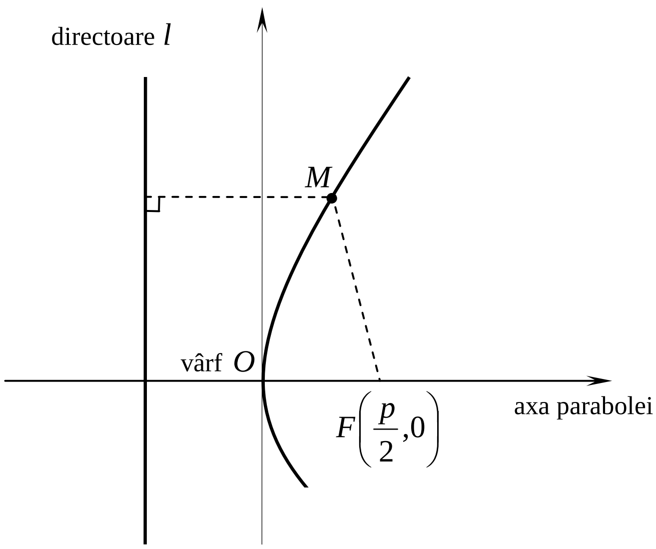
Parabola

Se numeşte **parabolă** mulțimea punctelor planului egal depărtate de un punct dat F al planului numit focar şi de o dreaptă l din plan, $F \notin l$, numită directoare.

Dacă punctul M aparține parabolei, segmentul MF, precum şi lungimea lui se numeşte **rază focală** a punctului M. Distanța de la focarul parabolei la directoare se notează p şi se numeşte **parametrul parabolei**.

Dacă sistemul de axe ortogonale este ales astfel încât axa absciselor trece prin focarul parabolei perpendicular pe directoare şi este orientată de la directoare spre focar, iar originea sistemului este mijlocul segmentului AF (A este proiecția focarului pe directoare), atunci ecuația canonică a parabolei este

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$



Parabola cu ecuația (1) este situată în semiplanul $x \ge 0$, are vârful $O(0,0)$, axa ei este axa absciselor, iar directoarea are ecuația $x = -\frac{p}{2}$.

Parabolele cu ecuațiile $y^2 = -2px,\ \ x^2 = 2py,\ \ x^2 = -2py$ au vârful în $O(0,0)$ şi sunt situate respectiv în semiplanele $x \le 0,\ \ y \ge 0,\ \ y \le 0.$

Ecuația $y = ax^2 + bx + c,\ \ a \ne 0,\ \ (a,b,c \in R)$ defineşte o parabolă a cărei axă de simetrie este paralelă cu axa ordonatelor. Vârful, focarul, directoarea şi parametrul acestei parabole sunt respectiv:

$$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right),\ \ F\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right),\ \ l: y = -\frac{\Delta+1}{4a},\ \ p = \frac{1}{2a}, \qquad \text{unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Analog, parabola $x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0$ are axa paralelă cu axa absciselor şi $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, $F\left(\frac{-\Delta+1}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, $l : x = -\frac{\Delta+1}{4a}$, $p = \frac{1}{2a}$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$.

Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuația parabolei:

a) cu focarul $F(4,0)$ şi directoarea $x + 4 = 0$;

b) cu focarul $F(-3,0)$ şi directoarea $x - 3 = 0$;

c) cu focarul $F(0,5)$ şi directoarea $y + 5 = 0$;

d) cu focarul $F(0,-2)$ şi directoarea $y - 2 = 0$;

e) cu focarul $F(3,4)$ şi directoarea $x + 1 = 0$;

Soluții

În fiecare din cazurile a)-d) avem valoarea lui $\frac{p}{2}$ şi ecuațiile parabolelor se scriu uşor:

a) $y^2 = 16x$; b) $y^2 = -12x$; c) $x^2 = 20y$; d) $x^2 = -8y$.

e) Deducem ecuația parabolei utilizând definiția. Fie $M(x, y)$ aparține parabolei. Avem $MF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$, iar distanța de la M la directoare este egală cu $|x+1|$. Conform definiției $|x+1| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$. Ridicăm ambele părți ale acestei ecuații la pătrat, simplificăm şi obținem ecuația cerută $x = \frac{1}{8}y^2 - y + 3$.

2. Să se scrie ecuația parabolei cu focarul:

a) $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ şi vârful $V(0,0)$;

b) $F(5,0)$ şi vârful $V\left(\frac{5}{2}, 0\right)$;

c) $F(2,1)$ şi vârful $V(0,1)$;

d) $F(2,1)$ şi vârful $V(2,0)$;

e) $F(3,2)$ şi vârful $V(3,1)$.

Soluții

Vârful parabolei este mijlocul segmentului AF, unde A este proiecția focarului pe directoare, iar vectorul $\overrightarrow{VF}$ este un vector normal al directoarei.

a) Punctul A are coordonatele $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ şi $\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$, ecuaţia parabolei este $y^2=6x$.

b) $A(0,0)$, ecuaţia directoarei $x=0$ şi ecuaţia parabolei este $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=|x| \quad \Leftrightarrow \quad y^2=10x-25$.

c) $A(-2,1)$, ecuaţia directoarei $x+2=0$ şi ecuaţia parabolei este $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|x+2| \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{8}(y-1)^2$.

d) $A(2,-1)$, ecuaţia directoarei $y+1=0$ şi ecuaţia parabolei este $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|y+1| \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{4}(x-2)^2$.

e) $A(3,0)$, ecuaţia directoarei $y=0$ şi ecuaţia parabolei este $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=|y|$ $\Leftrightarrow \; y=\frac{1}{4}(x-3)^2+1$.

3. Să se determine focarul, vârful şi directoarea parabolei:

a) $y^2=4x$;

b) $y^2=-6x$;

c) $x^2=y$;

d) $x^2=-16y$.

<u>Soluţii</u>

a) $p=2 \;\Rightarrow\; \frac{p}{2}=1 \;\Rightarrow\; F(1,0),\; V(0,0)$, directoarea $x+1=0$.

b) $p=3 \;\Rightarrow\; \frac{p}{2}=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; F\left(-\frac{3}{2},0\right),\; V(0,0)$, directoarea $x-\frac{3}{2}=0$.

c) $p=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{p}{2}=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; F\left(0,\frac{1}{4}\right),\; V(0,0)$, directoarea $y+\frac{1}{4}=0$.

d) $p=8 \;\Rightarrow\; \frac{p}{2}=4 \;\Rightarrow\; F(0,-4),\; V(0,0)$, directoarea $y-4=0$.

4. Să se afle axa de simetrie, vârful, focarul şi directoarea parabolei:

a) $y^2=-4x+10$;

b) $y^2=8x-2$;

c) $x^2=6y+4$;

d) $x^2 = -12y - 6.$

Soluții

a) $y^2 = -4x + 10 \iff x = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{5}{2}$. Avem $a = -\frac{1}{4},\ b = 0,\ c = \frac{5}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{5}{2}$.

Axa de simetrie este axa absciselor, $V\left(\frac{5}{2},0\right)$, $F\left(\frac{3}{2},0\right)$, directoarea $x - \frac{7}{2} = 0.$

b) $y^2 = 8x - 2 \iff x = \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}$. În acest caz $a = \frac{1}{8},\ b = 0,\ c = \frac{1}{4},\ \Delta = -\frac{1}{8}$.

Axa de simetrie este axa absciselor. Vârful $V\left(\frac{1}{4},0\right)$, focarul $F\left(\frac{9}{4},0\right)$, directoarea $x + \frac{7}{4} = 0.$

c) $x^2 = 6y + 4 \iff y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}$. Axa de simetrie este axa ordonatelor, vârful $V\left(0,-\frac{2}{3}\right)$, focarul $F\left(0,\frac{5}{6}\right)$, directoarea $y + \frac{13}{6} = 0.$

d) $x^2 = -12y - 6 \iff y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}$. Axa de simetrie este axa ordonatelor, vârful $V\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, focarul $F\left(0,-\frac{7}{2}\right)$, directoarea $y - \frac{5}{2} = 0.$

5. Să se scrie ecuația parabolei $y = x^2 + bx + c$, dacă $V(5,7)$ este vârful ei.

Soluție

Pentru $a = 1$ avem $-\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2}$ și $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4c}{4}$. Cum vârful parabolei $y = ax^2 + bx + c$ este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ în cazul nostru avem $\begin{cases} -\frac{b}{2} = 5 \\ -\frac{b^2 - 4c}{4} = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -10 \\ c = 32 \end{cases}$.

Ecuația parabolei este $y = x^2 - 10x + 32.$

6. Să se scrie ecuația parabolei $y = ax^2 + bx + c$ dacă ea trece prin punctele $A(0,-3)$, $B(1,0)$, $C(2,7)$.

Soluție

Coeficienții a, b, c se obțin din sistemul de ecuații $\begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$, care este consecință a faptului că punctele date aparțin parabolei. Deci $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$ şi ecuația parabolei este $y = 2x^2 + x - 3$.

7. Să se determine un punct al parabolei $y^2 = 8x$, a cărui distanță la focar să fie egală cu 4.

<u>Soluție</u>

Rescriem ecuația parabolei sub forma

$$y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x$$

şi obținem $p = 4$, ceea ce arată că focarul este $F(2,0)$, iar directoarea este $x + 2 = 0$. Cum $MF = |x + 2|$ pentru orice punct al parabolei, din condiția problemei obținem $|x + 2| = 4$. De aici şi din faptul că $x \geq 0 \Rightarrow x = 2$. Din $y^2 = 8 \cdot x$, pentru $x = 2$ obținem $y_1 = 4$, $y_2 = -4$. Deci două puncte $M_1(2,4)$ şi $M_2(2,-4)$ verifică condițiile problemei.

8. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 2px$ în punctul ei $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Soluție</u>

Rescriem ecuația parabolei în forma $y \cdot y = px + px$ şi considerăm ecuația $yy_0 = px + px_0$. Cum $p \neq 0$, aceasta este ecuația unei drepte care trece prin punctul dat $M_0(x_0, y_0)$. În plus, observăm că această dreaptă şi parabola au punctul $M_0(x_0, y_0)$ ca punct dublu de intersecție. Într-adevăr, fie sistemul $\begin{cases} y^2 = 2px \\ yy_0 = px + px_0 \end{cases}$.

Substituim px din ecuația a doua a sistemului în prima ecuație şi obținem, pentru determinarea ordonatei punctului de intersecție, ecuația $y^2 - 2y_0 y + 2px_0 = 0$. Discriminantul acestei ecuații $\Delta = 4(y_0^2 - 2px_0) = 0$.

De aici $y_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2y_0}{2} = y_0$ şi $M_0(x_0, y_0)$ este punct dublu de intersecție a parabolei cu dreapta. Astfel am dedus că ecuația tangentei la parabola $y^2 = 2px$ în punctul ei $M_0(x_0, y_0)$ este $yy_0 = p(x + x_0)$.

9. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $A(-2,-1)$ la parabola $y^2 = 4x$.

<u>Soluție</u>

Observăm că punctul dat nu aparține parabolei. Fie $M(a,b)$ punctul de tangență. Conform ecuației deduse în problema precedentă ecuația tangentei în M este $by = 2x + 2a.$

Cerem ca această dreaptă să treacă prin punctul A şi obținem egalitatea $-b = -4 + 2a.$ Rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} a = -\dfrac{b}{2} + 2, \\ b^2 = 4a. \end{cases}$

Obținem două puncte de tangență $M_1(4,-4)$, $M_2(1,2)$. Respectiv avem ecuațiile celor două tangente $y = -\dfrac{x}{2} - 2$ şi $y = x + 1.$

10. Să se determine condiția ca dreapta $y = kx + m$ să fie tangentă la parabola $y^2 = 2px.$

Soluție

Pentru determinarea poziției reciproce a dreptei date şi parabola dată trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} y = kx + m, \\ y^2 = 2px. \end{cases}$

Acest sistem poate avea două soluții diferite, două soluții coincidente şi nici o soluție. Respectiv, dreapta şi parabola se intersectează în două puncte distincte (dreapta este secanta parabolei), dreapta şi parabola au două puncte comune confundate (dreapta şi parabola sunt tangente), dreapta şi parabola n-au puncte comune (dreapta nu intersectează parabola).

Deci, în conformitate cu cele de mai sus şi cerințele problemei substituim $y = kx + m$ în ecuația $y^2 = 2px$ şi cerem ca discriminantul ecuației primite $k^2x^2 + 2(mk - p)x + m^2 = 0$ să fie nul.

Avem $\Delta = 4(mk - p)^2 - 4k^2m^2$ şi $\Delta = 0$ implică condiția $p = 2mk.$

Deci, pentru ca dreapta $y = kx + m$ să fie tangentă la parabola $y^2 = 2px$ este necesar ca $p = 2mk.$

11. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 4x$ care este paralelă cu dreapta $2x - y + 7 = 0.$ Să se determine coordonatele punctului de tangență.

Soluție

Ecuația tangentei cerute are forma $y = 2x + m.$ Utilizând formula dedusă în problema precedentă pentru $p = 2,$ $k = 2$ obținem $2 = 4m,$ $m = \dfrac{1}{2}.$

Deci ecuația tangentei este $y = 2x + \dfrac{1}{2}.$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ şi găsim punctul de tangență $M\left(\dfrac{1}{4}, 1\right)$.

12. Din punctul $M_0(x_0, y_0)$ se construiesc două tangente la parabola $y^2 = 2px$. Să se scrie ecuația dreptei care uneşte punctele de tangență.

Soluție

Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ punctele de tangență cu parabola a tangentelor duse din M_0. Scriem ecuațiile tangentelor M_1M_0 şi M_2M_0 :

$$M_1M_0 \quad : \quad yy_1 = p(x + x_1)$$
$$M_2M_0 \quad : \quad yy_2 = p(x + x_2).$$

Cum M_0 aparține fiecărei din aceste tangente, au loc egalitățile

$$y_0y_1 = p(x_0 + x_1) \qquad \text{şi} \qquad y_0y_2 = p(x_0 + x_2).$$

Aceste două egalități arată că punctele $M_2(x_2, y_2)$ şi $M_1(x_1, y_1)$ aparțin dreptei $y_0y = p(x + x_0)$. Cum două puncte distincte determină o singură dreaptă, ecuația $y_0y = p(x + x_0)$ este ecuația dreptei ce uneşte punctele de tangență.

Observație. Dacă $M_0(x_0, y_0)$ aparține parabolei $y^2 = 2px$, ecuația $y_0y = p(x + x_0)$ este ecuația tangentei la parabolă în acest punct, iar dacă $M_0(x_0, y_0)$ nu aparține parabolei şi din acest punct pot fi duse două tangente, aceeaşi ecuație $y_0y = p(x + x_0)$ este ecuația coardei ce uneşte punctele de tangență.

13. Din punctul $\left(\dfrac{9}{2}, -6\right)$ sunt duse tangentele la parabola $y^2 = 6x$. Să se calculeze lungimea coardei care uneşte punctele de tangență.

Soluție

Pentru $p = 3$, $x_0 = \dfrac{9}{2}$, $y_0 = -6$ scriem ecuația dreptei care uneşte punctele de tangență (vezi problema precedentă).

$$-6y = 3\left(x + \frac{9}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x + 4y + 9 = 0.$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} 2x + 4y + 9 = 0 \\ y^2 = 6x \end{cases}$, găsim punctele de tangență $M\left(\dfrac{27}{2}, -9\right)$, $N\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$.

Deci $MN = \sqrt{\left(\dfrac{27}{2} - \dfrac{3}{2}\right)^2 + (-9 + 3)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$

Probleme propuse

1. Să se scrie ecuația parabolei simetrice în raport cu axa ordonatelor, cu vârful în origine şi care taie din dreapta $y = 2x$ o coardă de lungimea $4\sqrt{5}$.

2. Să se scrie ecuația parabolei cu vârful în origine în fiecare din cazurile:

a) parabola este simetrică față de axa absciselor, are parametrul $p = 5$ şi este situată în cadranele I şi IV;

b) parabola este simetrică față de axa absciselor, are parametrul $p = 1{,}5$ şi este situată în cadranele II şi III;

c) parabola este simetrică față de axa ordonatelor, are parametrul $p = 3$ şi este situată în cadranele III şi IV;

d) parabola are ca axă de simetrie axa Ox şi trece prin punctul $A(-4,4)$.

3. Să se determine focarul şi directoarea parabolei $y^2 = -10x$.

4. Să se scrie ecuația parabolei cu focarul $F(3,0)$ şi directoarea $x + 2 = 0$.

5. Să se afle axa de simetrie, focarul şi directoarea parabolei:

a) $y^2 = -6x$;

b) $y^2 = \frac{1}{2}x$;

c) $x^2 = 16y$;

d) $y^2 - 4x + 4 = 0$;

e) $x^2 - 2y + 4 = 0$;

f) $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$;

g) $y^2 - 2y - 8x - 31 = 0$.

6. Să se scrie ecuația parabolei cu axa de simetrie verticală şi care trece prin punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,-1)$.

7. Să se determine punctele de intersecție ale dreptei $x + y - 2 = 0$ cu parabola $x^2 = 2y$.

8. Să se afle raza focală a punctului parabolei $y^2 = 10x$, dacă abscisa lui este egală cu 6.

9. Să se scrie ecuația tangentei la parabola $y^2 = 4x$, care este paralelă cu dreapta $x + y - 5 = 0$.

10. Să se determine punctele de intersecție ale parabolelor:

a) $x^2 = 4y$ şi $y^2 = 4x$;

b) $y = x^2 - 2x + 1$ şi $x = y^2 - 6y + 7$.

11. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $A(0,-1)$ la parabola $y = x^2 + 2x + 3$.

12. Să se determine punctele de intersecție ale parabolei $y^2 = 24x$:

a) cu elipsa $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$;

b) cu hiperbola $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{225} = 1$;

13. Să se afle unghiul dintre tangentele duse din punctul $A(2,9)$ la parabola $y^2 = 36x$.

14. Să se afle aria triunghiului mărginit de axele de coordonate şi tangenta în punctul $A(2,2)$ la parabola $y^2 = \frac{1}{2}x^2$.

15. Să se scrie ecuația parabolei cu axa de simetrie Ox şi care trece prin punctele $A(2,2)$ şi $B(-1,1)$.

16. Din punctul $A(0,1)$ sunt duse tangentele la parabola $y = x^2 + 1$. Să se scrie ecuația coardei ce uneşte punctele de tangență.