

Hiperbola

Fiind date punctele distincte F_1 si F_2 din plan (focarele) cu $F_1F_2 = 2c$ si numarul pozitiv $a < c$, se numeste **hiperbola** multimea punctelor M ale planului pentru care modulul diferentei distantelor pana la punctele F_1 si F_2 este egal cu $2a$: $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Ecuatia canonica a hiperbolei, ale carei focare sunt situate pe axa absciselor si sunt simetrice fata de originea sistemului de axe ortogonale, are forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

unde

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0. \quad (2)$$

Numarul $e = \frac{c}{a} > 1$ se numeste **excentricitatea hiperbolei**.

Razele focale $r_1 = MF_1$ si $r_2 = MF_2$ ale punctului $M(x, y)$ al hiperbolei (1) se calculeaza dupa formulele: $r_1 = a + ex, r_2 = -a + ex$ pentru $x > 0$ si $r_1 = -a - ex, r_2 = a - ex$ pentru $x < 0$.

Asiptotele hiperbolei (1) au ecuatiile $y = \pm \frac{b}{a}x$, iar directoarele au ecuatiile $x = \pm \frac{a}{e}$.

Ecuatia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (3)$$

defineste o hiperbola cu focarele pe axa ordonatelor, simetrice fata de originea sistemului de axe ortogonale. Hiperbolele de ecuatii (1) si (3), cu aceiasi parametri a si b , se numesc hiperbole conjugate. Daca $a=b$, hiperbola se numeste hiperbola echilaterala.

Probleme rezolvate

1. Sa se scrie ecuatia hiperbolei, ale carei focare sunt situate pe axa absciselor si sunt simetrice fata de originea sistemului de axe ortogonale, daca:

a) $2c=10, 2a=6$;

b) $2a=2\sqrt{5}, 2b=4$;

c) $2c=6, 2b=2\sqrt{5}$;

d) $2c=10\sqrt{2}$ si asimptotele au ecuatiile $y = \pm \frac{3}{4}x$;

e) hiperbola trece prin punctul $(9, 9)$ si are asimptotele $y = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}x$;

f) virfurile si focarele hiperbolei coincid, respectiv, cu focarele si virfurile elipsei $5x^2 + 64y^2 = 320$;

h) hiperbola trece prin punctele $(6, 1)$ si $(8, 2\sqrt{2})$.

Solutie

a) $c=5$ si $a=3 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16$. Ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b) $a=\sqrt{5}, b=2$ si ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

c) $c=3, b=\sqrt{5} \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 4$. Ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

d) $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ si $c = 5\sqrt{2} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \cdot a$ si $a^2 = 50 - \frac{9}{16} \cdot a^2$. De aici, $a^2 = 32$, $b^2 = 18$ si ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$.

e) $\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ si $\frac{9}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 1$, $b^2 = \frac{9}{8}$. Ecuatia hiperbolei este $9x^2 - 8y^2 = 1$.

f) $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ si $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = 1$. Ecuatia hiperbolei este $2x^2 - y^2 = 1$.

g) Scriem ecuatia canonica a elipsei $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{5} = 1$. Deci, pentru elipsa $a^2 = 64$, $b^2 = 5$, $c^2 = a^2 - b^2 = 59$. Din conditia problemei, pentru hiperbola $c^2 = 64$ si $a^2 = 59$. De aici, $b^2 = c^2 - a^2 = 5$. Ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{59} - \frac{y^2}{5} = 1$.

2. Prin punctul $M(0, 1)$ si virful sting al hiperbolei $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ este construita o dreapta. Sa se afle al doilea punct de intersectie al acestei drepte cu hiperbola.

Solutie

Din $a^2 = 4$ deducem coordonatele virfului al hiperbolei: $A(-2, 0)$. Scriem ecuatia dreptei MA : $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 1$. Rezolvam sistemul

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 = 12 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

si aflam punctele de intersectie ale dreptei MA cu hiperbola: $A(-2, 0)$ si $N(4, 3)$.

Raspuns: $(4, 3)$.

3. O hiperbola trece prin punctul $(3, \sqrt{2})$, iar unghiul format de asimptotele ei este egal cu 60° . Sa se scrie ecuatia canonica a hiperbolei.

Solutie

In acest caz $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ca in problema 1.e), gasim $a^2 = 3$, $b^2 = 1$ si ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

4. Sa se afle punctele de intersectie ale hiperbolei $x^2 - 4y^2 = 20$ cu dreapta $2x - y + 10 = 0$.

Solutie

Rezolvand sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 20 \\ 2x - y = -10, \end{cases}$$

obtinem punctele cautate: $(-6, -2)$, $\left(\frac{-14}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

5. Sa se scrie ecuatia figurii formate din punctele planului egal departate de cercul $(x+2)^2 + y^2 = 4$ si de punctul $A(2, 0)$.

Solutie

Fie $M(x, y)$ este un punct al figurii din enunt. Atunci distanta d_1 de la punct pana la cerc este egala cu $MT = MC - TC = MC - 2$. Deci, $d_1 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - 2$.

$$MA = d_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Conform ipotezei, $d_1 = d_2$. Obtinem ecuatia

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} - 2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}.$$

Observatie. Ecuatia obtinuta este ecuatia hiperbolei cu focarele $C(-2, 0)$ si $A(2, 0)$ si virfurile $V_1(-1, 0)$, $V_2(1, 0)$.

Cum distanta de la un punct la o figura este egala, prin definitie, cu cea mai mica dintre distantele de la punctul dat la punctele figurii, rezulta ca doar punctele ramurii drepte ale hiperbolei obtinute verifica conditia din enuntul problemei.

Punctele ramurii stangi ale acestei hiperbole posedata proprietatea: cea mai mare distanta de la fiecare punct al acestei ramuri pana la cerc este egala cu distanta lui pana la A. ($NT_1 = NA$, pe desen).

6. Sa se determine conditia pentru ca dreapta $y = kx + m$ sa fie tangenta la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solutie

Repetand rationamentele din solutia problemei **5 (Elipsa)**, obtinem conditia $a^2k^2 - b^2 = m^2$.

7. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la hiperbola $4x^2 - y^2 = 64$ perpendiculare pe dreapta $3x + 10y - 8 = 0$. Sa se afle punctele de tangenta.

Solutie

Avem $a^2 = 16$, $b^2 = 64$, $k = \frac{10}{3}$ si, conform formulei din problema precedenta, $m = \pm \sqrt{16 \cdot \frac{100}{9} - 64} = \pm \frac{32}{3}$. Deci, ecuatiile tangentelor sunt: $y = \frac{10}{3}x \pm \frac{32}{3}$.

Dreapta $y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$ si hiperbola sunt tangente in punctul $T_1(5, 6)$, care este solutia sistemului

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 64 \\ y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3} \end{cases}$$

Analog, dreapta $y = \frac{10}{3}x + \frac{32}{3}$ si hiperbola au punctul de tangenta $T_2(-5, -6)$.

8. Utilizand rezultatul de la problema **6.**, sa se deduca ecuatia $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$ a tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ in punctul ei $M_0(x_0, y_0)$.

Solutie

Pentru ca dreapta $y - y_0 = k(x - x_0)$ sa fie tangenta la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ in punctul ei $M_0(x_0, y_0)$, trebuie sa fie indeplinite conditiile

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

si

$$k^2 a^2 - b^2 = (y_0 - kx_0)^2. \quad (5)$$

Ecuatia a doua scrisa sub forma $(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 + b^2 = 0$ are, in virtutea conditiei (4), discriminantul nul si deci are solutia $k = \frac{x_0y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{x_0y_0}{a^2 + \frac{a^2y_0^2}{b^2} - a^2} = \frac{x_0y_0}{\frac{a^2y_0^2}{b^2}} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

Astfel ecuatia tangentei este $y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$, care usor se aduce la forma

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

9. Dreptele $x + y - 1 = 0$, $5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ sunt tangente la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sa se scrie ecuatia hiperbolei.

Solutie

Deoarece dreapta $y = -x + 1$ este tangenta la hiperbola, are loc egalitatea $a^2 - b^2 = 1$ (vezi problema 6.). Analog, din conditia de tangenta a dreptei $5x - 4\sqrt{2}y - 2 = 0$ cu hiperbola, obtinem $\frac{25}{32} \cdot a^2 - b^2 = \frac{1}{8}$.

Rezolvand sistemul

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 25a^2 - 32b^2 = 4, \end{cases}$$

obtinem $a^2 = 4$, $b^2 = 3$ si ecuatia hiperbolei este $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

10. Sa se calculeze produsul distantelor de la un punct arbitrar al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ la asimptotele ei.

Solutie

Fie $M_0(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar de pe hiperbola. Atunci $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$.

Cum asimptotele hiperbolei au ecuatiile $bx \pm ay = 0$, gasim distantele de la punctul M_0 la aceste asimptote: $d_1 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $d_2 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Calculam produsul

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Deci, produsul distantelor de la un punct arbitrar al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ la asimptotele ei este constant si este egal cu $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

Probleme propuse

1. Sa se determine semiaxele a , b si focarele F_1 , F_2 ale hiperbolelor:
a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$; c) $5x^2 - y^2 = 1$.
2. Sa se calculeze distantele de la focarele hiperbolei $3x^2 - 4y^2 = 12$ la asimptotele ei.
3. Sa se afle punctele de intersectie ale hiperbolei $x^2 - 4y^2 = 20$ cu dreapta $2x - y - 10 = 0$.
4. Sa se scrie ecuatiile dreptelor care contin razele focale ale punctului $(-10, \sqrt{5})$ de pe hiperbola $x^2 - 4y^2 = 80$.
5. Sa se scrie ecuatia tangentei la hiperbola $3x^2 - 4y^2 = 72$ in punctul $L(6, -3)$.
6. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la hiperbola $x^2 - 4y^2 = 20$ paralele cu dreapta $3x - 4y + 5 = 0$.
7. Sa se scrie ecuatiile tangentelor duse prin punctul $(1, -5)$ la hiperbola $5x^2 - 3y^2 = 15$.
8. Dreptele $3x + 2y + 12 = 0$, $9x - 10y - 12 = 0$ sunt tangente la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sa se scrie ecuatia hiperbolei.
9. Dreapta $2x - y + 4 = 0$ este tangenta la hiperbola ale carei focare sunt $F_1(-3, 0)$ si $F_2(3, 0)$. Sa se scrie ecuatia hiperbolei.
10. Dreptele $10x - 3y - 32 = 0$, $3x + 10y - 75 = 0$ sunt, respectiv, tangenta si normala intr-un punct la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sa se scrie ecuatia hiperbolei.