Examenul de bacalaureat la matematica, 14 iunie 2007
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrie pe foaia de test in spatiul indicat numai rezultatele. Poti folosi maculatorul pentru efectuari de calcule.

1. Numarul $\log_3 9^{\lg \frac{1}{10}} + \cos\pi$ este egal cu $\boxed{\quad}$.

2. Daca $A(x_0, y_0)$ este centrul cercului de ecuatie $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$, atunci $x_0 = \boxed{\quad}$ si $y_0 = \boxed{\quad}$.

3. Timpul in care 30 de elevi au rezolvat o problema este prezentat in tabelul de mai jos:

Timpul x_i (min)	15	5	11	6	16	9	12	7	13	8
Nr. elevilor – n_i	3	1	5	2	1	3	4	2	6	3

Scrie in spatiul indicat mediana acestei serii statistice $\boxed{\quad}$.

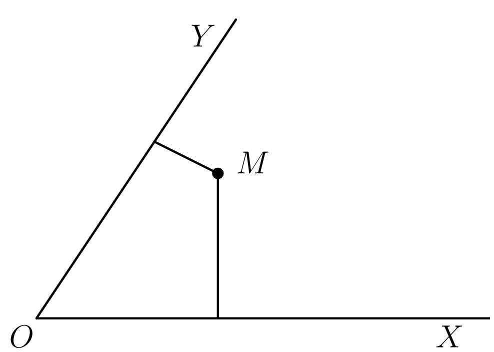
4. Ecuatia asimptotei orizontale la $+\infty$ a graficului functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{7 - 9x + 8x^2}{3x^2 + 2x + 5}$ este $\boxed{\qquad\qquad}$.

II. In itemii 5-8 raspunde la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

5. Determina primitiva functiei $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}x$, graficul careia contine punctul $A\left(\dfrac{\pi}{3}; 5 + \ln 2\right)$.

6. Determina pentru care valori reale ale parametrului m sistemul de ecuatii $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (m-2)x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (m+4)x_3 = 0 \end{cases}$ este compatibil determinat.

7. In interiorul unui unghi XOY de 60^o se gaseste un punct M, care se afla la o distanta de 10 cm, respectiv 4 cm de laturile OX, OY ale unghiului. Determina distanta de la punctul M la varful O.

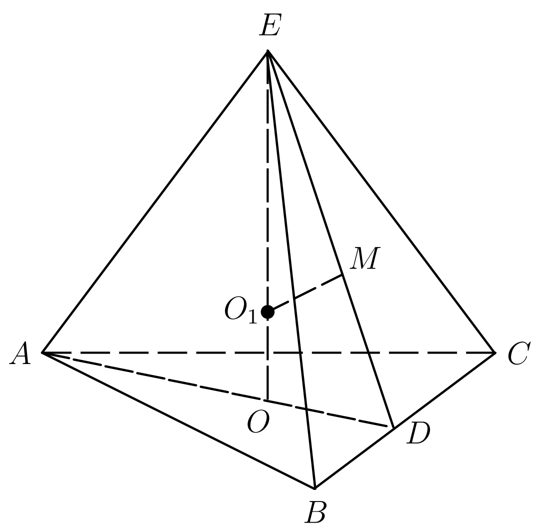


8. Determina cea mai mica solutie a ecuatiei $3^{\lg x^4} - 4 \cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0.$

III. Rezolva problemele 9-12 si scrie pe foaia de test rezolvarile complete.

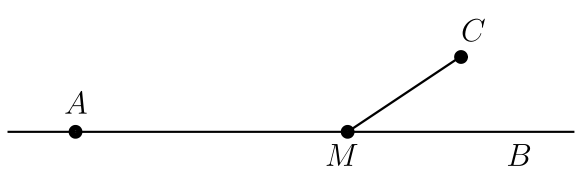
9. Determina pentru cate valori intregi ale lui a numarul $(a+i)^4$ este intreg.

10. In desenul alaturat $EABC$ este o piramida triunghiulara regulata, muchia laterala a careia formeaza cu planul bazei un unghi de 60^o. Determina raza sferei inscrise in aceasta piramida, daca muchia laterala a piramidei este egala cu a (in desen O_1 este centrul sferei inscrise, $O_1M = O_1O$ – raza sferei inscrise).



11. Determina toate valorile reale ale lui a, pentru care tangnta la graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ in punctul de abscisa $x_0 = a$ intersecteaza axa absciselor in unul din punctele intervalului $[0,\ 1]$.

12. In desenul alaturat AB reprezinta o cale ferata, iar C un punct care se afla la distanta de 8 km de la aceasta cale ferata si la distanta de $\sqrt{4964}$ km de la punctul A. Pentru a transporta marfa din punctul A in punctul C se intentioneaza sa se construiasca o sosea (rectilinie) din punctul C pana la un punct M al caii ferate. Se stie ca pretul pentru transportarea unei tone de marfa pe calea ferata este de 30 de lei (pentru un kilometru), iar p sosea de 50 de lei (pentru un kilometru). Determina care trebuie sa fie distanta AM, astfel incat pretul pentru transportarea unei tone de marfa din A in C (pe calea AMC) sa fie minim.



Solutii

1. $\log_3 9^{\lg \frac{1}{10}} + \cos\pi = \log_3 9^{\lg 10^{-1}} + (-1) = \log_3 9^{-1} - 1 = \log_3 3^{-2} - 1 = -2 - 1 = -3.$

2. Cum $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ si ecuatia cercului de raza R cu centrul in $O(x_0, y_0)$ este $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, rezulta $x_0 = 1$ si $y_0 = -2$.

3. Aranjam seria statistica crescator, tinand seama de frecventele termenilor:

$$5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 15, 15, 15, 16.$$

Cum mediana este valoarea centrala a seriei statistice ordonate crescator se obtine $Me = 11$ (seria contine 30 termeni si in asa caz mediana este media aritmetica a celor doi termeni centali: $Me = \dfrac{11+11}{2} = 11$).

4. Dreapta $y = b$ este asimptota orizontala la graficul functiei $f(x)$ cand $x \to +\infty$, daca $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Cum

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7 - 9x + 8x^2}{3x^2 + 2x + 5} = \frac{8}{3},$$

rezulta $y = \dfrac{8}{3}$.

5. Cum

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

se obtine $F(x) = C - \ln|\cos x|$.

Deoarece $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$ si $|\cos x| = \cos x$, prin urmare, $F(x) = -\ln \cos x$. Cum graficul primitivei contine punctul A se obtine

$$5 + \ln 2 = C - \ln \cos \frac{\pi}{3}$$

sau $5 + \ln 2 = C - \ln \dfrac{1}{2}$, $5 + \ln 2 = C + \ln 2$, de unde $C = 5$.

Raspuns: $F(x) = \ln \cos x + 5$.

6. Conform regulei Cramer, sistemul este compatibil determinat, daca determinantul principal este diferit de zero. Cum

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & m-2 & m \\ 2 & -1 & m+4 \end{vmatrix} = (m-2)(m+4) - 2m - 4(m-2) + m = m^2 + 2m - 8 - 2m - 4m + 8 + m =$$

$= m^2 - 3m$, din conditia $m^2 - 3m \neq 0$ se obtine $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

7. Fie $MA \perp OX$, $MB \perp OY$, $A \in OX$, $B \in OY$, $MA = 10$ (cm), $MB = 4$ (cm). Prelungim AM pana la intersectie cu OY, C – punctul de intersectie.

$m(\angle COA) = 60^o$, $m(\angle CAO) = 90^o$, rezulta $m(\angle OCA) = 30^o$ si $CM = 2BM = 8$ cm (cateta opusa unghiului de 30^o).

Din $\triangle OAC$ avem $OA = AC\text{tg}30^o = 18\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ (cm); iar din $\triangle OMA$, conform teoremei Pitagora: $OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 10^2} = \sqrt{208} = \sqrt{16\cdot 13} = 4\sqrt{13}$ (cm).

8. DVA: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. In DVA:

$$3^{\lg x^4} - 4\cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{2\lg x^2} - 4\cdot 3^{\lg x^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4t + 3 = 0 \\ t = 3^{\lg x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \\ t = 3^{\lg x^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\lg x^2} = 1 \\ 3^{\lg x^2} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x^2 = 0 \\ \lg x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 10 \end{array}\right. .$$

Toate solutiile sunt din DVA, prin urmare, multimea solutiilor $S = \{-\sqrt{10}, -1, 1, \sqrt{10}\}$ si cea mai mica solutie din S este $x = -\sqrt{10}$.

9. Utilizand formula binomului Newton, se obtine

$$z = a^4 + 4a^3 i + 6a^2 i^2 + 4ai^3 + 1 = a^4 + 4a^3 i - 6a^2 - 4ai + 1 = (a^4 - 6a^2 + 1) + (4a^3 - 4a)i.$$

Cum $z \in \mathbb{Z}$, rezulta $Imz = 0$, adica $4a^3 - 4a = 0$, de unde $a \in \{0; -1; 1\}$. Cum cardinalul acestei multimi este 3 si pentru fiecare a din aceasta multime $a^4 - 6a^2 + 1 \in \mathbb{Z}$, obtinem raspunsul 3.

10. Deoarece piramida este regulata, rezulta ca inaltimea EO se proiecteaza in centrul cercului circumscris bazei.

In $\triangle EOA$ dreptunghic $OA = R = \dfrac{a}{2}$ (cateta opusa unghilui de 30^o). Conform teoremei Pitagora

$$EO = \sqrt{EA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Sfera inscrisa este tangenta la fetele laterale in puncte de pe apotema. Fie raza sferei inscrise este $r = O_1O = MO_1$.

Din $\triangle EOD \sim \triangle EMO_1$ rezulta:

$$\frac{MO_1}{OD} = \frac{EO_1}{ED} \qquad (*).$$

$OD = \dfrac{1}{2}\cdot OA = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}$; $\quad EO_1 = EO - O_1O = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - r$. Din $\triangle EOD$ dreptunghic, conform teoremei Pitagora, obtinem:

$$ED = \sqrt{EO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Din (*) rezulta:

$$\frac{r}{\frac{a}{4}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - r}{\frac{a\sqrt{13}}{4}} \Rightarrow r\sqrt{13} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - r \Rightarrow r(1+\sqrt{13}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{13})} \text{ (un. l.)}.$$

11. Ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

In cazul dat $x_0 = a,\ f(a) = a^2 - 2a + 2,\ f'(x) = 2x - 2,\ f'(a) = 2a - 2$ si ecuatia tangentei devine

$$y - (a^2 - 2a + 2) = (2a - 2)(x - a)$$

sau, dupa transformari elementare,

$$y = (2a - 2)x + 2 - a^2.$$

Determinam abscisa punctului de intersectie a tangentei cu axa OX:

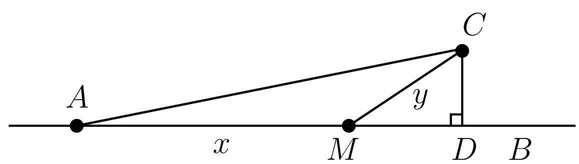
$$(2a - 2)x + 2 - a^2 = 0,$$

de unde $x = \dfrac{a^2 - 2}{2a - 2},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (daca $a = 1$, ecuatia tangentei devine $y = 1$ si nu intersecteaza axa OX).

Cum $x \in [0, 1]$ se obtine sistemul de inecuatii $\begin{cases} \dfrac{a^2 - 2}{2a - 2} \leq 1 \\ \dfrac{a^2 - 2}{2a - 2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2 - 2 - 2a + 2}{2(a - 1)} \leq 0 \\ \dfrac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{2(a - 1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(a - 2)}{a - 1} \leq 0 \\ \dfrac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{a - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-\infty; 0] \cup (1; 2] \\ a \in [-\sqrt{2}; 1) \cup [\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; 2].$$

12.



Coboram $CD \perp AB,\ D \in [AB]$. Conform enuntului $AC = \sqrt{4964},\ CD = 8$. Fie $AM = x,\ MC = y$. Atunci pretul pentru transportarea unei tone va fi $C = 30x + 50y$.

Din triunghiul dreptunghic ADC determinam AD:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{4964 - 64} = \sqrt{4900} = 70.$$

Din $\triangle MDC$ (dreptunghic) aflam CM:

$$CM = y = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + (70 - x)^2} = \sqrt{64 + (70 - x)^2}.$$

Cercetam la minim functia C:

$$C = 30x + 50y = 30x + 50\sqrt{64 + (70 - x)^2};$$

$$C' = 30 + 50\frac{2 \cdot (70 - x)(-1)}{2 \cdot \sqrt{64 + (70 - x)^2}} = 30 - 50\frac{70 - x}{\sqrt{64 + (70 - x)^2}} = \frac{30\sqrt{64 + (70 - x)^2} - 50(70 - x)}{\sqrt{64 + (70 - x)^2}}.$$

Din $C' = 0$ rezulta $30\sqrt{64+(70-x)^2} - 50(70-x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{64+(70-x)^2} = 5(70-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(64+(70-x)^2\right) = 25(70-x)^2 \\ 70-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 64 = 16 \cdot (70-x)^2 \\ x \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |70-x| = 6 \\ x \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 64 \\ x = 76 \end{array} \right. \\ x \leq 70 \end{cases} \Leftrightarrow x = 64.$$

Verificam punctul $x = 64$ la extrema (semnul derivatei):

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline \searrow & 64 & \nearrow \end{array}$$

asadar, $x = 64$ este punct de minim, astfel distanta $AM = 64$ (km).

Schema de notare

Scor maxim
- Nr. 1 — 2 puncte
- Nr. 2 — 2 puncte
- Nr. 3 — 2 puncte
- Nr. 4 — 3 puncte
- Nr. 5 — 4 puncte
- Nr. 6 — 4 puncte
- Nr. 7 — 5 puncte
- Nr. 8 — 5 puncte
- Nr. 9 — 6 puncte
- Nr. 10 — 6 puncte
- Nr. 11 — 7 puncte
- Nr. 12 — 8 puncte
- total: 54 puncte

Nota
- "10" — ??-?? puncte
- "9" — ??-?? puncte
- "8" — ??-?? puncte
- "7" — ??-?? puncte
- "6" — ??-?? puncte
- "5" — ??-?? puncte
- "4" — ??-?? puncte
- "3" — ??-?? puncte
- "2" — ??-?? puncte
- "1" — ??-?? puncte