Examenul de bacalaureat la matematica, 18 iunie 2007
Profilul umanist

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrie pe foaia de test in spatiul indicat numai rezultatele. Poti folosi maculatorul pentru efectuari de calcule.

1. Numarul $5 \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[5]{32}$ este egal cu $\boxed{\quad\quad}$.

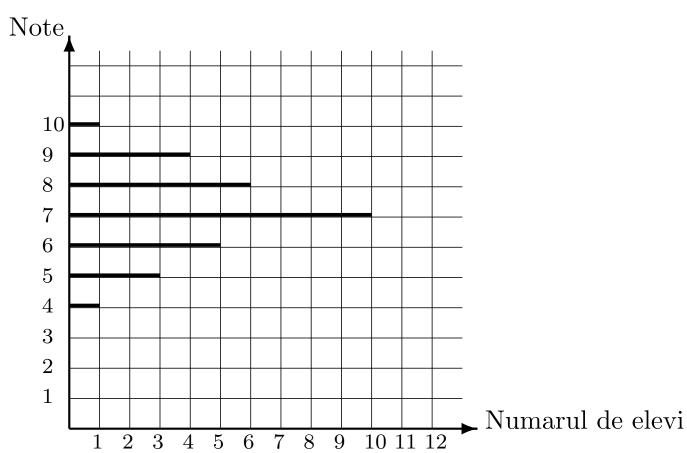
2. Modulul numarului complex $z = 3 + 4i$ este egal cu $\boxed{\quad\quad}$.

3. Polinoamele $P(X) = 1 + 6X - X^2$ si $Q(X) = a - (X + b)^2$ sunt egale, daca $a = \boxed{\quad\quad}$ si $b = \boxed{\quad\quad}$.

4. Numarul $C_4^3 - A_5^1$ este egal cu $\boxed{\quad\quad}$.

II. In itemii 5-8 raspunde la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

5. Diagrama alaturata reprezinta rezultatul unui examen. Determina nota medie obtinuta de elevi la acest examen si dominanta acestei serii statistice.



6. Determina media aritmetica a solutiilor ecuatiei

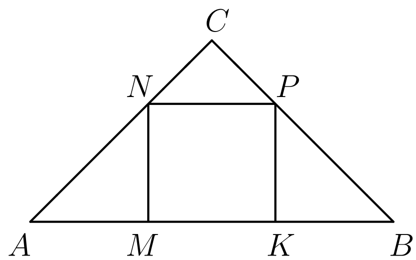
$$x^3 - 2x^2 - x - 4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. Calculeaza $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{1 - x^2}$, daca $a = 5i^{21} - (1 + i)^3 - 3i - 1$.

8. Tangenta la graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3^{x+1}}{\ln 27}$ in punctul $A(x_0; y_0)$ formeaza cu directia pozitiva a axei absciselor un unghi de 45^o. Determina coordonatele punctului A.

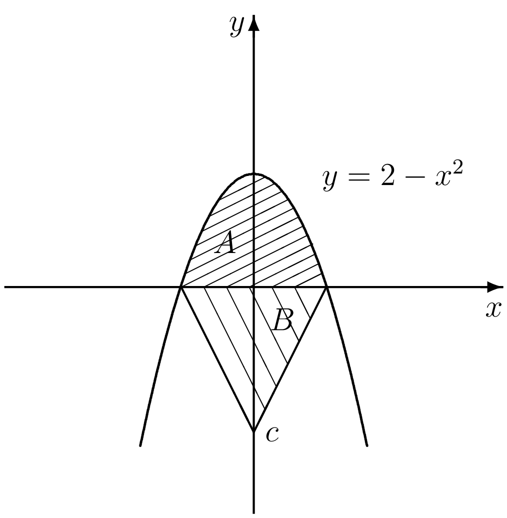
III. Rezolva problemele 9-12 si scrie pe foaia de test rezolvarile complete.

9. Intr-un triunghi dreptunghic isoscel este inscris un patrat, astfel incat doua varfuri se afla pe ipotenuza, iar celelalte doua se afla pe catete. Determina perimetrul patratului, daca aria triunghiului este de 36 cm^2.



10. Determina cel mai mare numar natural n pentru care este adevarata inegalitatea $\log_{0,2} n + \log_{\frac{n}{5}} n > 0$.

11. Determina numarul c pentru care ariile figurilor A si B din desenul alaturat sunt egale.



12. Un vas fara capac are forma unui cilindru. Inaltimea vasului este de 1,5 m; iar diametrul bazei reprezinta 40% din inaltime. Determina daca este suficient 1 kg de vopsea pentru a vopsi integral vasul, in interior si exterior, daca se stie ca pentru 1 m^2 de suprafata se consuma 150 g de vopsea.

Solutii

1. $5 \cdot \sqrt{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \sqrt[5]{32} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt[5]{2^5} = 5^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2 = 5^2 - 6 = 25 - 6 = 19.$

2. Cum modulul $|z|$ numarului complex $z = a + bi$ este egal cu $\sqrt{a^2+b^2}$, se obtine

$$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

3. Utilizand definitia egalitatii a doua polinoame se obtine:

$$1 + 6X - X^2 = a - X^2 - 2bX - b^2 \Leftrightarrow 1 + 6X - X^2 = a - b^2 - 2bX - X^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a - b^2, \\ 6 = -2b, \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a - 9, \\ b = -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10, \\ b = -3. \end{cases}$$

4. $C_4^3 - A_5^1 = \dfrac{4!}{3!1!} - \dfrac{5!}{4!} = \dfrac{4}{1} - \dfrac{5}{1} = -1.$

5. Utilizand definitia mediei aritmetica ponderate, se obtine:

$$m = \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 1}{1 + 3 + 5 + 10 + 6 + 4 + 1} = \frac{213}{30} = \frac{71}{10} = 7,1.$$

Cum dominanta reprezinta valoarea caracteristicii cu frecventa cea mai mare, rezulta $Mo = 7$.

6. Cum membrul din partea dreapta a ecuatiei este egal cu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 12 + 4 + 4 = -6,$$

se obtine ecuatia

$$x^3 - 2x^2 - x - 4 = -6$$

echivalenta succesiv cu

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x - 1 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1, \\ x = -1, \end{array} \right.$$

de unde pentru media aritmetica a solutiilor se obtine $\dfrac{2 + 1 + (-1)}{3} = \dfrac{2}{3}$.

7. Determinam numarul a, tinand seama ca $i^{21} = i,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,$

$$a = 5i^{21} - (1 + 3i + 3i^2 + i^3) - 3i - 1 = 5i - 1 - 3i + 3 + i - 3i - 1 = 1.$$

Atunci

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-(x+4)}{(1+x)} = -\frac{5}{2}.$$

8. Fie $A(x_0, y_0)$ – punctul de tangenta; $\alpha = 45^o$ – unghiul format de tangenta cu directia pozitiva a axei OX.

Cum $f'(x_0) = \text{tg}\alpha = \text{tg}45^o = 1$ si

$$f'(x) = \left(\frac{3^{x+1}}{\ln 27}\right)' = \frac{1}{\ln 27} \cdot 3^{x+1} \cdot \ln 3 = \frac{1}{\ln 3^3} \cdot 3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = \frac{1}{3 \ln 3} \cdot 3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = 3^x,$$

se obtine $f'(x_0) = 3^{x_0}$ si $3^{x_0} = 1$, de unde $x_0 = 0$. Atunci $y_0 = f(x_0) = \dfrac{3^{0+1}}{\ln 27} = \dfrac{3}{3 \ln 3} = \dfrac{1}{\ln 3}$.

Asadar, coordonatele punctului de tangenta sunt $x_0 = 0,\ y_0 = \dfrac{1}{\ln 3}$.

9. Fie $AB = c$. Atunci, conform teoremei Pitagora si enuntului $AB = AC = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, si cum $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$, se obtine $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c^2}{2} = 36$, de unde $c = 12$ (cm).

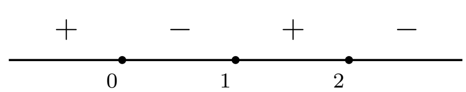
Fie latura patratului $MK = x$. Cum $x = MK = KP = NP = NM$ si $x = AM = KB$ (din egalitatea triunghiurilor dreptunghice $\triangle AMN$ si $\triangle BKP$) se obtine

$$AM = MK = KB = \frac{c}{3},$$

asadar, $P_{MNPK} = 4 \cdot \dfrac{c}{3} = 4 \cdot \dfrac{12}{3} = 16$ (cm).

10. $\log_{0,2} n + \log_{\frac{n}{5}} n > 0 \Leftrightarrow -\log_5 n + \dfrac{\log_5 n}{\log_5 n - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -t + \dfrac{t}{t-1} > 0 \\ t = \log_5 n \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-t(t-1)+t}{t-1} > 0 \\ t = \log_5 n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t(2-t)}{t-1} > 0 \\ t = \log_5 n \end{cases}$. Se utilizeaza metoda intervalelor



si se obtine

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t < 0 \\ 1 < t < 2 \end{array} \right. \\ t = \log_5 n \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 n < 0 \\ 1 < \log_5 n < 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < n < 1 \\ 5 < n < 25 \end{array} \right. .$$

Asadar, multimea solutiilor inecuatiei este reuniunea intervalelor $(0;\, 1)$ si $(5;\, 25)$. Cel mai mare numar natural din aceasta multime este $n = 24$.

11. Aflam aria figurii A, utilizand integrala Riemann. $2 - x^2 = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, prin urmare, limitele de integrare sunt $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ si

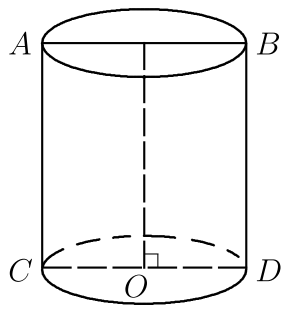
$$S_A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Aria figurii B (triunghi) este egala cu:

$$S_B = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot |c| = \sqrt{2} \cdot |c|.$$

Conform enuntului $S_A = S_B$, de unde $\sqrt{2} \cdot |c| = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, $|c| = \dfrac{8}{3}$, $c = \pm\dfrac{8}{3}$. Cum $c < 0$, ramane $c = -\dfrac{8}{3}$.

12.



Fie $ABCD$ – sectiunea axiala a cilindrului. Fie $AB = CD = x,\ BD = 1,5$ (m).
Din proportia

$$1,5 \ - \ 100\%$$

$$x \ - \ 40\%$$

se obtine $x = \dfrac{40 \cdot 1,5}{100} = \dfrac{3}{5}$ (m). Atunci raza bazei cilindrului $r = OD = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{3}{10}$ (m) si suprafata ce urmeaza a fi vopsita, este

$$A = 2(A_{baz}+A_{lat}) = 2(\pi \cdot r^2+2\pi r \cdot BD) = 2\pi\left(\frac{9}{100}+2\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{2}\right) = 2\pi\left(\frac{9}{100}+\frac{9}{10}\right) = \frac{99\pi}{50}\ (\mathrm{m})^2.$$

Din proportia

$$1,5\ \mathrm{m}^2 \ - \ 150\ \mathrm{gr}$$

$$\frac{99\pi}{50}\ \mathrm{m}^2 \ - \ y\ \mathrm{gr}$$

rezulta $y = \dfrac{99\pi \cdot 150}{50} = 297\pi \approx 932,58$ (gr). Cum $932,58 < 1000$, rezulta ca 1 kg de vopsea va fi suficient.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 3 puncte
Nr. 6 — 4 puncte
Nr. 7 — 5 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 6 puncte
Nr. 10 — 6 puncte
Nr. 11 — 6 puncte
Nr. 12 — 6 puncte
total: 49 puncte

Nota

”10” — ??-?? puncte
”9” — ??-?? puncte
”8” — ??-?? puncte
”7” — ??-?? puncte
”6” — ??-?? puncte
”5” — ??-?? puncte
”4” — ??-?? puncte
”3” — ??-?? puncte
”2” — ??-?? puncte
”1” — ??-?? puncte