Ecuatii si inecuatii de gradul al doilea si reductibile la gradul al doilea

Ecuatii de gradul al doilea

Ecuatia de forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$, x - variabila, se numeste ecuatie de gradul al doilea (ecuatia patrata).

Numerele a, b si c din (1) se numesc coeficienti ai ecuatiei de gradul al doilea, iar numarul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numeste discriminant al ecuatiei de gradul al doilea.

Exemplul 1. Ecuatiile ce urmeaza sunt ecuatii de gradul al doilea:

a) $6x^2 + 5x + 1 = 0,\ \text{cu } a = 6,\ b = 5,\ c = 1$ si $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$;

b) $9x^2 - 12x + 4 = 0,\ \text{cu } a = 9,\ b = -12,\ c = 4$ si $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$;

c) $x^2 - x - 2 = 0,\ \text{cu } a = 1,\ b = -1,\ c = -2$ si $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$;

d) $-\dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x - 4 = 0,\ \text{cu } a = -\dfrac{1}{2},\ b = \sqrt{3},\ c = -4$ si $\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-4) = -5$.

Ecuatiile de gradul al doilea pot fi rezolvate conform urmatoarei afirmatii:

Afirmatia 1. Daca

a) discriminantul ecuatiei (1) este pozitiv, atunci ecuatia (1) are doua radacini distincte:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{si} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{2}$$

b) discriminantul ecuatiei (1) este egal cu zero, atunci ecuatia (1) are doua radacini egale (o radacina de multiplicitatea doi):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}; \tag{3}$$

c) discriminantul ecuatiei (1) este negativ, atunci ecuatia (1) nu are radacini reale.

Asadar, (a se vedea exemplul 1):

1. ecuatia a) are doua radacini distincte $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ si $x_2 = -\dfrac{1}{3}$;
2. ecuatia b) are doua radacini egale $x_1 = x_2 = \dfrac{2}{3}$;
3. ecuatia c) are doua radacini distincte $x_1 = -1$ si $x_2 = 2$;
4. ecuatia d) nu are radacini reale.

Ecuatia de gradul al doilea cu $a = 1$ se numeste ecuatie patrata redusa si se noteaza de regula

$$x^2 + px + q = 0 \tag{4}$$

si formulele (2) si (3) de calcul ale radacinilor devin

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (\Delta > 0) \tag{5}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}, \quad (\Delta = 0). \tag{6}$$

Ecuatiile de forma

$$ax^2 + bx = 0, \tag{7}$$

$$ax^2 + c = 0. \tag{8}$$

se numesc ecuatii de gradul al doilea incomplete. Ecuatiile (7), (8) pot fi rezolvate cu ajutorul afirmatiei 1 sau altfel, mai simplu:

$$ax^2 + bx = 0 \;\Leftrightarrow\; x(ax+b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$$

$$ax^2 + c = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -\frac{c}{a} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \\ ac \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \emptyset, \\ ac > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ 2x^2 - 7x = 0; \qquad b)\ 9x^2 - 25 = 0; \qquad c)\ \sqrt{2}x^2 + 3 = 0.$$

Rezolvare. a) $2x^2 - 7x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(2x-7) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{7}{2}; \end{array}\right.$

b) $9x^2 - 25 = 0 \;\Leftrightarrow\; 9x^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \dfrac{25}{9} \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \pm\dfrac{5}{3}$;

c) $\sqrt{2}x^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, de unde rezulta ca ecuatia nu are radacini (membrul din stanga egalitatii este nenegativ, iar cel din dreapta - negativ).

In continuare vom analiza cateva exemple de ecuatii ce se reduc la rezolvarea ecuatiilor de gradul al doilea.

Ecuatii bipatrate.

Ecuatia de forma
$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{9}$$
unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, x - variabila, se numeste ecuatie bipatrata. Prin substitutia $x^2 = t$ (atunci $x^4 = t^2$) ecuatia bipatrata se reduce la o ecuatie de gradul al doilea.

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ x^4 - 29x^2 + 100 = 0; \qquad b)\ x^4 + x^2 - 6 = 0; \qquad c)\ 2x^4 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Rezolvare. a) Se noteaza $x^2 = t$, atunci $x^4 = t^2$ si se obtine o ecuatie de gradul al doilea in t:
$$t^2 - 29t + 100 = 0$$
cu solutiile $t_1 = 4$ si $t_2 = 25$. Astfel se obtine totalitatea de ecuatii
$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x^2 = 25, \end{array}\right.$$
de unde rezulta solutiile $x = \pm 2$ si $x = \pm 5$.

b) Se procedeaza similar exemplului precedent si se obtine ecuatia patrata $t^2 + t - 6 = 0$ cu solutiile $t = -3$ si $t = 2$. Cum $t = x^2 \geq 0$, ramane $t = 2$ sau $x^2 = 2$, de unde $x = \pm\sqrt{2}$.

c) Se utilizeaza substitutia $t = x^2$, si se obtine ecuatia de gradul al doilea in t, $2t^2 - 3t + 4 = 0$ care nu are solutii reale. Prin urmare, si ecuatia enuntata nu are solutii reale.

Ecuatii simetrice de gradul patru.

Ecuatiile de forma
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \tag{10}$$
unde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se numesc ecuatii simetrice de gradul patru.

Prin intermediul substitutiei $t = x + \frac{1}{x}$ acest tip de ecuatii se reduce la ecuatii de gradul al doilea. In adevar, cum $x = 0$ nu este solutie a ecuatiei (10) ($a \neq 0$), multiplicand cu $\frac{1}{x^2}$ ambii membri ai ecuatiei, se obtine ecuatia echivalenta
$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$
sau
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Se noteaza $x + \frac{1}{x} = t$ atunci $|t| \geq 2$ si cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$, ecuatia devine
$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0,$$

adica o ecuatie de gradul al doilea, rezolvarea careia nu prezinta greutati.

Nota. Ecuatia $ax^4 \mp bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0$ se reduce la o ecuatie utilizand substitutia $t = x - \dfrac{1}{x}$.

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0,$$
$$b)\ 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Rezolvare. a) Ecuatia data este o ecuatie simetrica de gradul patru. Cum $x = 0$ nu e solutie, ecuatia este echivalenta cu ecuatia (se divide la $x^2 \neq 0$ si se grupeaza convenabil)

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Se noteaza $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \geq 2$, atunci $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ si ecuatia devine

$$t^2 - 2 + 5t + 2 = 0$$

sau $t^2 + 5t = 0$, cu solutiile $t_1 = -5$, $t_2 = 0$ (nu se verifica conditia $|t| \geq 2$). Prin urmare,

$$x + \frac{1}{x} = -5,$$

de unde rezulta ecuatia patrata $x^2 + 5x + 1 = 0$ cu solutiile $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{21}}{2}$ si $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2}$.

b) Cum $x = 0$ nu este solutie a ecuatiei date, se divide cu x^2 si se obtine ecuatia

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Se noteaza $t = x - \dfrac{1}{x}$, atunci $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$ si se obtine ecuatia patrata

$$2(t^2 + 2) + 3t - 4 = 0 \ \text{ sau } \ 2t^2 + 3t = 0,$$

cu solutiile $t_1 = 0$ si $t_2 = -\dfrac{3}{2}$. Prin urmare

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{x} = 0, \\[2ex] x - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Din prima ecuatie a sistemului se obtine $x_1 = -1$ si $x_2 = 1$, iar din a doua $x_3 = -2$ si $x_4 = \dfrac{1}{2}$.

Ecuatii reversibile

Ecuatia

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{11}$$

unde $\{a, b, c, d\} \subset \mathbf{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0$ si $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2$ se numeste ecuatie reversibila de gradul patru.

Acest tip de ecuatii se reduc la ecuatii de gradul al doilea utilizand substitutia $t = x + \dfrac{d}{bx}$.

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatia

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Rezolvare. Se observa ca $\left(\dfrac{4}{1}\right) = \left(\dfrac{-2}{1}\right)^2$ si prin urmare ecuatia este o ecuatie reversibila de gradul patru. Cum $x = 0$ nu este soltuie, se divide la x^2 (si nu se pierd solutii), si se obtine ecuatia

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + x - \frac{2}{x} - 6 = 0.$$

Se noteaza $t = x - \dfrac{2}{x}$, atunci $t^2 = x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 4$, de unde $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 + 4$ si se obtine ecuatia de gradul al doilea

$$t^2 + 4 + t - 6 = 0 \quad \text{sau} \quad t^2 + t - 2 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -2$ si $t_2 = 1$. Astfel se obtine totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{2}{x} = -2, \\[2ex] x - \dfrac{2}{x} = 1, \end{array}\right.$$

sau, echivalent $(x \neq 0)$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 2 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{array}\right.$$

de unde se obtin solutiile $x = -1 \pm \sqrt{3}$, $x = -1$ si $x = 2$.

Ecuatii de forma

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c. \tag{12}$$

Se utilizeaza substitutia $t = x + \dfrac{a + b}{2}$ si se reduce la o ecuatie bipatrata in raport cu t.

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatia

$$(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 82.$$

Rezolvare. Se utileaza substitutia $t = x + \dfrac{3 + (-1)}{2} = x + 1$ si se obtine ecuatia echivalenta in t:

$$(t + 2)^4 + (t - 2)^4 = 82$$

sau

$$t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 + t^4 - 8t^3 + 24t^2 - 32t + 16 - 82 = 0$$

de unde rezulta ecuatia bipatrata

$$t^4 + 24t^2 - 25 = 0$$

cu solutia $t^2 = 1$, de unde $t = \pm 1$ si $x + 1 = \pm 1$ conduce la solutiile $x = -2$ si $x = 0$.

Ecuatia de forma

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m \tag{13}$$

unde $a + b = c + d$.

Acest tip de ecuatii se reduce la ecuatii de gradul doi utilizand esential conditia $a+b = c+d$. In adevar,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
$$(x + c)(x + d) = x^2 + (c + d)x + cd = x^2 + (a + b)x + cd$$

si notand $x^2+(a+b)x = t$ (sau $x^2+(a+b)x+ab = t$) se obtine ecuatia patrata $(t+ab)(t+cd) = m$ (respectiv $t(t + cd - ab) = m$).

Exemplul 7. Sa se rezolve ecuatia

$$(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19.$$

Rezolvare. Se observa ca $-2 + 7 = 1 + 4$, se grupeaza convenabil

$$[(x - 2)(x + 7)] \cdot [(x + 1)(x + 4)] = 19$$

si se deschid parantezele rotunde

$$[x^2 + 5x - 14][x^2 + 5x + 4] = 19.$$

Se noteaza $t = x^2 + 5x - 14$, atunci $x^2 + 5x + 4 = t + 18$ si ecuatia devine

$$t(t + 18) = 19 \quad \text{sau} \quad t^2 + 18t - 19 = 0$$

cu solutiile $t = -19$ si $t = 1$. Asadar, se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x - 14 = -19, \\ x^2 + 5x - 14 = 1, \end{array}\right.$$

cu solutiile $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$ si $x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{85}}{2}$.

Ecuatii fractionar-rationale

Exemplul 8. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ \frac{3x+4}{5x-4}-\frac{2x-1}{x+3}=0;$$

$$b)\ \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{x-2}+1=0;$$

$$c)\ \frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-3}=0;$$

$$d)\ \frac{x+1}{x-1}+\frac{x+5}{x-5}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}.$$

Rezolvare. a) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R}\setminus\left\{-3;\frac{4}{5}\right\}$. In *DVA* ecuatia este echivalenta cu ecuatia (se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu $(5x-4)(x+3)$):

$$(3x+4)(x+3)-(2x-1)(5x-4)=0$$

de unde, deschizand parantezele, se obtine ecuatia patrata

$$7x^2-26x-8=0$$

cu solutiile $x_1=-\frac{2}{7}$ si $x_2=4$. Ambele solutii verifica *DVA*.

b) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R}\setminus\{2;3\}$. Se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu $(x-2)(x-3)$ (in *DVA* acest produs este diferit de zero) si se obtine ecuatia

$$x-1+(x-2)(x-3)+x-3=0$$

sau

$$x^2-3x+2=0$$

cu solutiile $x_1=1$ si $x_2=2$. Cum ultima radacina nu verifica *DVA* ramane $x=1$.

c) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R}\setminus\{3;4;5;6\}$. Se grupeaza convenabil

$$\left(\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}\right)=0$$

si se aduce la numitor comun in fiecare paranteza

$$\frac{2x-9}{(x-6)(x-3)}+\frac{2x-9}{(x-4)(x-5)}=0.$$

Se multiplica cu $(x-6)(x-3)(x-4)(x-5)$ ($\neq 0$ pe *DVA*) si se obtine ecuatia

$$(2x-9)(x-4)(x-5)+(2x-9)(x-6)(x-3)=0$$

sau

$$(2x-9)[(x-4)(x-5)+(x-6)(x-3)]=0,$$

de unde rezulta totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} 2x-9=0, \\ x^2-9x+19=0 \end{array}\right.$$

cu solutiile $x=\dfrac{9}{2}$, $x=\dfrac{9\pm\sqrt{5}}{2}$.

d) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R}\setminus\{1;3;4;5\}$. Se evidentiaza partea intreaga a fiecarui termen al ecuatiei:

$$\frac{x-1+2}{x-1}+\frac{x-5+10}{x-5}=\frac{x-3+6}{x-3}+\frac{x-4+8}{x-4}$$

sau

$$1+\frac{2}{x-1}+1+\frac{10}{x-5}=1+\frac{6}{x-3}+1+\frac{8}{x-4}$$

de unde

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x-5}=\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x-4}$$

sau

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-3}=\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-5}.$$

Se aduce in fiecare membru la numitor comun si se obtine

$$\frac{-2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{-x}{(x-4)(x-5)}$$

sau

$$2x(x-4)(x-5)-x(x-1)(x-3)=0,$$

de unde rezulta totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-14x+37=0, \end{array}\right.$$

cu solutiile $x_1=0$ si $x_{2,3}=7\pm2\sqrt{3}$ (toate solutiile sunt din *DVA*).

Ecuatii de forma

$$\frac{px}{ax^2+bx+c}+\frac{qx}{ax^2+dx+c}=r, \quad (r\neq 0). \tag{14}$$

Acest tip de ecuatii se reduc la ecuatii patrate utilizand substitutia $t=ax+\dfrac{c}{x}$.

Exemplul 9. Sa se rezolve ecuatia

$$\frac{2x}{2x^2-5x+3}+\frac{13x}{2x^2+x+3}=6.$$

Rezolvare. *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R}\setminus\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$. Cum $x=0$ nu este solutie a acestei ecuatii, ecuatia se scrie

$$\frac{2}{2x-5+\dfrac{3}{x}}+\frac{13}{2x+1+\dfrac{3}{x}}=6$$

(numaratorul si numitorul fractiilor din membrul stang al ecuatiei se divid cu x).

Se noteaza $t = 2x + \dfrac{3}{x}$ si ecuatia devine

$$\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6$$

sau $2(t+1) + 13(t-5) = 6(t-5)(t+1)$, de unde rezulta ecuatia patrata

$$6t^2 - 39t + 33 = 0 \ \text{ sau } \ 2t^2 - 13t + 11 = 0$$

cu solutiile $t_1 = 1$ si $t_2 = \dfrac{11}{2}$ (ambele solutii verifica restrictiile $t \neq 5$ si $t \neq -1$). Prin urmare, se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{3}{x} = 1, \\[2ex] 2x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{11}{2}, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 = 0, \\ 4x^2 - 11x + 6 = 0 \end{array}\right.$$

cu solutiile $x_1 = \dfrac{3}{4}$ si $x_2 = 2$.

Ecuatii ce contin expresii reciproc inverse

Ecuatiile de forma

$$a \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + b \cdot \frac{g(x)}{f(x)} + c = 0 \quad (ab \neq 0), \tag{15}$$

se reduc la ecuatii patrate prin substitutia $t = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, atunci $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{t}$ si ecuatia (15) se scrie $at^2 + ct + b = 0$.

Exemplul 10. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5, \qquad b)\ 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Rezolvare. a) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}; 0\right\}$. Se noteaza $t = \dfrac{2x+1}{x}$, atunci $\dfrac{4x}{2x+1} = 4 \cdot \dfrac{1}{t}$ si ecuatia devine

$$t + \frac{4}{t} = 5$$

de unde rezulta ecuatia $t^2 - 5t + 4 = 0$ cu solutiile $t_1 = 1$ si $t_2 = 4$. Astfel se obtine totalitatea de ecuatii de gradul intai

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+1}{x} = 1, \\[2ex] \dfrac{2x+1}{x} = 4, \end{array}\right.$$

cu solutiile $x = -1$ si $x = \dfrac{1}{2}$ (ambele solutii verifica DVA).

b) DVA al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$. Se observa, ca $x = \pm 2$ nu verifica ecuatia data si prin urmare multiplicand ecuatia cu $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$ se obtine ecuatia echivalenta

$$20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} - 5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + 48 = 0.$$

Se noteaza $t = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$ si ecuatia devine

$$20t - \frac{5}{t} + 48 = 0 \quad \text{sau} \quad 20t^2 + 48t - 5 = 0$$

cu solutiile $t_1 = \dfrac{1}{10}$ si $t_2 = -\frac{5}{2}$. Astfel se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = -\dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 11x + 6 = 0, \\ 7x^2 + 9x + 14 = 0, \end{array}\right.$$

cu solutiile $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$ (ambele solutii sunt din DVA).

In unele cazuri este comod de separat un patrat complet.

Exemplul 11. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$b)\ x^2 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2.$$

Rezolvare. a) Se separa un patrat complet

$$x^4 - 2x^2 \cdot x + x^2 - x^2 - x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) + 1 = 0.$$

Se noteaza $t = x^2 - x$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

de unde $t = 1$, sau $x^2 - x - 1 = 0$, cu solutiile $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) DVA al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Se aduna in ambii membri ai ecuatiei expresia

$$2x \cdot \frac{x}{2x-1}$$

si se obtine

$$x^2 + 2x\frac{x}{2x-1} + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2 + 2x\frac{x}{2x-1}$$

sau

$$\left(x + \frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2 + 2\frac{2x^2}{2x-1}$$

de unde rezulta ecuatia

$$\left(\frac{2x^2}{2x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{2x-1} - 2 = 0.$$

Se noteaza $t = \dfrac{2x^2}{2x-1}$ si ecuatia devine

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Solutiile acestei ecuatii sunt $t = -1$ si $t = 2$, prin urmare se obtine totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2}{2x-1} = -1, \\ \dfrac{2x^2}{2x-1} = 2, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \end{array}\right.$$

cu solutiile $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ si $x_3 = 1$.

Inecuatii de gradul doi si inecuatii reductibile la cele se gradul doi

Prin inecuatie de gradul al doilea se intelege una din urmatoarele inecuatii

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{16}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \tag{17}$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \tag{18}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \tag{19}$$

unde $a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$.

Inecuatiile de gradul al doilea se rezolva utilizand urmatoarele afirmatii.

Afirmatia 2. Daca $a > 0$ si discriminantul trinomului $ax^2 + bx + x$ este pozitiv, atunci:

1. inecuatia (16) are solutiile $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;
2. inecuatia (17) are solutiile $x \in (\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$;
3. inecuatia (18) are solutiile $x \in (x_1, x_2)$;
4. inecuatia (19) are solutiile $x \in [x_1, x_2]$

unde x_1 si x_2 ($x_1 < x_2$) sunt radacinile trinomului $ax^2 + bx + c$.

Afirmatia 3. Daca $a > 0$ si discriminantul trinomului $ax^2 + bx + c$ este egal cu zero, atunci

1. inecuatia (16) are solutiile $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1\}$;
2. inecuatia (17) are solutiile $x \in \mathbf{R}$;
3. inecuatia (18) nu are solutii;
4. inecuatia (18) are o solutie unica: $x = x_1$,

unde x_1 este radacina dubla a trinomului $ax^2 + bx + c$.

Afirmatia 4. Daca $a > 0$ si dscriminantul trinomului $ax^2 + bx + c$ este negativ, atunci

1. inecuatiile (16) si (17) au solutiile $x \in \mathbf{R}$;
2. inecuatiile (18) si (19) nu au solutii.

Daca $a < 0$ inecuatile (16)-(19) se multiplica prin (-1) si schimband semnul inecuatiei in opusul lui se obtine o inecuatie cu $a > 0$ si se aplica afirmatiile 2-4.

Exemplul 12. Sa se rezolve inecuatiile

$$
\begin{array}{ll}
a)\ x^2 - x - 90 > 0; & d)\ x^2 - x + 2 > 0; \\
b)\ 4x^2 - 12x + 9 \le 0; & e)\ -6x^2 + 5x - 1 \le 0; \\
c)\ x^2 - 6x < 0; & f)\ 4x^2 - x + 5 \le 0.
\end{array}
$$

Rezolvare. a) Cum radacinile trinomului $x^2 - x - 90$ sunt $x_1 = -9$ si $x_2 = 10$, $a = 1 > 0$, solutiile inecuatiei $x^2 - x - 90 > 0$ sunt $x \in (-\infty; -9) \cup (10; +\infty)$.

b) Cum discriminatul trinomului $4x^2 - 12x + 9$ este egal cu zero, $a = 4 > 0$, unica solutie a inecuatiei $4x^2 - 12x + 9 \le 0$ este $x = \dfrac{3}{2}$.

c) Radacinile trinomului $x^2 - 6x$ sunt $x_1 = 0$ si $x_2 = 6$. Cum $a = 1 > 0$, solutiile inecuatiei $x^2 - 6x < 0$ sunt $x \in (0; 6)$.

d) Discriminantul trinomului $x^2 - x + 2$ este negativ, $a = 1 > 0$, prin urmare, orice numar real este solutie a inecuatiei $x^2 - x + 2 > 0$.

e) Se multiplica ambii membri ai inecuatiei cu -1 si se obtine inecuatia $6x^2 - 5x + 1 \geq 0$ cu solutiile $x \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

f) Inecuatia data nu are solutii.

Metodele de reducere ale ecuatiilor de grad superior la ecuatii de gradul al doilea raman valabile si in cazul inecuatiilor. In unele cazuri se utilizeaza in plus metoda intervalelor (a se vedea [1]-[4]).

Exemplul 13. Sa se rezolve inecuatiile

$$
\begin{aligned}
&a)\ 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 \leq 0;\\
&b)\ x(x-2)(x-4)(x-6) \geq 9;\\
&c)\ x^4 - 4x^3 + 8x + 3 < 0;\\
&d)\ \frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x^2-4x+3} < 0;\\
&e)\ 50x^4 - 105x^3 + 74x^2 - 21x + 2 \geq 0;\\
&f)\ \frac{2x}{x^2-4x+7} + \frac{3x}{2x^2-10x+14} > 1;\\
&g)\ (x+5)^4 + (x+3)^4 < 272.
\end{aligned}
$$

Rezolvare. a) Se rezolva ecuatia (a se vedea (10))

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

si se determina zerourile membrului din stanga inecuatiei:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 6\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6t^2 + 5t - 50 = 0, \\ t = x + \dfrac{1}{x}, \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{10}{3}, \\ t_2 = \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \\ t = x + \dfrac{1}{x}, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{3}, \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 10x + 3 = 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}, \\ x_4 = 2. \end{array}\right.$$

Prin urmare

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 6(x+3)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0$$

de unde, utilizand metoda intervalelor, se obtine multime solutiilor inecuatiei initiale $x \in \left[-3; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

b) Se tine seama de metoda de rezolvare a ecuatiilor de tip (13) si se obtine

$$x(x-2)(x-4)(x-6) \geq 9 \;\Leftrightarrow\; x(x-6)(x-2)(x-4) - 9 \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x^2-6x)(x^2-6x+8) - 9 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t(t+8) - 9 \geq 0, \\ t = x^2 - 6x, \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2 + 8t - 9 \geq 0, \\ t = x^2 - 6x, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \leq -9, \\ t \geq 1 \end{array}\right. \\ t = x^2 - 6x, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x \leq -9, \\ x^2 - 6x \geq 1, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 9 \leq 0, \\ x^2 - 6x - 1 \geq 0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}] \cup [3 + \sqrt{10}; +\infty), \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-\infty; 3 - \sqrt{10}] \cup \{3\} \cup [3 + \sqrt{10}; +\infty).$$

c) Se separa un patrat complet,

$$x^4 - 4x^3 + 8x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x + 4x^2 - 4x^2 + 8x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x^2 - 2x) - 4(x^2 - 2x) + 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2 - 4t + 3 < 0, \\ t = x^2 - 2x, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 < t < 3, \\ t = x^2 - 2x, \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 2x < 3, \\ x^2 - 2x > 1, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -1 < x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < 1 - \sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (-1; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; 3).$$

d) Se utilizeaza metoda intervalelor

$$\frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} - \frac{8}{x^2 - 4x + 3} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{(x-2)(x-1) - 2(x-3) - 8}{(x-3)(x-1)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - 5x}{(x-3)(x-1)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x(x-5)}{(x-3)(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (0; 1) \cup (3; 5).$$

e) Se rezolva ecuatia (a se vedea (11))

$$50x^4 - 105x^3 + 24x^2 - 21x + 2 = 0$$

si se determina zerourile membrului din stanga inecuatiei (se tine seama ca $x = 0$ este solutie a inecuatiei).

$$50x^4 - 105x^3 + 74x^2 - 21x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\left(25x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 21\left(5x + \frac{1}{x}\right) + 74 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$2\left[\left(5x + \frac{1}{x}\right)^2 - 10\right] - 21\left(5x + \frac{1}{x}\right) + 74 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2t^2 - 21x + 54 = 0, \\ t = 5x + \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 6, \\ t = \dfrac{9}{2}, \end{array}\right. \\ t = 5x + \dfrac{1}{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \dfrac{1}{x} = 6, \\ 5x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{9}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2 - 6x + 1 = 0, \\ 10x^2 - 9x + 2 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{5}, \\ x = 1, \\ x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Prin urmare

$$50x^4 - 105x^3 + 74x^2 - 21x + 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 50\left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) \geq 0.$$

Se utilizeaza metoda intervalelor si se obtine $x \in (-\infty; \frac{1}{5}] \cup [\frac{2}{5}; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$.

f) Cum $x = 0$ nu este solutie a inecuatiei $(0 > 1)$ inecuatia enuntata este echivalenta cu inecuatia

$$\frac{2}{x - 4 + \dfrac{7}{x}} + \frac{3}{2x - 10 + \dfrac{14}{x}} > 1.$$

Se noteaza $t = x + \dfrac{7}{x}$, atunci $2x + \dfrac{14}{x} = 2\left(x + \dfrac{7}{x}\right) = 2t$ si inecuatia devine

$$\frac{2}{t-4} + \frac{3}{2t-10} > 1.$$

Se rezolva cu ajutorul metodei intervalelor si se obtine

$$\frac{2(2t-10) + 3(t-4) - (2t-10)(t-4)}{(t-4)(2t-10)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2t^2 - 25t + 72}{(t-2)(2t-10)} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2\left(t - \dfrac{9}{2}\right)(t-8)}{(t-4)(2t-10)} < 0 \;\Leftrightarrow\; t \in (4; \frac{9}{2}) \cup (5; 8).$$

Prin urmare

$$\left[\begin{array}{l} 4 < x + \dfrac{7}{x} < \dfrac{9}{2}, \\ 5 < x + \dfrac{7}{x} < 8, \end{array}\right. \quad \text{de unde} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x} > 0, \\ \dfrac{2x^2 - 9x + 14}{x} < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x} > 0, \\ \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x} < 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{sau}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0, \\ x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 1 < x < 7, \end{array}\right. \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset, \\ x \in (1;7), \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1;7).$$

g) Se grupeaza $t = x + \dfrac{5+3}{2}$, $t = x + 4$ (a se vedea (12)) si inecuatia devine

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 < 272$$

sau

$$t^4 + 6t^2 - 135 < 0$$

de unde rezulta

$$(t^2 - 9)(t^2 + 15) < 0 \;\text{ sau }\; |t| < 3.$$

Prin urmare $|x+4| < 3$. Se utilizeaza proprietatile modulului si se obtine

$$|x+4| < 3 \;\Leftrightarrow\; -3 < x+4 < 3 \;\Leftrightarrow\; -7 < x < -1.$$

Exercitii pentru autoevaluare

I. Sa se rezolve ecuatiile

1. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24.$
2. $(1-x)(2-x)(x+3)(x+3) = 84.$
3. $(x+2)^4 + x^4 = 82.$
4. $(2x^2 + 5x - 4)^2 - 5x^2(2x^2 + 5x - 4) + 6x^4 = 0.$
5. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 6.$
6. $\dfrac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \dfrac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6.$
7. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{18}{x^2} = \dfrac{13}{5}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x}\right).$
8. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right).$
9. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0.$
10. $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0.$
11. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{4}{(x-1)(x+3)} = 0.$

12. $\dfrac{3}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{1}{x(x-1)^2} + \dfrac{3}{x(x-3)}$.

13. $(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12$.

14. $\dfrac{24}{x^2-2x} = \dfrac{12}{x^2-x} + x^2 - x$.

15. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

II. Sa se rezolve inecuatiile

1. $x + \dfrac{6}{x} < 7$.
2. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \leq 0$.
3. $\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$.
4. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$.
5. $\dfrac{3}{6x^2-x-12} + \dfrac{3}{3x+4} < \dfrac{25x-47}{10x-15}$.
6. $x^4 + x^3 - 12x^2 - 26x - 24 < 0$.
7. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5} < 0$.
8. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) \geq 84$.
9. $(x-1)^4 + (x+1)^4 \geq 82$.
10. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 \geq 2$.

Bibliografie

1. P.Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.
2. P.Cojuhari, A.Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Chisinau, Editura ASRM, 1995.
3. F.Iavemciuk, P.Rudenko. Alghebra i elementarnii funktii. Kiev, Naukova Dumka, 1987 (ucr.).
4. Gh.Andrei si altii. Exercitii si probleme de algebra pentru concursuri si olimpiade scolare. Partea I, Constanta, 1990.