Examenul de bacalaureat la matematica, 9 iunie 2006
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrie pe foaia de test in spatiul indicat numai rezultatele. Poti folosi Maculatorul pentru efectuari de calcule.

1. Daca $x^{-3} = 64$, atunci valoarea numerica a expresiei $x^{\frac{1}{2}}$ este egala cu $\boxed{}$.

2. Functia definita prin formula $f(x) = \sin(x + \pi)$ este crescatoare in cadranele $\boxed{}$.

3. Tangenta la curba de ecuatie $y = xe^{-x}$ este orizontala cand $x = \boxed{}$.

4. Multimea punctelor $z = a + bi$ din planul complex pentru care $|z - i| = 1$ este cercul de ecuatie: $\boxed{}$.

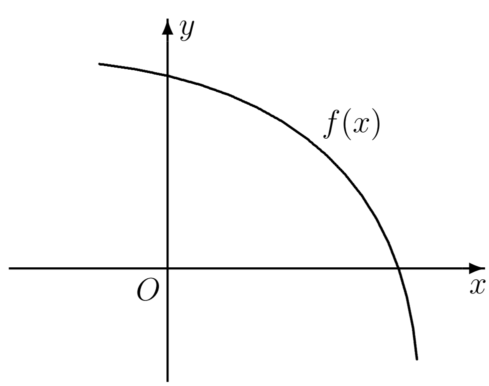
II. In itemii 5-11 raspunde la intrebari, scriind argumentarile si raspunsurile in spatiile rezervate.

5. Pe o strada dintr-un oras, la recensamantul numarul de copii din fiecare familie, s-au obtinut urmatoarele rezultate:

Nr. copii (x_i)	0	1	2	3	4	5
Nr. familii (n_i)	6	16	16	6	4	2
Frecvente relative (f_i)						
Frecvente procentuale						

a) Completeaza casetele libere din tabel;
b) Calculeaza numarul mediu de copii dintr-o familie (aproximare prin rotunjire).

6. In sistemul cartezian de coordonate este reprezentat graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx^2 + dx + e$. Utilizand desenul determina semnul fiecarui dintre coeficientii c, d, e. Argumenteaza raspunsul.

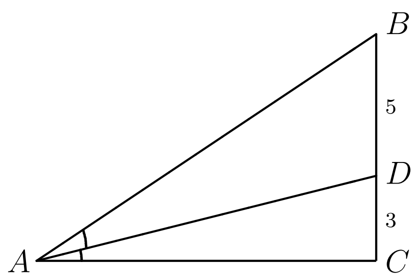


7. Determina pentru care valori pozitive ale lui x termenul al patrulea in dezvoltarea binomului $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^7$ este egal cu 280.

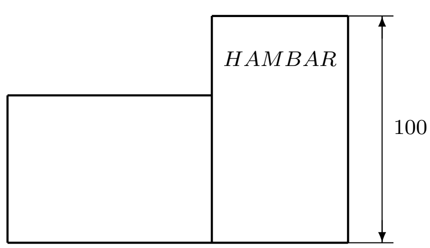
8. Determina multimea solutiilor intregi ale inecuatiei $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{x}{3}-2\right)}{\sqrt{x-7}} \leq 0.$

9. Fie date matricile $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina matricea C, astfel incat $2A^{-1} + C = B$.

10. In desenul alaturat bisectoarea AD imparte cateta BC a triunghiului dreptunghic ABC in segmentele de lungime 5 cm si 3 cm. Utilizand datele problemei si desenul determina lungimea catetei AC.

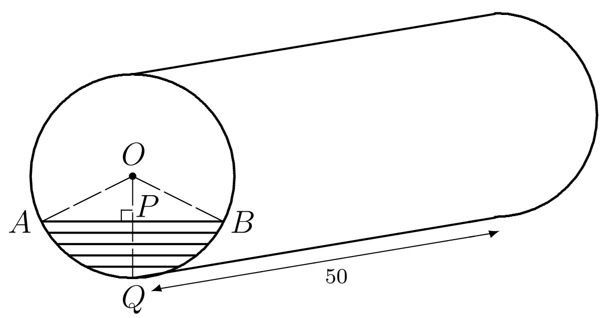


11. Un fermier are 160 m de gard pentru a ingradi un lot din patru parti. Pentru a face suprafata lotului cat e posibil de mare, el poate sa utilizeze si un perete, sau o parte din peretele hambarului (vezi desenul). Determina aria maximala posibila a lotului obtinut, daca lungimea hambarului este de 100 m.

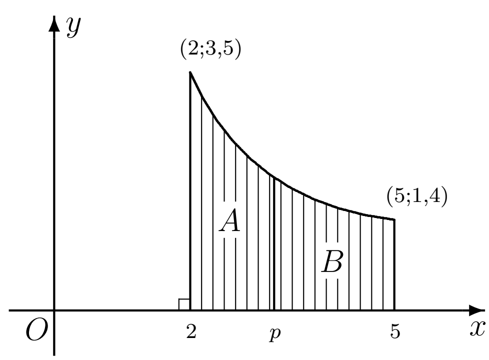


III. Rezolva problemele 12-14 si scrie pe foaia de test rezolvarile complete.

12. Un rezervor de forma cilindrica cu diametrul de 60 cm si lungimea de 50 cm (vezi desenul) a fost umplut partial cu apa. In desen segmental hasurat arata sectiunea transversala a apei. Inaltimea apei este de 15 cm. Determina cati cm^3 de apa e necesar de adaugat pentru a umplea pe jumatate rezervorul. (*Volumul apei care se afla initial in rezervor este egal cu produsul dintre aria segmentului de cerc si lungimea rezervorului*).



13. In sistemul cartezian de coordonate este reprezentat o parte a graficului functiei $f(x)$, ce trece prin punctele (2; 3,5) si (5; 1,4). Derivata functiei date intr-un punct oarecare $(x; y)$ este $f'(x) = -\dfrac{20}{x^3}$. Dreapta $x = p$ imparte domeniul hasurat in doua figure congruente A si B. Utilizand datele problemei si desenul determina valoarea lui p.



14. Determina pentru care valori reale ale lui p din punctul $B(p; -1)$ pot fi trasate la graficul functiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trei tangente diferite.

Solutii

1. $x^{-3} = 64 \ \Leftrightarrow\ x^3 = \dfrac{1}{64} \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ $(x > 0)$.

2. Din reprezentarea grafica a functiei $f(x) = \sin(x + \pi)$ se obtine, ca functia f este crescatoare in cadranele II si III.

3. Se utilizeaza interpretarea geometrica a teoremei Fermat (tangenta la graficul functiei f in punctele de extrem este paralela cu axa OX) si se obtine:

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ e^{-x} - xe^{-x} = 0 \ \Leftrightarrow\ e^{-x}(x - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1.$$

Se verifica ca $x = 1$ este punctul de minim. Prin urmare, pentru $x = 1$ tangenta la graficul functiei $f(x) = xe^{-x}$ este orizontala (paralela cu axa OX).

4. $|z - i| = 1 \ \Leftrightarrow\ |a + bi - i| = 1 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 1 \ \Leftrightarrow\ a^2 + (b-1)^2 = 1.$
Rezulta multimea punctelor din planul complex, ce verifica relatia data este cercul de ecuatie $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5. a) Aflam volumul seriei statistice $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 6 + 16 + 16 + 6 + 4 + 2 = 50$ si frecventele relative: $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,6}$; $\omega_1 = \dfrac{6}{50}$; $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{16}{50}$; $\omega_4 = \dfrac{6}{50}$; $\omega_5 = \dfrac{4}{50}$; $\omega_6 = \dfrac{5}{50}$.

Frecventele procentuale (**definitia lipseste din manualele existente**) sunt egale respectiv cu

$$\omega_1 = \frac{6}{50} \cdot 100\% = 12\%; \quad \omega_2 = \omega_3 = 32\%; \quad \omega_4 = 12\%; \quad \omega_5 = 8\%; \quad \omega_6 = 10\%.$$

b) Numarul mediu de copii dintr-o familie:

$$m = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{50} = \frac{92}{50} = 1,84 \approx 2.$$

6. Cum $f(0) = e$, rezulta $e > 0$. Ramurile parabolei sunt indreptate in jos, prin urmare $c < 0$. Varful parabolei se afla in punctul de abscisa $-\dfrac{d}{2c} < 0$, de unde $d < 0$. Asadar, $c < 0$, $d < 0$, $e > 0$.

Raspuns: $c < 0$, $d < 0$, $e > 0$.

7. Utilizand formula termenului de rang k $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ se obtine

$$T_4 = C_7^3 (\sqrt{x})^4 (\sqrt[3]{x})^3 = \frac{7!}{3!4!} \cdot x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{\frac{3}{3}} = 35x^{2+1} = 35x^3.$$

Cum $T_4 = 280$, rezulta ecuatia $35x^3 = 280$ echivalenta cu $x^3 = 8$, de unde $x = 2$.

Raspuns: $x = 2$.

8. $\dfrac{\log_2\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)}{\sqrt{x-7}} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x}{3} - 2\right) \le 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \dfrac{x}{3} - 2 \le 1 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < \dfrac{x}{3} \le 3 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 < x \le 9 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow 7 < x \le 9.$

Cum $x \in \mathbb{Z}$, ramane $x \in \{8; 9\}$.

Raspuns: $x \in \{8; 9\}$.

9. $2A^{-1} + C = B \Leftrightarrow C = B - 2A^{-1}$. Se determina matricea inversa matricei A: $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ (A^{-1} exista) si $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Asadar,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Raspuns: $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

10. Se utilizeaza proprietatea bisectoarei $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DC}{AC}$, si se obtine $AB = \dfrac{5}{3}AC$. Din teorema Pitagora rezulta

$$AC^2 = AB^2 - BC^2.$$

Cum $BC = BD + DC = 5 + 3 = 8$, $AB = \dfrac{5}{3}AC$, avem $AC^2 = \dfrac{25}{9}AC^2 - 64$, de unde $\dfrac{16}{9}AC^2 = 64$ si $AC^2 = 36$, $AC = 6$ (cm).

Raspuns: $AC = 6$ cm.

11. Fie dimensiunile lotului a si b. Atunci lungimea gardului ce ingradeste lotul va fi $l = 2a + b$. Cum $a > 0,\ b > 0$, utilizand inegalitatea dintre media aritmetica si cea geometrica (egalitatea se obtine pentru $2a = b$) se obtine

$$\frac{2a+b}{2} \geq \sqrt{2a \cdot b} \quad \text{sau} \quad 2a + b \geq 2\sqrt{2ab}.$$

Conform ipotezei $2a + b = 160$ (m), deci

$$160 \geq 2\sqrt{2ab} \quad \Leftrightarrow \quad 80 \geq \sqrt{2ab} \quad \Leftrightarrow \quad 6400 \geq 2ab,$$

de unde $ab = S \leq 3200$. Rezulta aria maxima a lotului este 3200 (m^2) si se obtine pentru $2a = b$. Prin urmare, $2a + b = 2b = 160$, de unde $b = 80$ m si $a = 40$ m.

Raspuns: $S = 3200$ m^2.

12. Fie R – raza bazei cilindrului, $R = \dfrac{60}{2} = 30$ (cm).

Consideram ΔAOB. Cum $OP = OQ - QP = 30 - 15 = 15$ (cm), $AO = 30$ cm, rezulta (din ΔAPO, dreptunghic in P) ca $\angle OAP = 30^o$ si, prin urmare,

$$\angle AOB = 180^o - (30^o + 30^o) = 120^o$$

si

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3}(\text{cm}^2).$$

Aflam aria segmentului de cerc AOB:

$$A = \frac{1}{2}R^2\alpha - S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 30^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - 225\sqrt{3} = (300\pi - 225\sqrt{3})(\text{cm}^2).$$

Determinam volumul cilindrului V_1:

$$V_1 = \pi R^2 H = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 45000\pi(\text{cm}^3),$$

volumul corpului format de apa ce se afla initial in rezervor V_2:

$$V_2 = A \cdot H = (300\pi - 225\sqrt{3}) \cdot 50 = (15000\pi - 11250\sqrt{3})\ \text{cm}^3$$

si volumul apei necesar de adaugat in rezervor pentru a-l umplea pe jumatate:

$$V = \frac{1}{2}V_1 - V_2 = 22500\pi - (15000\pi - 11250\sqrt{3}) = (7500\pi + 11250\sqrt{3})\ \text{cm}^3.$$

Raspuns: $(7500\pi + 11250\sqrt{3})$ cm^3.

13. Nota: figurile A si B nu sunt congruente, ci echivalente, adica au arii egale, in conditiile enuntate problema este lipsita de sens.

Determinam functia $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(-\frac{20}{x^3}\right) dx = -20\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{10}{x^2} + C.$$

Cum $f(2) = 3,5$, rezulta $3,5 = \frac{10}{4} + C$, de unde $C = 1$ si $f(x) = \frac{10}{x^2} + 1$. Ariile figurilor A si B:

$$S_A = \int_2^p \left(\frac{10}{x^2} + 1\right) dx = \left(-\frac{10}{x} + x\right)\Big|_2^p = -\frac{10}{p} + p + 5 - 2 = -\frac{10}{p} + p + 3;$$

$$S_B = \int_p^5 \left(\frac{10}{x^2} + 1\right) dx = \left(-\frac{10}{x} + x\right)\Big|_p^5 = -2 + 5 + \frac{10}{p} - p = \frac{10}{p} - p + 3.$$

Din echivalenta figurilor A si B, rezulta

$$-\frac{10}{p} + p + 3 = \frac{10}{p} - p + 3, \quad \text{sau} \quad \frac{10}{p} - p = 0,$$

de unde $p = \pm\sqrt{10}$. Cum $p \in (2; 5)$, ramane $p = \sqrt{10}$.

Raspuns: $p = \sqrt{10}$.

14. Utilizand ecuatia tangentei la graficul functiei $f(x)$ in punctul x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

se obtine:

$$y - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0).$$

Cum punctul $B(p; -1)$ apartine tangentei,

$$-1 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3) = (3x_0^2 - 6x_0)(p - x_0),$$

$$-x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 3x_0(x_0 - 2)(p - x_0),$$

$$-(x_0 - 2)^2(x_0 + 1) = 3x_0(x_0 - 2)(p - x_0),$$

de unde rezulta in $x_0 = 2$ poate fi trasata o tangenta la graficul functiei f oricare ar fi $p \in \mathbb{R}$.

Asadar, fie $x_0 \neq 2$, atunci

$$-(x_0 - 2)(x_0 + 1) = 3x_0(p - x_0),$$

$$3x_0^2 - 3x_0 p - x_0^2 + x_0 + 2 = 0,$$

$$2x_0^2 - x_0(3p - 1) + 2 = 0.$$

Pentru verificarea conditiilor problemei este necesar ca determinantul ultimei ecuatiei sa fie strict pozitiv: $\Delta = (3p - 1)^2 - 16 > 0$ sau

$$(3p - 1 - 4)(3p - 1 + 4) > 0,$$

$$(3p - 5)(3p + 3) > 0,$$

de unde $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Cum $p \neq 2$, rezulta $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Raspuns: $p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 6 puncte
Nr. 6 — 6 puncte
Nr. 7 — 5 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 4 puncte
Nr. 10 — 6 puncte
Nr. 11 — 6 puncte
Nr. 12 — 7 puncte
Nr. 13 — 8 puncte
Nr. 14 — 9 puncte
total: 70 puncte

Nota

"10" — 64-70 puncte
"9" — 57-63 puncte
"8" — 49-56 puncte
"7" — 40-48 puncte
"6" — 32-39 puncte
"5" — 21-31 puncte
"4" — 15-20 puncte
"3" — 9-14 puncte
"2" — 4-8 puncte
"1" — 0-3 puncte

Una din componentele unui item este baremul de corectare, utilizat pentru evaluarea raspunsurilor, ce asigura uniformitatea si consecventa notarii. In cadrul testului baremul va specifica numarul de puncte acordat pentru fiecare raspuns integral sau partial.

Barem de corectare si notare
la testul de matematica realizat in cadrul examenului de bacalaureat
Clasa a XII-a profilul real
9 iunie 2006

Item	Scor maxim	Raspuns corect	Punctaj acordat	Observatii
1.	2 puncte	$\frac{1}{2}$	Se acorda 2 puncte pentru raspuns corect	*** Nu se acorda alte puncte intermediare (de exemplu 1 punct)
2.	2 puncte	II, III	Se acorda 2 puncte pentru raspuns corect	***
3.	2 puncte	1	Se acorda 2 puncte pentru raspuns corect	***
4.	2 puncte	$a^2 + (b-1)^2 = 1$	Se acorda 2 puncte pentru raspuns corect	***
5.	6 puncte	a) Frecvente relative: 0,12; 0,32; 0,32; 0,12; 0,08; 0,04. Frecvente procentuale: 12%; 32%; 32%; 12%; 8%; 4%. b) Numar mediu de copii: 2copii.	1 punct pentru determinarea numarului total de familii 1 punct pentru aplicarea corecta a formulei de determinare a frecventei relative 1 punct pentru completarea corecta a liniei cu frecventele relative 1 punct pentru completarea liniei cu frecventele procentuale 1 punct pentru aplicarea corecta a formulei mediei 1 punct pentru calcularea corecta a mediei	
6.	6 puncte	$c < 0$; $d < 0$; $e > 0$	Cate 1 punct pentru determinarea semnului fiecarui coeficient Cate 1 punct pentru fiecare argumentare corecta	
7.	5 puncte	$x = 2$	1 punct pentru aplicarea corecta a formulei termenului de rang n al dezvoltarii 1 punct pentru scrierea si descifrarea formulei pentru al 4-lea termen 1 punct pentru scrierea ecuatiei 1 punct pentru transformarile echivalente 1 punct pentru determinarea solutiilor ecuatiei	

Item	Scor maxim	Raspuns corect	Punctaj acordat	Observatii
8.	5 puncte	$x \in \{8; 9\}$	1 punct pentru scrierea corecta a sistemului de inecuatii 1 punct pentru rezolvarea inecuatiei liniare 1 punct pentru rezolvarea inecuatiei logaritmice 1 punct pentru rezolvarea sistemului 1 punct pentru raspuns corect	
9.	4 puncte	$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$	1 punct pentru aplicarea corecta a formulei 1 punct pentru determinarea matricei inverse 1 punct pentru exprimarea corecta a lui C 1 punct pentru determinarea corecta a matricei C	
10.	6 puncte	6 cm	1 punct pentru aplicarea proprietatii bisectoarei in triunghi 1 punct pentru scrierea corecta a proportiei 1 punct pentru aplicarea corecta a teoremei Pitagora 1 punct pentru scrierea corecta a sistemului 1 punct pentru rezolvarea sistemului 1 punct pentru raspuns corect	
11.	6 puncte	3200 m^2	1 punct pentru scrierea relatiei dintre variabile prin perimetru 1 punct pentru scrierea corecta a formulei functiei-arie 1 punct pentru scrierea domeniului de definitie al functiei 1 punct pentru utilizarea corecta a proprietatii functiei de gradul 2 sau a derivatei 1 punct pentru calcularea valorii punctului de maxim 1 punct pentru calcularea ariei maximale	
12.	7 puncte	$7500\pi + 11250\sqrt{3}$ cm^3	1 punct pentru utilizarea corecta a relatiilor metrice in triunghiul AOB 1 punct pentru determinarea ariei triunghiului AOB 1 punct pentru calcularea ariei sectorului de cerc 1 punct pentru calcularea ariei segmentului de cerc 1 punct pentru calcularea volumului apei turnata initial in rezervor 1 punct pentru calcularea $\frac{1}{2}V$ a rezervorului 1 punct pentru calcularea volumului apei adaugate in rezervor	

Item	Scor maxim	Raspuns corect	Punctaj acordat	Observatii
13.	8 puncte	$p = \sqrt{10}$	1 punct pentru determinarea formulei functiei in forma generala 1 punct pentru determinarea lui C 1 punct pentru utilizarea integralei definite pentru calcularea ariei unei figurii 1 punct pentru calcularea ariei A si B sau $A+B$ 1 punct pentru egalarea $A = B$ sau $\frac{1}{2}(A+B) = A$ 1 punct pentru scrierea corecta a ecuatiei in raport cu p 1 punct pentru rezolvarea ecuatiei 1 punct pentru selectarea corecta a raspunsului	
14.	9 puncte	$p \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$	1 punct pentru determinarea derivatei functiei 1 punct pentru scriere ecuatiei tangentei la graficul functiei in punctul x_0 1 punct pentru inlocuirea coordonatelor punctului B in ecuatia tangentei 1 punct pentru argumentarea existentei a trei solutii diferite a ecuatiei 1 punct pentru descompunerea in produs de doi factori (binom liniar si trinom de gradul 2) 1 punct pentru recunoasterea discriminantului pozitiv 1 punct pentru scrierea si rezolvarea inecuatiei $D > 0$ 1 punct pentru determinarea valorii lui p, pentru care $x_0 = 2$ este o radacina de multiplicitatea 2 1 punct pentru raspuns corect	
Total	70 puncte			