită descompunerii funcțiilor cercetate în serii de puteri pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Leibniz a inventat o maşină de calcul şi a indicat o metodă grafică de integrare.

Aportul lui Leibniz a fost multilateral. În fizică el a introdus în calitate de măsură „forța vie” (energia cinetică), a demonstrat legea păstrării forțelor vii, a formulat principiul celui mai mic impuls, ce a luat mai târziu denumirea de principiul lui Mopertui (1698-1759) şi a obţinut un şir de alte rezultate importante.

Un rol deosebit îl au lucrările lui Leibniz în dezvoltarea logicii şi filozofiei.

El de mai multe ori s-a întâlnit cu ţarul rus Petru cel Mare şi la rugămintea lui a alcătuit un şir de proiecte de dezvoltare a educaţiei şi de organizare politică în Rusia.

O continuare a dezvoltării calculului diferenţial şi integral poate fi urmărită în lucrările matematicianului Euler (1707-1783) şi a trei generaţii ale familiei Bernoulli: fraţii Iacob (1654-1705) şi Iohan (1667-1748) şi a nepotului Nicolai (1687-1759), feciorilor lui Iohan – Nicolai (1695-1726) şi Daniel (1700-1782), nepoţilor lui Iohan – Iohan jr. (1744-1807) şi Iacob jr. (1759-1789); francezilor D'Alembert (1717-1783), Clairau (1713-1765), Lagrange (1736-1813), etc.

Fraţii Iacob şi Iohan Bernoulli aplicau reuşit metodele de integrare şi derivare pentru soluţionarea multor probleme de geometrie, mecanică şi fizică. Împreună cu Euler, Leibniz şi Lagrange ei au pus bazele calculului variaţional. Lagrange în 1797 a fost propusă metoda factorilor pentru rezolvarea problemelor referitoare la extremele condiţionate a funcţionalelor. Iacob şi Daniel Bernoulli au obţinut rezultatele de bază în teoria probabilităţii. Iohan, Daniel şi Iohan jr. Bernoulli erau membri străini de onoare, iar nepoţii Nicolai şi Iacob jr. Bernoulli – membri ai Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg.

Euler a lăsat o moştenire ştiinţifică enormă. El a lărgit mult universul analizei matematice, studiind funcţiile de argument complex, a dedus aşa-numita ecuaţie Euler-D'Alembert (sau Cauchy-Riemann), a studiat proprietăţile funcţiilor elementare de variabilă complexă, în caz particular a dedus formulele de legătură dintre funcţiile trigonometrice (el a introdus notaţiile de azi ale lor) şi funcţia exponenţială (formulele Euler), el a obţinut condiţia necesară de extrem a funcţionalelor de tip integral (ecuaţia lui Euler), el a creat ca disciplină aparte teoria ecuaţiilor diferenţiale obişnuite şi a pus bazele teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Un aport deosebit a adus Euler şi în teoria seriilor, el a introdus în matematică tipuri noi de serii (de exemplu seriile trigonometrice), inclusiv şi serii divergente, a aflat sumele unui număr impunător de serii concrete şi a obţinut descompunerea funcţiilor elementare în serii şi produse infinite pe domenii complexe.

Seriile divergente puteau fi întâlnite în lucrările matematicienilor şi mai devreme. De exemplu încă în anul 1703 monahul Gandy, punând în diferite moduri parantezele în seria divergentă $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, obţinea suma ei egală cu 0 sau 1. Astfel el motiva posibilitatea creării de către Dumnezeu a lumii din nimic.

Euler considera raţional utilizarea seriilor divergente în matematică şi a propus metoda generalizată de sumare.

Euler este considerat părintele funcţiilor speciale. El a creat teoria gamma- şi beta-funcţiilor, a stabilit proprietăţile integralelor eliptice, funcţiilor hiperbolice şi cilindrice, dzeta-funcţiilor, câtorva teta-funcţii, logaritmul integral şi a unor clase importante de polinoame speciale. El a pus baza direcţiilor principale a teoriei numerelor. Sunt nelimitate meritele lui Euler şi în alte ramuri ale matematicii şi aplicaţiilor ei. El a fost academicianul Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg şi a lucrat în Rusia din 1727 până în 1741 şi din 1766 până la moartea sa. Între anii 1741-1766 Euler a lucrat la Academia de Ştiinţe din Berlin.

Un rol important în clarificarea noţiunii de funcţie l-au jucat dezbaterile pe această temă dintre Euler, D'Alembert şi Daniel Bernoulli despre natura soluţiei ecuaţiei undelor. Euler considera că funcţia reprezintă o curbă arbitrară, D'Alembert – că este o expresie analitică, D. Bernoulli, insă a obţinut soluţia în formă de serie trigonometrică, astfel exprimându-şi părerea că orice funcţie periodică (intuitiv prin funcţie se înţelegea una continuă) poate fi descompusă într-o serie trigonometrică, dar el nu cunoştea încă formulele de calcul a coeficienților. D'Alembert avea îndoieli referitor la acest lucru şi folosea în lucrările sale doar serii de puteri.

În 1805 matematicianul francez Fourier (1768-1830) din nou şi-a expus părerea despre posibilitatea descompunerii funcțiilor în serii trigonometrice şi a indicat formulele de calcul a coeficienților seriilor respective, ce în prezent îi poartă numele (dar aceste formule erau cunoscute şi de Euler). Şi, abia în 1829 matematicianul francez Dirichlet (1805-1859) pentru prima dată a demonstrat convergența seriilor Fourier corespunzătoare funcțiilor continue şi monotone pe porțiuni.

Neajunsul calculului infiniților mici creat in secolele XVII-XVIII consta în lipsa definiției exacte a limitei funcției, ceea ce nu permitea stabilirea unei granițe exacte a aplicării metodei infiniților mici. În rezultat uneori se obțineau rezultate false, ce contraziceau realitatea. Se propuneau diferite teorii de motivare a infiniților mici, de exemplu teoria „compensării greşelilor", care ea însăşi necesita motivații.

Doar în sec. XIX metodele analizei matematice au obținut motivația logică pe baza definiției exacte a limitei funcției. Această motivație în primul rând în lucrările lui Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848), Dirichlet, Weierstrass (1815-1897) şi Riemann (1826-1866).

După lucrările lor, analiza matematică a scăpat de contradicțiile interne observate la acel moment, şi a devenit accesibilă unui cerc mai larg de oameni de ştiință.

Prima definiție corectă a limitei şirului a fost dată de matematicianul ceh Bolzano în 1817 şi de francezul Cauchy în 1821. Cauchy a obținut criteriul său de convergență a şirului, bazat pe principiul segmentelor incluse, pe care el îl considera evident. Cauchy şi Bolzano au dat de asemenea şi definiția limitei funcției, au introdus noțiunea de funcție continuă şi au demonstrat un şir de proprietăți de bază, în particular şi teorema despre valorile intermediare.

Cu părere de rău o mare parte din rezultatele obținute de Bolzano nu au fost publicate pe parcursul vieții sale, rezultatele publicate au trecut neobservate de matematicienii acelor timpuri. Lucrările sale au devenit cu adevărat cunoscute abia în secolul XIX. De exemplu, prima funcție continuă pe toată axa reală, ce nu are derivată în orice punct, pentru prime dată a fost indicat de Bolzano în 1830, dar a fost publicat abia în 1930. De aceea un exemplu analog construit de Weierstrass în 1860 şi publicat în 1872 a fost mult mai cunoscut.

Teorema despre mărginirea funcției continue pe un segment şi despre atingerea valorilor minimală şi maximală a fost obținută de Weierstrass prin anii 1860. Matematicianul german Heine (1821-1881) în 1870 a formulat noțiunea de funcție uniform continuă şi a demonstrat continuitatea uniformă a funcției continue pe segment.

Teoria numerelor reale îşi are rădăcinile în lucrările lui Gauss, Bolzano, Cauchy şi s-a format pe deplin în lucrările matematicienilor germani: Dedekind (1831-1916), Weierstrass şi Cantor (1845-1918). Axiomele mulțimii numerelor reale au fost inițial formulate de Dedekind în 1888 şi de italianul Peano (1858-1932) în anul 1891.

Una din sursele de bază ale algebrei de azi au fost lucrările lui Abel (1802-1829) şi Galois (1811-1832) referitoare la teoria ecuațiilor algebrice.

În 1823 Cauchy a dat definiția corectă a integralei definite din funcții continue ca limita sumelor integrale. Definiții analoage pentru clase mai largi au dat Riemann în 1853, iar apoi Darboux (1842-1917) în 1879 şi Jordan (1838-1922) în 1892. Noi idei în noțiunea de integrală a Stieltjes (1856-1894) şi francezii Borel (1871-1956), Lebesgue (1875-1941).

Noțiunea generală de funcție reală, ca corespondență univocă, a fost formulată de Euler. O clasificare mai intensă: ca corespondență dată, ca operație algebrică sau ca simplă descriere, este dată în cartea matematicianului francez Lacroix (1806), de care în particular se folosea Lobacevski. Aceste definiții date în termenii variabilelor dependente au separat sensul general al funcției de noțiunea de expresie analitică.

În 1940 Menişov (1892-1988) a demonstrat că orice funcție măsurabilă finită aproape peste tot poate fi prezentată ca limita aproape peste tot a unei serii trigonometrice.

Prima demonstrație corectă a existenței integralei dintr-o funcție discontinuă a fost dată de Darboux (demonstrația dată mai devreme de Cauchy nu era corectă). Diferite condiții necesare şi suficiente de integrare a funcțiilor discontinue au fost date de matematicienii germani Riemann şi Dubois-Raymond (1831-1889), iar mai apoi de matematicianul francez Lebesgue.

Multe integrale improprii concrete au fost calculate încă în secolul XVIII, însă doar Cauchy a dat definiția exactă a integralei improprii şi a indicat metodele generale de calculare a lor.

Integralele absolut convergente le-a introdus Dirichlet în 1854, iar cele uniform convergente – matematicianul belgian Valley Pussen (1866-1962) în anul 1892. Noțiunea de convergență uniformă a apărut în lucrările fizicianului şi matematicianului englez Stokes (1819-1903) şi a germanului Zeidel (1821-1896) în anii 1847-48, iar apoi la Cauchy în 1853.

Integrala dublă pentru prima dată a apărut încă la Euler în 1770; el a indicat metoda reducerii ei la una iterată. Lagrange studia deja nu numai integrale duble ci şi triple. Regula de schimbare a variabilelor în integrala dublă şi triplă a fost obținută de Ostrogradski (1801-1861) în 1836, iar pentru integrala multiplă – de matematicianul german Jacobi (1804-1852) în 1842. La schimbul de variabile în integrala multiplă Jacobi pentru prima dată a introdus determinantul funcțional ce îi poartă numele.

Formula lui Green a fost obținută de Euler în 1771-1772, iar apoi independent de matematicianul englez Green (1793-1841) în 1828. Formula Gauss-Ostrogradski a fost obținută de Gauss în 1813 pentru un caz particular, iar de Ostrogradski în 1828-1834 pentru funcții de orice număr de variabile. Formula Stokes pentru prima dată a fost de matematicianul şi fizicianul englez Thomson (1824-1907), iar Stokes pentru prima dată a introdus-o în programa studențească. Formula generalizată Stokes a fost obținută în 1889 de matematicianul francez Poincaré (1854-1912), iar în forma actuală de matematicianul francez Cartin (1869-1952).

Teoria funcțiilor analitice de argument complex îşi trage rădăcinile din lucrările lui Cauchy, care a început sistematic a dezvolta această teorie. Termenul funcție analitică a fost propus de Lagrange.

În teoria funcțiilor de variabilă complexă un rol important îl joacă teoria funcțiilor eliptice, inițiată de Euler, Abel, Weierstrass şi matematicianul francez Ermit (1822-1901).

În teoria seriilor un aport fundamental îl au lucrările lui Abel, Fourier, Dirichlet, Hardy (1877-1947), Weyl (1885-1955).

S-a remarcat Cauchy şi în teoria ecuațiilor diferențiale (teoremele de bază de existență a soluțiilor, metode de integrare a ecuațiilor, punerea aşa-zisei probleme Cauchy, etc.). Cercetările lui şi-au găsit dezvoltarea de mai departe în lucrările elevei lui Weierstrass – S. Kovalevskaia (1850-1891) (teorema Cauchy-Kovalevskaia).

Un rol însemnat în analiza matematică l-a jucat şi Gauss, mai cu seamă în studiul seriilor şi a funcțiilor eliptice.

Aplicarea incorectă a seriilor divergente deseori ducea la rezultate greşite. Şi, ca consecință a lucrărilor lui Cauchy de sistematizare a analizei matematice pe baza definiției stricte a limitei, seriile divergente au fost pentru mult timp izgonite din analiza matematică. Abia la sfârşitul secolului XIX – începutul secolului XX în lucrările matematicianului italian

Cezaro (1859-1906), matematicianului rus Voronov (1868-1908), matematicianului german Teplitz (1881-1940) a fost formulată teoria strictă a seriilor divergente şi au fost găsite multe aplicații utile ale lor. Prima serie Fourier a unei funcții continue, ce diverge în unele puncte a fost construită în 1876 de Dubois-Raymond.

Multe metode ale analizei matematice îşi trag rădăcinile din lucrările lui Poincaré. El a introdus noțiunea de serie asimptotică şi a alcătuit metode asimptotice şi calitative de studiere a ecuațiilor diferențiale, a construit teoria funcțiilor automorfe.

Calculul vectorial a apărut la matematicianul şi astronomul irlandez Hamilton (1805-1865), ce a construit teoria quaternionilor. Spațiul liniar abstract a fost introdus în 1888 de Peano. Spațiile funcțiilor continue au fost studiate de italienii Volterra (1860-1912), Arzzela (1847-1927), Dini (1845-1918), englezii Hardy (1877-1947), Littlewood (1866-1927).

Volterra şi Fredholm (1866-1927) au construit teoria ecuațiilor integrale liniare. Matematicienii germani Hilbert (1862-1943) şi Schmidt (1876-1959) prin anii 1902-1907 au pus bazele teoriei spectrale a ecuațiilor diferențiale, iar teoria spectrală generală îşi are rădăcinile în lucrările lui Weyl. Teoria asimptotică a spațiilor Hilbert a fost construită de matematicianul american Stone (1903) şi de matematicianul german Newman (1903-1957). Definiția abstractă a spațiilor liniare normate a apărut la începutul anilor 20 în lucrările matematicianului polonez Banach (1892-1945), matematicianului austriac Hahn (1879-1934) şi matematicianului american Winer (1894-1964). Noțiunea de spațiu metric a fost introdusă în 1906 de matematicianul francez Freshe (1878-1973).

Un rol important în dezvoltarea analizei matematice l-a jucat teoria numerică, ce-şi are începutul în lucrările lui Euclid şi Diofantes şi continuă la Fermat, Euler, Gauss, Dirichlet, Cebîşev (1821-1894), Hardy, Littlewood, Hadamard (1865-1963), Vinogradov (1891-1983).

Un rol important în dezvoltarea analizei matematice l-au jucat matematicienii ruşi. În teoria funcțiilor – I. Cebîşev (1821-1968), A. Markov (1856-1922), Bernştein (1880-1968), D. Egorov (1869-1931), A. Kolmogorov, N. Luzin. În teoria ecuațiilor diferențiale – A. Leapunov (1857-1918), I. Petrovskii (1901-1973), M. Lavrentiev (1900-1980), M. Keldîş (1911-1978).

Un nou pas în dezvoltarea calculului variațional a fost teoria proceselor optimale, construită de Pontreaghin.

Un important pas în dezvoltarea matematicii secolului XX a fost inițierea teoriei funcțiilor generalizate. Pentru prima dată ele au apărut în lucrările lui Sobolev (1908-1989), iar teoria lor a fost dezvoltată şi sistematizată de Schwartz (1915).

E interesantă dezvoltare analizei matematice şi din punct de vedere filosofic. Ca şi matematica în genere, analiza matematică este ştiința ce studiază un tip special de structuri logice, descrise de careva relații dintre elementele sale. Aceste structuri, numite matematice, prezintă în sine realitatea obiectivă. „Nici 30 de ani, nici 30 de secole nu acționează asupra frumuseții realităților geometrice” – spunea scriitorul şi matematicianul englez Carol (1832-1898). „Aşa o teoremă ca: pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor, este tot atât de frumoasă azi, – continua el-ca şi în ziua când Pytagoras a descoperit-o.”

Uneori în ideile matematice se găsesc contradicții, care de fapt nu există. Pentru a ne convinge, trebuie să reieşim din definiții exacte şi corect să ne descurcăm în noțiunile studiate. De exemplu în definiția numărului complex $i=\sqrt{-1}$ nu vor exista contradicții dacă vom înțelege corect simbolul $\sqrt{-1}$. Contradicțiile, s-ar părea, constau în aceea că pe de o parte numărul i este rădăcină pătrată, de aceea pătratul lui este egal cu expresia de sub radical, adică negativă; dar pe de altă parte orice pătrat este pozitiv. Această contradicție aparentă se obține în rezultatul acelui fapt că asupra elementului $i$, care nu este un număr real a fost aplicată proprietatea numerelor reale, care nu este neapărat adevărată şi pentru numerele complexe.

Lipsa contradicției în egalitatea $i^2 = -1$ devine clară dacă introducem numerele complexe $z$ ca perechi de numere reale $(x, y)$, iar operația de înmulțire a numerelor complexe $z_1 = (x_1, y_1)$ şi $z_2 = (x_2, y_2)$ prin relația: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Prin aşa o definire a numerelor complexe, numărul i va fi reprezentat de (0,1). Şi atunci este clar că nu se observă nici un fel de contradicție în scrierea: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$ .

Noțiunea de funcție a început a se cristaliza după ce Descartes a introdus noțiunea de mărime variabilă. Newton analiza mărimile variabile fluenții, dependenți de timp. El totdeauna presupunea că fluenții pot fi prezentați în formă de serii de puteri, adică înțelegea prin funcție o careva expresie analitică. Termenul de funcție a fost pentru prima dată definit de Leibniz, pentru notarea mărimilor variabile, ce depind de alte variabile. Prima încercare de a formula exact definiția funcției îi aparține lui Euler: „Când careva cantități depind de altele astfel încât la schimbarea ultimelor se schimbă şi ele, atunci primele se numesc funcții de cele din urmă. Această denumire are un aspect atât de larg, că conține toate metodele prin care o cantitate poate fi definită cu ajutorul altora. Deci, dacă $x$ este o cantitate constantă, atunci toate cantitățile care depind cumva de $x$, adică se definesc prin $x$ se numesc funcțiile lui… Este interesant de clarificat că din definiția dată de Euler: „ ...toate cantitățile care cumva depind de $x$...” rezultă că el înțelegea prin funcție corespondența între mulțimi numerice. Această idee este reflectată în definiția noțiunii de funcție, formulată în 1806 de Lacroix: „Pentru a arăta că o careva cantitate depinde de una sau mai multe altele, ca o careva operație sau chiar ca legătură, pe care nu o poți exprima algebric, dar care există şi este determinată de careva condiții, se spune că prima este funcție de celelalte”. De fapt de această definiție se folosea şi Lobacevski în cursul său către studenți de calcul diferențial şi integral.

O mare parte a matematicienilor secolelor XVIII-XIX legau noțiunea de funcție cu noțiunea de variabilă, şi astfel, cu noțiunea de timp şi spațiu, fără care este de neînchipuită careva schimbare. Astfel I. Bernoulli a formulat definiția funcției în următorul mod: „Funcție de o mărime variabilă … se numeşte cantitatea formată printr-un oarecare mod din variabilă şi constante.”

Punctul de vedere al funcției ca obiect, care este dată nu numaidecât prin expresie analitică, dar ca dependență a unei mărimi variabile de alta s-a dezvoltat în lucrările lui Cauchy, Bolzano, Fourier, Dirichlet. În final definiția funcției a luat următoarea formă: „Mărimea variabilă $y$ este funcție de mărimea variabilă $z$, dacă la schimbarea valorii variabilei $x$, se schimbă şi $y$ conform unei careva legi. Variabila $z$ se numeşte dependentă, iar $x$ – independentă.” La prima vedere în definiția de mai sus nu sunt neclarități, dar la o analiză mai intensă nu este greu de observat că această definiție necesită unele specificări.

Noțiunea de funcție poate fi descrisă, utilizând doar noțiunile de mulțime şi corespondență. Definiția funcției ca corespondență dintre elementele a două mulțimi arbitrare, nu neapărat numerice, a fost formulată în 1887 de Dedekind. Fie că sunt date două mulțimi de orice natură $X$ şi $Y$. Dacă oricărui element $x$ din $X$ îi este pus în corespondență un singur element $y$ din $Y$, notat $y = f(x)$, şi dacă orice element $y$ din $Y$ este pus în corespondență măcar unui element $x$ din $X$, atunci această corespondență se numeşte funcție $y = f(x)$, definită pe mulțimea $X$ cu valori în mulțimea $Y$. În această descriere nu este noțiunea de variabilă şi deci nici un fel de „mişcare”. Astfel, în studierea noțiunii de funcție, a fost parcurs un drum lung de la valori variabile, de la noțiunea de mişcare şi de la expresii analitice, prin negarea mişcării la noțiunea de corespondență staționară dintre elemente.

Definind funcția ca o corespondență, apare întrebarea: ce este o corespondență? Noțiunea de corespondență poate fi redusă la noțiunile mai simple de element şi mulțime. Dar trebuie de menționat că deja în aceste noțiuni este prezentă implicit corespondența: pentru a stabili dacă un careva element aparține mulțimii date, trebuie ca oricărui element studiat să-i fie pusă în corespondență o careva proprietate conform căreia, elementul aparține mulțimii. În acest sens noțiunea de corespondență este axiomatică. Această idee a fost expusă clar de matematicianul american Cech: „Noțiunea de funcție sau orice noțiune ce se reduce la ea, suntem nevoiți să o considerăm nedefinită.”

*După L. Kudreavțev „Краткий курс математического анализа”*