Examenul de bacalaureat la matematica, iunie 2005
Profilul real

Timp alocat: 180 minute.

I. In itemii 1-4 scrieti raspunsurile in spatiile rezervate.

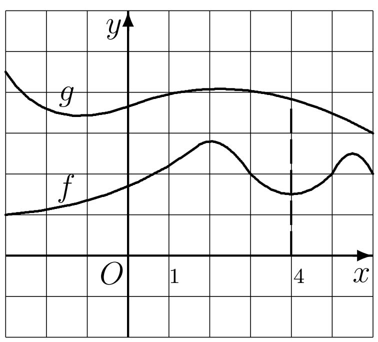
1. Valoarea produsului numerelor $\sqrt[3]{4}$ si $\sqrt[4]{8}$ este $\boxed{}$.

2. Valoarea expresiei $\sqrt{-(x+1)^2}$ este un numar real pentru $x = \boxed{}$.

3. Daca $\sin x + \cos x = a$, atunci $\sin 2x$ se exprima prin a astfel: $\sin 2x = \boxed{}$.

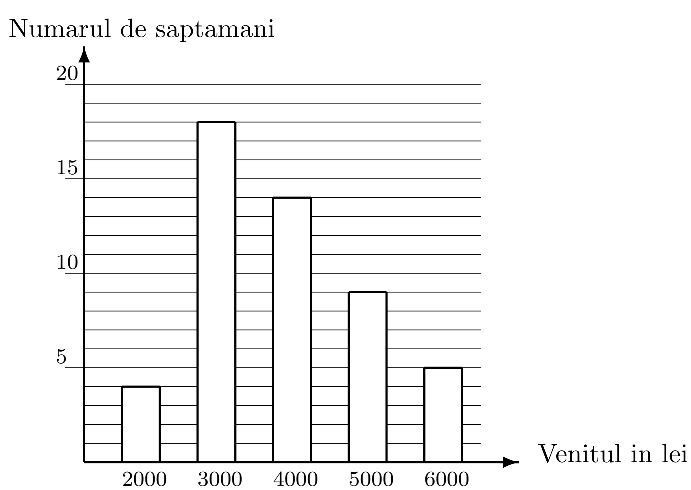
4. In sistemul de axe ortogonale alaturat sunt reprezentate graficele functiilor f si g derivabile si continue pe $\mathbb{R}$. Folosind desenul, scrieti in caseta unul din semnele $<, >, =$, astfel incat sa obtineti o propozitie adevarata:

$$\int_0^4 f(x)dx \boxed{} \int_0^4 g(x)dx.$$



II. In itemii 5-10 scrieti in spatiile rezervate raspunsurile si argumentarile necesare.

5. Venitul saptamanal al omului de afaceri Moraru este variabil. In diagrama este indicat numarul de saptamani in care el a castigat suma respectiva. Folosind diagrama, determinati care este venitul mediu saptamanal al domnului Moraru.



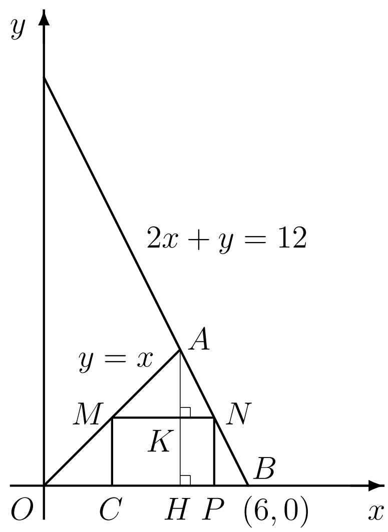
6. Scrieti o ecuatie de gradul II, forma redusa, cu coeficienti reali, stiind ca una din solutiile ei este $2-\sqrt{5}i$. Argumentati raspunsul.

7. Determinati valorile reale ale lui x pentru care $\dfrac{\sqrt{(1-x^2)^2}}{1-x}=1+x$.

8. Termenul al treilea in dezvoltarea la putere a binomului $(1-i)^n$ este egal cu -28. Determinati A_n^3.

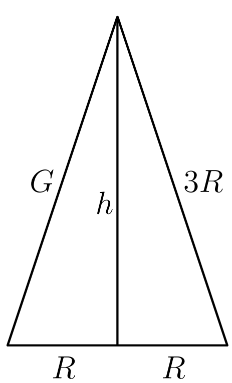
9. Determinati valorile reale ale lui x pentru care $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(4-x)<1$.

10. In desen, laturile triunghiului OAB au dreptele suport $y=x$, $y=0$ si $2x+y=12$. Determinati aria maxima pe care o poate avea dreptunghiul inscris in acest triunghi si care are o latura situata pe axa Ox.



III. Rezolvati problemele 11-14 si scrieti rezolvarile complete.

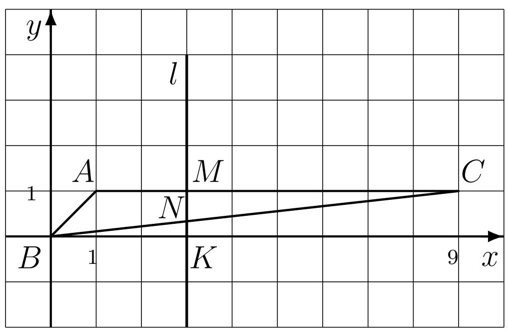
11. O bila din metal cu raza de 8 cm a fost retopita sub forma de con circular drept. Stiind ca aria suprafetei laterale a conului obtinut este de trei ori mai mare decat aria bazei lui, determinati inaltimea conului.



12. Determinati valorile parametrului real n pentru care sistemul $\begin{cases} nx+y=1 \\ ny+z=1 \\ x+nz=1 \end{cases}$ este incompatibil.

13. Determinati valorile parametrilor reali a si b pentru care graficul functiei $f : M \to \mathbb{R}$ $(M \subset \mathbb{R})$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+ax+b}$, are asimptota verticala $x = 1$ si admite un extrem local in punctul de abscisa $x_0 = 3$.

14. In sistemul de axe ortogonale xOy, dreapta verticala l imparte triunghiul ABC, cu varfurile $B(0,0)$, $A(1,1)$, $C(9,1)$, in doua figuri de arii egale. Folosind desenul, scrieti ecuatia dreptei l.



Solutii

1. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = 2^{\frac{17}{12}} = 2^{1\frac{5}{12}} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^5}$.

2. Daca $x \in \mathbb{R}$, atunci, cum din domeniul de definitie al expresiei avem $-(x+1)^2 \geq 0$ sau $(x+1)^2 \leq 0$, de unde $x = -1$.

Daca $x \in \mathbb{C}$, atunci avem o infinitate de solutii: de exemplu, orice numar complex de forma $-1 + \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, transforma expresia intr-un numar real.

3. Cum $\sin x + \cos x = a$ implica $\sin^2 x + \cos^2 x = a^2$ sau $1 + \sin 2x = a^2$, se obtine $\sin 2x = a^2 - 1$.

4. Cum pentru orice $x \in [0;4]$, $f(x) < g(x)$ din proprietatile integralei Riemann se obtine

$$\int_0^4 f(x)dx < \int_0^4 g(x)dx.$$

5. Utilizand formula pentru media aritmetica ponderata, se obtine:

$$\bar{x} = \frac{2000 \cdot 4 + 3000 \cdot 18 + 4000 \cdot 14 + 5000 \cdot 9 + 6000 \cdot 5}{4 + 18 + 14 + 9 + 5} = \frac{1000(8 + 54 + 56 + 45 + 30)}{50} =$$

$= 20 \cdot 193 = 3860$(lei).

6. Cum una din radacinile ecuatiei cu coeficienri reali este $z = 2 - \sqrt{5}i$, atunci $\bar{z} = 2 + \sqrt{5}i$ la fel va fi radacina a ecuatiei date (a se vedea tema "Radacinile polinoamelor cu coeficienti reali"). Conform teoremei inverse Viete, ecuatia data va fi:

$$x^2 - (z + \bar{z})x + z \cdot \bar{z} = 0$$

sau

$$x^2 - 4x + 9 = 0.$$

7. $\dfrac{\sqrt{(1-x^2)^2}}{1-x} = 1+x \ \Leftrightarrow\ \dfrac{|1-x^2|}{1-x} = 1+x \ \Leftrightarrow \begin{cases} |1-x^2| = 1-x^2 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in [-1;1).$

8. Utilizand formula pentru termenul de rang k se obtine:

$$T_3 = T_{2+1} = C_n^2\, 1^2(-i)^{n-2} = C_n^2(-1)^{n-2}\, i^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\, i^{2(n-2)+n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\, i^{3n-6}.$$

Cum $T_3 = -28$, rezulta $\begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2} = 28 \\ 3n-6 = 4s+2, s \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n - 56 = 0 \\ 3n-6 = 4s+2, s \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -7 \end{array} \right. \\ 3n-6 = 4s+2, s \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow\ n = 8.$

Atunci $A_n^3 = A_8^3 = \dfrac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$

9. $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < 1 \ \Leftrightarrow\ \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < \log_3 3 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}}(4-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8} \\ \log_{\frac{1}{2}}(4-x) > \log_{\frac{1}{2}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > \dfrac{1}{8} \\ 4-x < 1 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3\dfrac{7}{8} \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in \left(3; 3\dfrac{7}{8}\right).$

10. Avem: $M(x,x)$; $N\left(\dfrac{12-x}{2}, x\right)$; $P\left(\dfrac{12-x}{2}, 0\right)$.

Atunci $MC = x,\ CP = \dfrac{12-x}{2} - x = \dfrac{12-3x}{2}$ si aria dreptunghiului $MNCP$:

$$S_{MNCP} = MC \cdot CP = x\left(\frac{12-3x}{2}\right) = \frac{1}{2}(12x - 3x^2).$$

Studiem functia S la maxim:

$$S' = \frac{1}{2}(12-6x) = 6-3x,$$

de unde $6-3x=0$ si $x=2$. Cum $S''(2) = -3 < 0$, rezulta $x=2$ punct de maxim. Atunci

$$S_{max} = S(2) = \frac{1}{2}(12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2) = \frac{1}{2}(24-12) = 6 \text{ (un. p.)}.$$

11. Volumul bilei $V_{bila} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi 8^3 = \dfrac{2048\pi}{3}$ (cm^3).

Din relatia $S_{lat} = 3S_{baz}$ se obtine

$$\pi RG = 3\pi R^2, \qquad G = 3R,$$

unde R – raza bazei conului, G – generatoarea lui.

Atunci

$$h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{9R^2 - R^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}R,$$

iar volumul conului

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2\sqrt{2}R = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}R^3.$$

Din $V_{bila} = V_{con}$ se obtine

$$\frac{2048\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}R^3,$$

de unde $R^3 = \dfrac{2048}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1024}{\sqrt{2}} = 512\sqrt{2}$ si $R = 8\sqrt[6]{2}$.

Atunci

$$h = 2\sqrt{2}R = 16\sqrt[6]{2}\sqrt{2} = 16 \cdot 2^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = 16 \cdot 2^{\frac{4}{6}} = 16 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 16\sqrt[3]{4} \text{ (cm)}.$$

12. Conform regulei Cramer, sistemul este incompatibil, daca determinantul principal $\Delta = 0$ si cel putin unul din determinantii auxiliari $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ este diferit de zero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 1 & 0 & n \end{vmatrix} = n^3 + 1, \qquad \Delta = 0 \Rightarrow n^3 + 1 = 0, \; n = -1.$$

Cum $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 0 & n \end{vmatrix} = n^2 - n + 1 \neq 0$ pentru orice n, deoarece $D = 1 - 4 < 0$. Deci, daca $n = -1$ sistemul este incompatibil.

13. Cum $x = 1$ asimptota verticala, rezulta $1 + a + b = 0$, adica $a + b = -1$.

Cum $f'(3) = 0$ se obtine

$$\frac{x^2 + ax + b - (x+1)(2x+a)}{(x^2 + ax + b)^2} = 0$$

sau $9 + 3a + b - 4(6 + a) = 0$, adica $-a + b = 15$.

Din $\begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 15 \end{cases}$ rezulta $a = -8$, $b = 7$.

14. Determinam aria $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|9 - 1| = 4 \text{ (un. p.)}.$$

Ecuatia dreptei BC: $\dfrac{x - 0}{9 - 0} = \dfrac{y - 0}{1 - 0}$ sau $y = \dfrac{x}{9}$.

Fie $M(l, 1)$. Atunci cum $N \in [BC]$, $N\left(l, \dfrac{l}{9}\right)$.

Aria $S_{\triangle CMK} = \dfrac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$ si, in plus,

$$S_{\triangle CMK} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} l & 1 & 1 \\ l & \frac{l}{9} & 1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{l^2}{9} + 9 + l - l - l - l \right| = \frac{1}{18} |l^2 - 18l + 81| = \frac{1}{18} |(l-9)^2| = \frac{(l-9)^2}{18}.$$

Prin urmare, $\dfrac{(l-9)^2}{18} = 2$, de unde

$$(l-9)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad |l-9| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad l - 9 = \pm 6 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} l = 15 \\ l = 3 \end{array} \right. .$$

Cum $0 < l < 9$, ramane $l = 3$.

Raspuns: $x = 3$.

Schema de notare

Scor maxim

Nr. 1 — 2 puncte
Nr. 2 — 2 puncte
Nr. 3 — 2 puncte
Nr. 4 — 2 puncte
Nr. 5 — 3 puncte
Nr. 6 — 5 puncte
Nr. 7 — 5 puncte
Nr. 8 — 5 puncte
Nr. 9 — 6 puncte
Nr. 10 — 7 puncte
Nr. 11 — 6 puncte
Nr. 12 — 6 puncte
Nr. 13 — 6 puncte
Nr. 14 — 9 puncte
total: 66 puncte