Numere complexe

Forma algebrică a numărului complex z este $z = a + bi$, unde a şi b sunt numere reale. Numărul a se numeşte **partea reală** a numărului complex z şi se scrie $a = \operatorname{Re} z$, iar numărul b se numeşte **partea imaginară** a numărului complex z şi se scrie $b = \operatorname{Im} z$. Simbolul i se numeşte **unitate imaginară** şi $i^2 = -1$.

Numerele complexe $z_1 = a_1 + b_1 i$ şi $z_2 = a_2 + b_2 i$ sunt **egale**, dacă şi numai dacă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Numărul complex $\overline{z} = a - bi$ se numeşte **număr conjugat** numărului $z = a + bi$, iar numărul $-z = -a - bi$ se numeşte număr opus lui $z = a + bi$.

Fie $z_1=a_1+b_1 i$ şi $z_2=a_2+b_2 i$ două numere complexe. **Suma** $z_1 + z_2$, **diferența** $z_1 - z_2$, **produsul** $z_1 \cdot z_2$ şi **câtul** $\frac{z_1}{z_2} (z_2 \neq 0)$ a numerelor complexe z_1 şi z_2 se calculează conform formulelor:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i, \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \tag{4}$$

Operațiile de adunare şi înmulțire a numerelor complexe sunt comutative şi asociative, înmulțirea este distributivă față de adunare.

Modulul numărului complex $z = a + bi$ este numărul $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Au loc egalitățile $|z| = |\overline{z}|$ şi $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Se va folosi notația $|z| = r$.

Argumentul numărului complex $z = a + bi$ este numărul φ determinat din egalitățile

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{5}$$

Argumentul numărului complex z se notează $\arg z$.

Din egalitățile (5) rezultă

$$a = r\cos\varphi, \ b = r\sin\varphi \tag{6}$$

şi obținem **forma trigonometrică** a numărului complex $z = a + bi$:

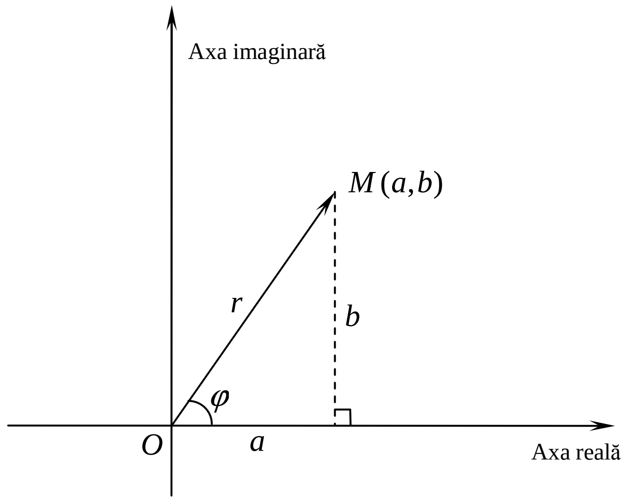
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Argumentul principal $\arg z$ al numărului complex z este acea valoare a lui φ care aparține intervalului $(-\pi, \pi]$.

Între mulțimea numerelor complexe C şi mulțimea punctelor (razelor-vectoare) ale planului înzestrat cu un sistem de axe ortogonale xOy se stabileşte o bijecție astfel:

$$z = a + bi \quad \Leftrightarrow \quad M(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OM} = \{a,b\}.$$

Această bijecție permite ca numerele complexe să fie interpretate ca puncte ale planului de coordonate sau ca **raze-vectoare** $\overrightarrow{OM}$ (vezi figura).



Modulul r al numărului complex $z = a + bi$ se interpretează ca lungimea segmentului OM (lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$), unde $M(a,b)$, iar argumentul numărului complex $z \neq 0$ este egal cu mărimea unghiului dintre direcția pozitivă a axei absciselor şi semidreapta OM.

Modulul şi argumentul determină numărul complex în mod univoc. Numărul complex $z = 0$ nu are argument, dar are modulul egal cu zero.

Orice două argumente ale numărului complex diferă printr-un număr multiplu al lui 2π.

Pentru orice numere complexe $z, z_1, z_2 \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ au loc relațiile:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in Z, \end{cases} \tag{8}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \tag{9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big), \tag{10}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (\textbf{formula lui Moivre}), \qquad (11).$$

Rădăcina de ordinul n, $n \in N^*$, $n \geq 2$ a numărului complex z este numărul complex u cu proprietatea $u^n = z$.

Toate rădăcinile ecuației $u^n = z$ se notează prin $\sqrt[n]{z}$.

Dacă $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, atunci fiecare din cele n rădăcini $\sqrt[n]{z}$ se obțin din formula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (12)$$

pentru $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze suma, diferenţa, produsul şi câtul numerelor complexe z_1 şi z_2.

a) $z_1 = 2-5i$, $z_2 = 1-6i$;

b) $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 3-4i$;

c) $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 13-i$.

<u>Soluţii</u>

Aplicând formulele (1)-(4) avem:

a) $z_1 + z_2 = (2-5i)+(1-6i) = (2+1)+(-5-6)i = 3-11i$;

$z_1 - z_2 = (2-5i)-(1-6i) = (2-1)+(-5-(-6))i = 1+i$;

$z_1 \cdot z_2 = (2-5i)\cdot(1-6i) = (2\cdot 1-(-5)(-6))+(2\cdot(-6)+(-5)\cdot 1)i = -28-17i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-5i}{1-6i} = \frac{2-5i}{1-6i}\cdot\frac{1+6i}{1+6i} = \frac{(2\cdot 1-(-5)\cdot 6)+(2\cdot 6+(-5)\cdot 1)i}{1^2+6^2} = \frac{32+7i}{37} = \frac{32}{37}+\frac{7}{37}i.$$

b) $z_1 + z_2 = 6$; $z_1 - z_2 = 8i$; $z_1 \cdot z_2 = 25$; $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{7}{25}+\dfrac{24}{25}i.$

c) $z_1+z_2 = 10+i$; $z_1-z_2 = -16+3i$; $z_1 \cdot z_2 = -37+29i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{41}{170}+\dfrac{23}{170}i.$

2. Să se calculeze: a) $\dfrac{4-2i}{1+i}+\dfrac{2+5i}{1-i}$; b) $\dfrac{2+3i}{4-2i}-\dfrac{1-3i}{2i}$; c) $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$; d) $\dfrac{1+i}{(1-i)^2}+\dfrac{1-i}{(1+i)^2}$.

<u>Soluţii</u>

a) $$\frac{4-2i}{1+i}+\frac{2+5i}{1-i} = \frac{(4-2i)(1-i)+(2+5i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-6i-3+7i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

b) $$\frac{2+3i}{4-2i}-\frac{1-3i}{2i} = \frac{2i(2+3i)-(4-2i)(1-3i)}{2i(4-2i)} = \frac{-6+4i+2+14i}{4+8i} = \frac{-4+18i}{4(1+2i)} =$$

$$= \frac{(-4+18i)(1-2i)}{4(1+2i)(1-2i)} = \frac{32+26i}{4\cdot 5} = \frac{8}{5}+\frac{13}{10}i.$$

c) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}=\frac{1+i}{4i}=\frac{(1+i)\cdot i}{4i\cdot i}=\frac{-1+i}{-4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i.$

d) $\frac{1+i}{(1-i)^2}+\frac{1-i}{(1+i)^2}=\frac{(1+i)^3+(1-i)^3}{[(1-i)(1+i)]^2}=\frac{2-6}{4}=-1.$

3. Să se simplifice fiecare din expresiile: a) i^{41}; b) i^{62}; c) i^{79}; d) i^{84}.

Soluții

Avem $i^1=i$, $i^2=-i$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, $i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot i^2=-1$, $i^7=i^4\cdot i^3=-i$, $i^8=(i^4)^2=1$, prin urmare, puterile naturale ale lui i sunt egale ciclic cu $i, 1, -i$ şi 1.

Astfel, pentru $\forall n\in N$, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$. De aici:

a) $i^{41}=i^{40+1}=i^{40}\cdot i=i$;

b) $i^{62}=i^{4\cdot 15}\cdot i^2=1\cdot i^2=-1$;

c) $i^{79}=i^{4\cdot 19+3}=-i$;

d) $i^{84}=i^{4\cdot 21}=1$.

4. Să se determine numerele reale x şi y astfel încât au loc egalităţile:

a) $\frac{3}{x}i-4i+4=-i+\frac{6}{x}-2y$;

b) $(2+3i)(x-1)+(2-3i)(x-y+1)=8-3i$;

c) $(3x+4yi)(3x-4yi)+2yi=73+4i$;

d) $x^3+xy^2i=65-y^3+(20-x^2y)i$.

Soluții

Utilizând definiția egalității a două numere complexe, în fiecare caz se obține şi se rezolvă un sistem de două ecuații cu două necunoscute.

În cazul a) avem $\begin{cases}\frac{3}{x}-4=-1,\\ \frac{6}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{x}=3,\\ -2y=4-\frac{6}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

Răspuns: x=1, y=1.

În cazul b), efectuând operațiile, avem $\begin{cases}2x-2+2x-2y+2=8,\\ 3x-3-3x+3y-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=1.\end{cases}$

Răspuns: x=2,5; y=1.

În cazul c) similar b) se obține $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 = 73, \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 = 9 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$.

Răspuns: $x = 1, y = 2$ sau $x = -1, y = 2$.

În cazul d) avem

$$\begin{cases} x^3 = 65 - y^3, \\ xy^2 = 20 - x^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ xy^2 + x^2 y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ 3xy^2 + 3x^2 y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 125, \\ xy(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Răspuns: $x = 1, y = 4$ sau $x = 4, y = 1$.

5. Să se rezolve în C ecuația:

a) $z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0;$

b) $iz^2 + (2-2i)z - 6 + 3i = 0;$

c) $z^2 + (2-i)z - 1 - 7i = 0;$

d) $(2-i)z^2 - (5+i)z + 2 + 2i = 0.$

<u>Soluții</u>

Ecuația de gradul al doilea $az^2 + bz + c = 0$, unde a, b, c sunt numere complexe are rădăcinile $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, unde $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\Delta}$ și $-\sqrt{b^2 - 4ac} = -\sqrt{\Delta}$ sunt rădăcinile pătrate ale numărului complex $\Delta = b^2 - 4ac.$

În cazul a)

$\Delta = (4+3i)^2 - 4(1+5i) = 7 + 24i - 4 - 20i = 3 + 4i = (2+i)^2$, $\sqrt{\Delta} = 2 + i$ și $z_1 = \dfrac{4 + 3i - 2 - i}{2} = 1 + i,$ $z_2 = \dfrac{4 + 3i + 2 + i}{2} = 3 + 2i.$ Deci, $S = \{1 + i, 3 + 2i\}$.

În cazul b) $\Delta = (4+2i)^2$ și $z_1 = 3i$, $z_2 = 2 - i$. Deci, $S = \{3i, 2 - i\}.$

În cazul c) $\Delta = (4+3i)^2$, $z_1 = -3 - i,$ $z_2 = 1 + 2i.$ Deci, $S = \{-3 - i, 1 + 2i\}.$

În cazul d) $\Delta = 2i = (1+i)^2$, $z_1 = 0,8 + 0,4i$, $z_2 = 1+i$. Deci, $S = \{0,8 + 0,4i;\quad i+1\}$.

6. Să se determine opusul, conjugatul şi inversul numărului complex: a) $3+2i$; b) i; c) $\frac{2+i}{1-i}$.

<u>Soluții</u>

Fie numărul complex $z = a + bi \neq 0$. Cum opusul lui z este $-z = -a - bi$, conjugatul lui z este $\bar{z} = a - bi$ şi inversul lui z este $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ avem:

a) opusul lui $3+2i$ este $-3-2i$, conjugatul lui $3+2i$ este $3-2i$, inversul lui $3+2i$ este $\frac{3-2i}{13}$.

b) opusul lui i este $-i$, conjugatul lui i este $-i$, inversul lui i este $-i$.

c) avem $\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{2} = \frac{1+3i}{2}$ şi astfel opusul, conjugatul şi inversul lui $\frac{2+i}{1-i}$ sunt respectiv $\frac{-1-3i}{2}$, $\frac{1-3i}{2}$, $\frac{1-3i}{5}$.

7. Să se determine valorile reale ale lui a şi b, astfel încât numerele complexe $z_1 = a^2 + 4b - bi$ şi $z_2 = 4 + b - \frac{2}{i} - a^2 i$ să fie: a) opuse; b) egale; c) conjugate.

<u>Soluții</u>

Scriem numărul z_2 sub forma algebrică $z_2 = b + 4 + (2 - a^2)i$. De aici rezultă:

a) $z_1 = -z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4b = -b - 4 \\ b = 2 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{7}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Răspuns: Numerele z_1 şi z_2 sunt opuse pentru $a = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, $b = -\frac{3}{2}$.

b) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4b = b + 4 \\ -a^2 + 2 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{5}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Răspuns: Numerele z_1 şi z_2 sunt egale pentru $a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, $b = \frac{1}{2}$.

c) $z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4b = b + 4 \\ a^2 - 2 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$

Răspuns: Numerele z_1 şi z_2 sânt conjugate pentru $a = \pm 1, \quad b = 1.$

8. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul: a) $z = 2i;$ b) $z = \sqrt{3} + i;$ c) $z = 2 - \sqrt{3} + i;$ d) $z = 1 - \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha \left(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \right).$

Soluții

a) $z = 2i = 0 + 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \right).$

b) $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right).$

c) Calculăm modulul numărului z:

$$r = |z| = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2\left(4 - 2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{2\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Găsim $\arg z$ conform egalităților (5):

$$\cos\varphi = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}{4}.$$

De aici obținem $\varphi = 75^\circ$. Prin urmare, conform formulei (7) $z = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} \right).$

d) $\begin{array}{l} z = 2\sin^2\alpha - i\sin 2\alpha = 2\sin\alpha(\sin\alpha - i\cos\alpha) \\ r = |z| = 2|\sin\alpha| = -2\sin\alpha, \end{array}$, deoarece $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right).$

De aici $z = -2\sin\alpha(-\sin\alpha + i\cos\alpha) = -2\sin\alpha\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right).$

9. Să se calculeze: a) $\sqrt{80 + 18i};$ b) $\sqrt{-1 - 4\sqrt{3}i};$ c) $\sqrt{\frac{33 + 56i}{-3 + 4i}};$ d) $\sqrt{\frac{3 + 4i}{5 + 12i}}.$

Soluții

Fie z_0 şi z_1 rădăcinile pătrate ale numărului complex $z = a + bi.$ Dacă $b > 0$, atunci avem:

$$z_0 = \sqrt{\frac{a+|z|}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}},$$
$$z_1 = -z_0 = -\sqrt{\frac{a+|z|}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}. \qquad (13)$$

Dacă $b<0$, atunci avem:

$$z_0 = \sqrt{\frac{a+|z|}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+|z|}{2}}, \qquad z_1 = -z_0. \qquad (14)$$

În cazul a) avem $z_0 = \sqrt{\frac{80+82}{2}} + i\sqrt{\frac{-80+82}{2}} = \sqrt{81}+i = 9+i,\;\; z_1 = -9-i.$

În cazul b) avem $z_0 = \sqrt{\frac{-1+7}{2}} - i\sqrt{\frac{1+7}{2}} = \sqrt{3}-2i,\;\; z_1 = -\sqrt{3}+2i.$

În cazul c) avem $\sqrt{\frac{33+56i}{-3+4i}} = \sqrt{\frac{(33+56i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}} = \sqrt{\frac{125-300i}{25}} = \sqrt{5-12i}$ şi

$$z_0 = \sqrt{\frac{5+13}{2}} - i\sqrt{\frac{-5+13}{2}} = 3-2i,\;\; z_1 = -3+2i.$$

În cazul d) $\sqrt{\frac{3+4i}{5+12i}} = \sqrt{\frac{(3+4i)(5-12i)}{169}} = \frac{\sqrt{63-16i}}{13}$ şi

$$z_0 = \frac{1}{13}\left(\sqrt{\frac{63+65}{2}} - i\sqrt{\frac{-63+65}{2}}\right) = \frac{1}{13}(8-i), \qquad z_1 = -\frac{1}{13}(8-i).$$

10. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{-i}$; b) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; c) $\sqrt[3]{2+11i}$.

Soluţii

a) Scriem numărul complex $-i = 0+(-1)\cdot i$ în forma trigonometrică. Avem $|-i|=1$ şi $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$. De aici $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. În conformitate cu formula (12) $\sqrt[3]{-i} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, unde $k = 0, 1, 2.$

Notând aceste rădăcini prin z_k avem:

$$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Răspuns: $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$.

b) Analog $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ și conform formulei (12) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$, unde $k=0, 1, 2, 3.$

Pentru $k=0$ obținem

$$z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{4}\left(\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right).$$

Pentru $k=1$ obținem

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{4}\left(\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right).$$

Pentru $k=2$ obținem

$$z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-z_0.$$

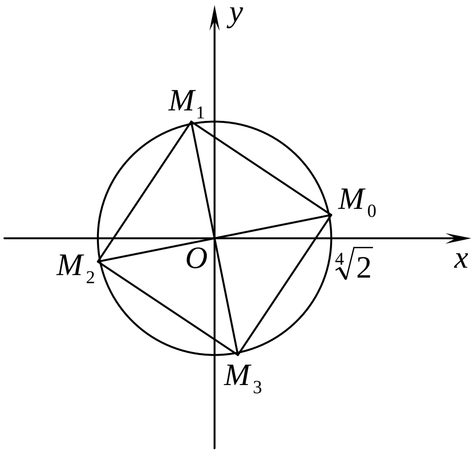
Pentru $k=3$ obținem

$$z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=-z_1.$$

Deci cele patru rădăcini de ordinul patru ale numărului complex $z=1+i\sqrt{3}$ sunt $\pm\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\left(\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$, $\pm\frac{\sqrt[4]{8}}{4}\left(1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$.

Imaginile numerelor z_0, z_1, z_2, z_3 sunt punctele M_0, M_1, M_2, M_3 din figura alăturată.



Ele sunt vârfurile pătratului înscris în cercul de raza $\sqrt[4]{2}$ şi centrul *O*. Menționăm că $m(\angle AOM_0) = \dfrac{\pi}{12}$.

Observație. Cele patru rădăcini z_0, z_1, z_2, z_3 se pot obține şi astfel: $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{1+i\sqrt{3}}}$.

Conform formulelor (13), $\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

Conform aceleaşi formule (13),

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}} + i\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}}\right) =$$

$$= \pm\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right).$$

Conform formulelor (14),

$$\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{-\sqrt{3}-i} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} - i\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}}\right) =$$

$$= \pm\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{3}-1-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right).$$

c) Forma trigonometrică a numărului $z = 2+11i$ este $z = \sqrt{125}\left(\dfrac{2}{\sqrt{125}} + i\dfrac{11}{\sqrt{125}}\right)$.

Deci, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{125}}$, $\sin\varphi = \dfrac{11}{\sqrt{125}}$. De aici rezultă că $\arg z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece, conform formulei (12), cele trei rădăcini de ordinul trei ale lui $z = 2+11i$ se obțin din formula

$$\sqrt[3]{2+11i}=\sqrt[3]{\sqrt{125}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\text{ pentru } k=0,1,2.$$

trebuie să calculăm $\cos\frac{\varphi}{3}$ şi $\sin\frac{\varphi}{3}$ având valorile lui $\cos\varphi$ şi $\sin\varphi$.

Folosim formula lui Moivre şi scriem

$$\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)^3=\cos 3\cdot\frac{\varphi}{3}+i\sin 3\cdot\frac{\varphi}{3}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Explicităm partea stângă, utilizăm definiția egalității a două numere complexe şi obținem sistemul:

$$\begin{cases}\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}=\cos\varphi\\ 3\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}-\sin^3\frac{\varphi}{3}=\sin\varphi\end{cases}$$

Împărțim ecuația a doua, parte cu parte, la prima şi obținem ecuația

$$\frac{3\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}-\sin^3\frac{\varphi}{3}}{\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}=\frac{11}{2}.$$

Aceasta se reduce la o ecuație omogenă de gradul trei care se reduce la ecuația $2tg^3\frac{\varphi}{3}-33tg^2\frac{\varphi}{3}-6tg\frac{\varphi}{3}+11=0$. Dintre rădăcinile $tg\frac{\varphi}{3}=\frac{1}{2}$, $tg\frac{\varphi}{3}=8-\sqrt{75}$ şi $tg\frac{\varphi}{3}=8+\sqrt{75}$ ale acestei ecuații doar $tg\frac{\varphi}{3}=\frac{1}{2}$ verifică condiția $\frac{\varphi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

Din $tg\frac{\varphi}{3}=\frac{1}{2}$ rezultă $\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ şi $\sin\frac{\varphi}{3}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

În fine revenim la formula pentru calcularea $\sqrt[3]{2+11i}$ şi obținem:

$$z_0=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{i}{\sqrt{5}}\right)=2+i,$$

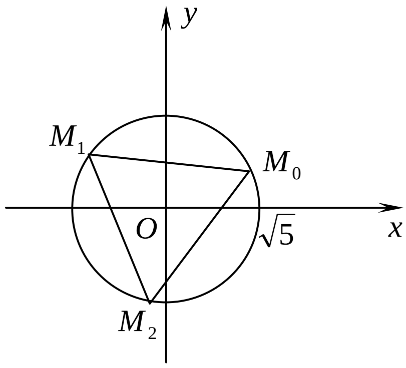
$$z_1=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+i\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)=$$

$$=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right),$$

$$z_2=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$$

$$\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+i\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right).$$

Imaginile numerelor z_0, z_1, z_2 respectiv punctele M_0, M_1, M_2 sunt vârfurile triunghiului echilateral $M_0M_1M_2$ înscris în cercul de rază $\sqrt{5}$ şi centru O.



Exerciţii propuse

1. Fiind dat numărul complex $z=1+i\sqrt{3}$ să se determine:
a) opusul lui; b) inversul lui; c) conjugatul lui; d) $\operatorname{Re} z$; e) $\operatorname{Im} z$; f) $|z|$; g) $\arg z$.

2. Să se calculeze: a) $3-i+(-2+2i)-(6-3i)$; b) $(3+2i)(5-i)$; c) $(1+i)(2+i)^2(3+i)$; d) $i^3+i^{14}+i^{21}+i^{31}+i^{93}+i^{100}$; e) $\frac{(6-i)(3+i)}{(2-i)(1+i)}$; f) $\frac{1}{1-2i}+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-7i}$.

3. Să se determine $a, b\in R$ astfel încât au loc relaţiile:
a) $a+b-(a-b+2)i=0$; b) $a-bi=a^2-b^2-4i$; c) $\frac{5i}{a}-ib+2=6i+\frac{10}{a}-b.$

4. Să se rezolve în C ecuaţiile: a) $z^2+2=0$; b) $z^3+8=0$; c) $z^3-27=0$; d) $z^2+z+1=0$; e) $z^2+2z+3=0$; f) $z+6\overline{z}=7-5i$; g) $z^2+(1-i)z+i=0$; h) $3z^2-(1+2i)z+1-i=0$; i) $z^2+\sqrt{3}+i=0$; j) $|z|^2+z=0$; k) $z^2+\overline{z}=0$; l) $z^2+iz-1=0$.

5. Să se scrie în formă trigonometrică numerele: a) $1-i$; b) $\sqrt{3}+i$; c) $-2i$; d) 3; e) $5\sqrt{3}-5i$; f) $3+4i$.

6. Să se calculeze $z^8+\frac{1}{z^8}$, ştiind că $z+\frac{1}{z}=0$.

7. Să se determine mulţimea punctelor planului complex care sunt imagini ale numerelor complexe $z=x+iy$ ce verifică relaţiile:

a) $|z|=2$; b) $z=|z|$; c) $\arg z=\frac{\pi}{4}$; d) $1<|z|<9$; e) $|2z+1|\geq 2$; f) $|z+i|<|z|$; g) $1\leq|z-1-i|\leq 4$.

8. Să se calculeze: a) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2006}$; c) $\sqrt[4]{i}$; d) $\sqrt[4]{2-2i\sqrt{3}}$; e) $\sqrt[3]{-1}$; f) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+1}$.

9. Un triunghi echilateral are două vârfuri în punctele $z_1=-1$ şi $z_2=-2+i\sqrt{3}$. Să se afle al treilea vârf.

10. Să se determine numărul complex z de modul maximal astfel încât are loc relația: $|z-3-i|=10$.