

## Ecuatii si inecuatii liniare cu parametru

**Definitie.** Ecuatia de forma

$$ax + b = 0, \quad (1)$$

unde  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $x$  - necunoscuta, se numeste ecuatie liniara (ecuatie de gradul intai).

Exemple de ecuatii liniare:

$$\begin{aligned} a) & 2x + 6 = 0, & \text{cu } a = 2, b = 6; \\ b) & x - 2 = 0 & \text{cu } a = 1, b = -2; \\ c) & 0 \cdot x + 0 = 0, & \text{cu } a = b = 0; \\ d) & 0 \cdot x + \frac{1}{3} = 0, & \text{cu } a = 0, b = \frac{1}{3}; \\ e) & -\frac{1}{2}x = 0, & \text{cu } a = -\frac{1}{2}; b = 0. \end{aligned}$$

Cum ecuatie (1) este echivalenta cu ecuatie

$$ax = -b$$

rezulta urmatoarea afirmatie.

**Afirmatia 1.** Daca

1.  $a \neq 0$ , ecuatie (1) are o solutie unica,  $x = -\frac{b}{a}$ ;
2.  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , ecuatie (1) nu are solutii;
3.  $a = 0$ ,  $b = 0$ , orice numar real este solutie a ecuatiei (1).

Asadar ecuatiile liniare din exemplul de mai sus se rezolva in modul urmatoare

- a)  $x = -\frac{6}{2}$ , adica  $x = -3$ ;    b)  $x = 2$ ;    c) orice numar real este solutie a ecuatiei date;  
d) ecuatie nu are solutii;    e)  $x = 0$ .

**Nota 1.** Ecuatie

$$ax + b = cx + d,$$

unde  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , se reduce la ecuatie liniara (1):

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow (a - c)x + (b - d) = 0,$$

sau

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow (a - c)x = d - b.$$

**Nota 2.** Ecuatie

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

unde  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , se reduce la totalitatea de ecuatii liniare

$$\left[ \begin{array}{l} ax + b = 0, \\ cx + d = 0. \end{array} \right.$$

**Exemplul 1.** Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{aligned} a) \frac{3x}{2} - 3 &= \frac{x}{3} + 4, & c) -x + 2 &= 2 - x, \\ b) 2x + 1 &= 2x + 3, & d) (2x + 4)(3x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

**Rezolvare.** a)  $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 4 + 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6}x = 7 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 7 : \frac{7}{6} \Leftrightarrow x = 6.$

b)  $2x + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x - 2x = 3 - 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 2$  de unde rezulta ca ecuatia initiala nu are solutii.

c)  $-x + 2 = 2 - x \Leftrightarrow -x + x = 2 - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$ , de unde rezulta ca orice numar real este solutie a ecuatiei din enunt.

$$d) (2x + 4)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0, \\ 3x - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

In continuare vom considera ecuatiile liniare cu **parametru**. Prin parametru (a se vedea tema Ecuatii cu parametru) vom intelege un numar fixat, dar necunoscut. De regula, parametrul se noteaza cu primele litere ale alfabetului latin.

**Exemplul 2.** Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{aligned} a) ax &= 1; & e) \frac{(x-a)(2x+a)}{(x+1)(x-2)} &= 0; \\ b) ax^2 - 1 &= x + a; & f) \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= c; \\ c) ax + b &= cx + d; & g) \frac{2}{5x-a} &= \frac{3}{ax-1}. \\ d) \frac{x-2x}{x-4} &= 0; \end{aligned}$$

**Rezolvare.** a) Se aplica afirmatia 1 si se obtine:

daca  $a \neq 0$ , ecuatia are o solutie unica,  $x = \frac{1}{a}$ ;

daca  $a = 0$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = 1$  si, prin urmare, nu are solutii.

Raspuns: daca  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $x = \frac{1}{a}$ ; daca  $a = 0$ , solutii nu sunt.

b) Se efectueaza transformari elementare si se obtine:

$$a^2x - 1 = x + a \Leftrightarrow a^2x - x = a + 1 \Leftrightarrow x(a^2 - 1) = a + 1.$$

Se aplica afirmatia 1 si se obtine:

1. daca  $a^2 - 1 \neq 0$ , adica  $a \neq \pm 1$ ,  $x = \frac{a+1}{a^2-1}$  sau  $x = \frac{1}{a-1}$ ;

2. daca  $a = 1$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = 2$  si, prin urmare, nu are solutii;
3. daca  $a = -1$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = 0$  si, prin urmare, orice numar real este solutie a acestei ecuatii.

c) Ecuatia se scrie

$$(a - c)x = d - b,$$

de unde rezulta

1. daca  $a - c \neq 0$ , adica  $a \neq c$ , ecuatia are solutie unica

$$x = \frac{d - b}{a - c};$$

2. daca  $a = c$  si  $d - b \neq 0$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = d - b (\neq 0)$  si prin urmare nu are solutii;
3. daca  $a = c$  si  $d = b$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = 0$  si in asa caz orice numar real este solutie a ecuatiei din enunt.

d) Domeniul valorilor admisibile (concis *DVA*) al ecuatiei este  $x \neq 4$ . In *DVA* ecuatia se rezolva astfel:

$$\frac{x - 2a}{x - 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2a = 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Asadar, daca  $2a \neq 4$ , adica  $a \neq 2$  ecuatia are o singura solutie:  $x = 2a$ , iar daca  $a = 2$ , ecuatia nu are solutii.

e) *DVA* al ecuatiei este  $\mathbf{R} \setminus \{-1; 2\}$ . Cum  $(x - a)(2x + a) = 0$  implica  $x_1 = a$  si  $x_2 = -\frac{a}{2}$  si cum  $x \neq -1$  si  $x \neq 2$  se obtine:

1. daca  $a \neq -1$ ,  $a \neq 2$ ,  $-\frac{a}{2} \neq -1$ ,  $-\frac{a}{2} \neq 2$ , adica  $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 2; -4\}$ , ecuatia are doua solutii:  $x_1 = a$  si  $x_2 = -\frac{a}{2}$  (se observa ca daca  $a = 0$ , solutiile coincid, in rest fiind distincte);
2. daca  $a = -1$ , ecuatia are o singura solutie  $x = \frac{1}{2}$ ;
3. daca  $a = 2$ , ecuatia nu are solutii;
4. daca  $a = -4$ , ecuatia are o singura solutie  $x = -4$ .

f) Daca  $a = 0$  sau  $b = 0$  ecuatia nu are sens. Fie  $a \cdot b \neq 0$ . Atunci ecuatia este echivalenta cu ecuatia (se aduce la numitor comun)

$$x(b + a) = abc$$

de unde rezulta:

1. daca  $b + a \neq 0$ , adica  $a \neq -b$ , ecuatia are o solutie unica,  $x = \frac{abc}{a + b}$ ;

2. daca  $a = -b$  si  $c \neq 0$ , ecuatia nu are solutii;

3. daca  $a = -b$  si  $c = 0$ , orice numar real este solutie a ecuatiei date.

g) Solutiile ecuatiei urmeaza sa verifice restrictiile  $\begin{cases} 5x - a \neq 0, \\ ax - 1 \neq 0, \end{cases}$  adica  $x \neq \frac{a}{5}$  si, daca  $a \neq 0$ ,  $x \neq \frac{1}{a}$ . Daca  $a = 0$ , ecuatia devine

$$\frac{2}{5x} = \frac{3}{-1}, \text{ sau } -2 = 15x,$$

de unde  $x = -\frac{2}{15}$  si cum  $-\frac{2}{15} \neq \frac{0}{5}$ , rezulta ca daca  $a = 0$  ecuatia are solutia  $x = -\frac{2}{15}$ .

Fie  $a \neq 0$ . Atunci in *DVA* ecuatia se scrie

$$2(ax - 1) = 3(5x - a),$$

de unde

$$(2a - 15)x = 2 - 3a$$

si

1. daca  $2a - 15 \neq 0$ , adica  $a \neq \frac{15}{2}$ , se obtine  $x = \frac{2 - 3a}{2a - 15}$ ;
2. daca  $2a - 15 = 0$ , adica  $a = \frac{15}{2}$ , ecuatia devine  $0 \cdot x = -\frac{41}{2}$  si prin urmare nu are solutii.

Asadar, pentru  $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{0; \frac{15}{2}\right\}$  urmeaza de verificat restrictiile  $x \neq \frac{a}{5}$  si  $x \neq \frac{1}{a}$ :

$$x \neq \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{2 - 3a}{2a - 15} \neq \frac{a}{5} \text{ sau } (2a - 15)a \neq 5(2 - 3a)$$

de unde  $2a^2 \neq 10$  sau  $a \neq \pm\sqrt{5}$ . Astfel, pentru  $a = \pm\sqrt{5}$  ecuatia din enunt nu are solutii. Pentru a doua restrictie se obtine

$$x \neq \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2 - 3a}{2a - 15} \neq \frac{1}{a} \text{ sau } a(2 - 3a) \neq (2a - 15),$$

de unde  $3a^2 = 15$ , adica  $a^2 \neq 5$ , caz deja cercetat.

Asadar, daca  $a \in \left\{\frac{15}{2}; \pm\sqrt{5}\right\}$  ecuatia nu are solutii, iar daca  $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{15}{2}; \pm\sqrt{5}\right\}$ , ecuatia are o solutie unica

$$x = \frac{2 - 3a}{2a - 15}$$

(se tine seama ca rezultatul obtinut pentru  $a = 0$  se contine in formula pentru  $x$  de mai sus).

**Exemplul 3.** Sa se rezolve ecuatiile

- a)  $|x - a| = 2$ ;
- b)  $|x| + |x - a| = 0$ ;
- c)  $|x - a| + |x - 2a| = a$ ;
- d)  $|x - 1| + |x - 2| = a$ .

**Rezolvare.** a) Se utilizeaza proprietatile modulului si se obtine:

$$|x - a| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = 2, \\ x - a = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2, \\ x = a - 2. \end{cases}$$

Asadar, pentru orice  $a$  real ecuatia are doua solutii distincte:  $x_1 = a + 2$  si  $x_2 = a - 2$ .

b) Cum membrul din stanga ecuatiei este nenegativ (ca suma a doi termeni nenegativi), iar membrul din dreapta este egal cu zero, rezulta sistemul

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - a = 0, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 0, \\ x = a. \end{cases}$$

Prin urmare, daca  $a = 0$ , sistemul (deci si ecuatia din enunt) are solutie unica:  $x = 0$ ; iar daca  $a \neq 0$  sistemul (si ecuatia enuntata) nu are solutii.

c) Cum  $|f(x)| = |-f(x)|$  ecuatia se scrie

$$|x - a| + |2a - x| = a.$$

Se observa ca daca  $a < 0$ , ecuatia nu are solutii, iar daca  $a=0$  se obtine  $|x| = 0$  cu  $x = 0$ .

Fie  $a > 0$ . Atunci  $a = |a| = |(2a - x) + (x - a)|$  si ecuatia devine

$$|x - a| + |2a - x| = |(2a - x) + (x - a)|$$

echivalenta (a se vedea proprietatile modulului) cu inecuatie

$$(2a - x)(x - a) \geq 0$$

Se tine seama ca  $0 < a < 2a$  si se obtin solutiile  $x \in [a; 2a]$ .

Asadar

pentru  $a < 0$ , ecuatia nu are solutii;

pentru  $a = 0$ , ecuatia are o singura solutie,  $x = 0$ ;

pentru  $a > 0$ , ecuatia are o infinitate de solutii si anume

$$a \leq x \leq 2a.$$

d) Evident, ecuatia are solutii numai pentru  $a > 0$ . Consideram trei cazuri.

1. fie  $x < 1$ . Atunci  $|x - 1| = -(x - 1)$ ,  $|x - 2| = -(x - 2)$  si ecuatia devine

$$-x + 1 - x + 2 = a \text{ sau } -2x = a - 3$$

de unde  $x = \frac{3 - a}{2}$ . Cum  $x < 1$ , rezulta inecuatie

$$\frac{3 - a}{2} < 1$$

de unde  $a > 1$ . Asadar pentru  $a > 1$ ,  $x = \frac{3 - a}{2}$ ;

2. fie  $x \in [1;2]$ . Atunci  $|x - 1| = x - 1$ ,  $|x - 2| = -(x - 2)$  si ecuatia devine

$$x - 1 - x + 2 = a, \quad 0 \cdot x = a - 1.$$

Se tine seama de afirmatia 1 si se obtine:

daca  $a = 1$ , orice numar din segmentul  $[1;2]$  este solutie a ecuatiei din enunt,

daca  $a \neq 1$ , solutii nu sunt;

3. fie  $x > 2$ . Atunci  $|x - 1| = x - 1$ ,  $|x - 2| = x - 2$  si ecuatia devine

$$x - 1 + x - 2 = a$$

de unde  $x = \frac{a+3}{2}$ . Cum  $x > 2$  rezulta  $\frac{a+3}{2} > 2$ , adica  $a > 1$ .

Asadar:

pentru  $a > 1$  ecuatia are doua solutii distincte

$$x_1 = \frac{3-a}{2} \quad \text{si} \quad x_2 = \frac{a+3}{2}$$

pentru  $a = 1$  orice numar din  $[1;2]$  este solutie a ecuatiei

pentru  $a < 1$  ecuatia nu are solutii.

## Inecuatii liniare

Inecuatiiile de forma

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0, \quad (2)$$

unde  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $x$  - variabila se numesc inecuatii liniare (de gradul intai).

Cum toate inecuatiiile (2) se rezolva similar, vom aduce numai rezolvarea primei din ele:  $ax + b > 0$ . Se disting urmatoarele cazuri:

1.  $a > 0$ , atunci

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei  $ax + b > 0$  ( $a > 0$ ) este multimea  $(-\frac{b}{a}; +\infty)$ ;

2.  $a < 0$ , atunci

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei  $ax + b > 0$  ( $a < 0$ ) este multimea  $(-\infty; -\frac{b}{a})$ ;

3.  $a = 0$ , atunci inecuatia devine  $0 \cdot x + b > 0$  si pentru  $b > 0$  orice numar real este solutie a acestei inecuatii, iar pentru  $b \leq 0$  inecuatia nu are solutii.

In continuare vom analiza cateva exemple.

**Exemplul 1.** Sa se rezolve inecuatiile

$$\begin{aligned} a) \quad & 3x + 6 > 0; & c) \quad & 2(x + 1) + x < 3x + 1; \\ b) \quad & -2x + 3 \geq 0; & d) \quad & 3x + 2 \geq 3(x - 1) + 1. \end{aligned}$$

**Rezolvare.** a)  $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow 3x > -6 \Leftrightarrow x > -2$  si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei enuntate este  $(-2; +\infty)$ .

b)  $-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ , adica multimea solutiilor inecuatiei initiale este  $(-\infty; \frac{3}{2}]$ .

c) Se efectueaza operatiile si se reduce la o inecuatie liniara:

$$2(x + 1) + x < 3x + 1 \Leftrightarrow 2x + 2 + x < 3x + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 < 0.$$

Cum  $1 < 0$  este o inegalitate falsa, inecuatia nu are solutii.

d) Se rezolva similar exemplului c) si se obtine:

$$3x + 2 \geq 3(x - 1) + 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \geq 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 4 \geq 0,$$

de unde rezulta ca orice numar real este solutie a inecuatiei enuntate.

**Exemplul 2.** Sa se rezolve inecuatiile

$$\begin{aligned} a) \quad & ax \leq 1; \\ b) \quad & |x - 2| > -(a - 1)^2; \\ c) \quad & 3(4a - x) < 2ax + 3; \\ d) \quad & abx + b > ax + 3; \\ e) \quad & \frac{3x + 4}{a^2 - 1} - \frac{2x + 1}{a - 1} \leq \frac{x}{a + 1}; \\ f) \quad & ax + b > cx + d; \\ g) \quad & x + \frac{b(2 - x)}{2a} > \frac{a(x + 2)}{2b}. \end{aligned}$$

**Rezolvare.** a) Se considera trei cazuri (in dependenta de semnul lui  $a$ ) si se obtine:

1. daca  $a > 0$ ,  $x \leq \frac{1}{a}$ ;

2. daca  $a < 0$ ,  $x \geq \frac{1}{a}$ ;

3. daca  $a = 0$ , inecuatia devine  $0 \cdot x \leq 1$  si prin urmare orice numar real este solutie a inecuatiei.

Asadar daca  $a > 0$ ,  $x \in (-\infty; \frac{1}{a}]$ , daca  $a < 0$ ,  $x \in [\frac{1}{a}; +\infty)$  si daca  $a = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b) Cum  $|x - 2| \geq 0$  pentru orice  $x$  real si  $-(a - 1)^2 \leq 0$  pentru orice valoare a parametrului  $a$  se obtine: daca  $a = 1$ , atunci orice  $x$  real, diferit de 2 este solutie a inecuatiei, iar daca  $a \neq 1$ , atunci orice numar real este solutie a inecuatiei. Astfel daca  $a = 1$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ , daca  $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

c) Se efectueaza operatiile si se obtine

$$3(4a - x) < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3x < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3 < 2ax + 3x \Leftrightarrow x(2a + 3) > 3(4a - 1).$$

In continuare se disting urmatoarele cazuri

1. daca  $2a + 3 > 0$ , adica  $a > -\frac{3}{2}$

$$x(2a + 3) > 3(4a - 1) \Leftrightarrow x > \frac{3(4a - 1)}{2a + 3};$$

2. daca  $2a + 3 < 0$ , adica  $a < -\frac{3}{2}$

$$x(2a + 3) > 3(4a - 1) \Leftrightarrow x < \frac{3(4a - 1)}{2a + 3};$$

3. daca  $2a + 3 = 0$ , adica  $a = -\frac{3}{2}$  inecuatia devine

$$0 \cdot x > -21$$

si cum  $0 > -21$  este o inegalitate justa, rezulta ca orice numar real este solutie a inecuatiei date.

Prin urmare

daca  $a \in (-\frac{3}{2}; +\infty)$ ,  $x \in (\frac{3(4a-1)}{2a+3}; +\infty)$ ;

daca  $a \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ ,  $x \in (-\infty; \frac{3(4a-1)}{2a+3})$ ;

daca  $a = -\frac{3}{2}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

d)  $abx + b > ax + 3 \Leftrightarrow abx - ax > 3 - b \Leftrightarrow a(b - 1) \cdot x > 3 - b$ .

In continuare distingem urmatoarele cazuri

1. daca  $a(b - 1) > 0$ , adica  $a > 0$  si  $b > 1$  sau  $a < 0$  si  $b < 1$

$$x > \frac{3 - b}{a(b - 1)}$$

2. daca  $a(b - 1) < 0$ , adica  $a > 0$  si  $b < 1$  sau  $a < 0$  si  $b > 1$

$$x < \frac{3 - b}{a(b - 1)}$$

3. daca  $a = 0$ ,  $b \neq 1$  inecuatia devine

$$0 \cdot x > 3 - b$$

si pentru  $b > 3$  are solutie orice numar real, iar pentru  $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3]$  nu are solutii

4. daca  $a \neq 0$ ,  $b = 1$ , inecuatia devine

$$0 \cdot x > 2$$

si, evident, nu are solutii.

Asadar:

daca  $a > 0$  si  $b > 1$  sau  $a < 0$  si  $b < 1$ ,  $x \in (\frac{3-b}{a(b-1)}; +\infty)$ ;

daca  $a > 0$  si  $b < 1$  sau  $a < 0$  si  $b > 1$ ,  $x \in (-\infty; \frac{3-b}{a(b-1)})$ ;

daca  $a = 0$  si  $b \in (3; +\infty)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;

daca  $a = 0$  si  $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$  sau  $a \neq 0$  si  $b = 1$  inecuatia nu are solutii.

e) Se observa ca  $a \neq \pm 1$ , in caz contrar inecuatia nu are sens. Se aduce la numitor comun si se obtine

$$\frac{3x+4}{a^2-1} - \frac{2x+1}{a-1} \leq \frac{x}{a+1} \Leftrightarrow \frac{3x+4 - (2x+1)(a+1) - x(a-1)}{(a-1)(a+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(2-3a) + 3-a}{(a-1)(a+1)} \leq 0.$$

In continuare distingem urmatoarele cazuri:

1. fie  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ , atunci  $(a-1)(a+1) > 0$  si, cum o fractie este negativa cand numaratorul si numitorul sunt de semne contrare, urmeaza a fi rezolvata inecuatia

$$x(2-3a) + 3 - a \leq 0, \text{ sau } x(2-3a) \leq a - 3,$$

de unde

$$\begin{aligned} \text{pentru } a > 1, \quad x &\geq \frac{a-3}{2-3a}, \\ \text{pentru } a < -1, \quad x &\leq \frac{a-3}{2-3a} \end{aligned}$$

2. fie  $a \in (-1; 1)$ , atunci  $(a-1)(a+1) < 0$  si urmeaza a fi rezolvata inecuatia

$$x(2-3a) + 3 - a \geq 0 \text{ sau } x(2-3a) \geq a - 3.$$

Ultima inecuatie se rezolva astfel

daca  $a = \frac{2}{3}$ , orice numar real este solutie a inecuatiei;

daca  $a \in (\frac{2}{3}, 1)$ ,  $x \leq \frac{a-3}{2-3a}$ ;

daca  $a \in (-1; \frac{2}{3})$ ,  $x \geq \frac{a-3}{2-3a}$ .

Prin urmare inecuatia initiala

pentru  $a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{2}{3}, 1)$  are solutiile  $x \in (-\infty; \frac{a-3}{2-3a}]$ ;

pentru  $a \in (-1; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$  are solutiile  $x \in [\frac{a-3}{2-3a}; +\infty)$ ;

pentru  $a = \frac{2}{3}$ , orice numar real este solutie a inecuatiei.

f) Inecuatia enuntata este echivalenta cu inecuatia

$$(a-c)x > d-b$$

de unde rezulta:

1. daca  $a > c$ , atunci  $a - c > 0$  si, prin urmare,  $x > \frac{d-b}{a-c}$ ;
2. daca  $a < c$ ,  $x < \frac{d-b}{a-c}$ ;
3. daca  $a = c$  si  $d \geq b$ , inecuatia nu are solutii;
4. daca  $a = c$  si  $d < b$ , orice  $x$  real este solutie a inecuatiei.

g) Se observa ca  $a \neq 0$  si  $b \neq 0$ . Se aduce la numitor comun si se obtine:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{b(2-x)}{2a} > \frac{a(x+2)}{2b} &\Leftrightarrow \frac{2abx + b^2(2-x) - a^2(x+2)}{2ab} > 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2(b^2 - a^2) - x(b-a)^2}{2ab} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2 - a^2) - x(b-a)^2 > 0, \\ ab > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x(b-a)^2 < 2(b^2 - a^2), \\ ab > 0, \\ x(b-a)^2 > 2(b^2 - a^2), \\ ab < 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2(b+a)}{b-a}, \\ ab > 0, \\ a \neq b, \\ x \in \emptyset, \\ a = b, \\ x > \frac{2(b+a)}{b-a} \\ ab < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Asadar, daca  $a$  si  $b$  sunt de acelasi semn ( $ab > 0$ ) si  $a \neq b$  multimea solutiilor inecuatiei este  $(-\infty; \frac{2(b+a)}{b-a})$ ; daca  $a$  si  $b$  sunt de semne opuse ( $ab < 0$ ), multimea solutiilor este  $(\frac{2(b+a)}{b-a}; +\infty)$ , iar daca  $a = b$  inecuatia nu are solutii.

**Exemplul 3.** Sa se rezolve inecuatii

$$\begin{array}{ll}
 a) |x+a| + |x-2a| < 4a; & c) |x+2| > 2; \\
 b) |x+a| < |a|x; & d) |x-a| \leq a.
 \end{array}$$

**Rezolvare.** a) Cum membrul din stanga inecuatiei este nenegativ, inecuatia pentru  $a \leq 0$  solutii nu are. Se considera  $a > 0$  si se considera urmatoarele cazuri

1. fie  $x \in (-\infty; -a]$ , atunci  $|x+a| = -x-a$  si  $|x-2a| = 2a-x$  si inecuatia devine

$$-x - a + 2a - x < 4a, \quad \text{sau} \quad x > -\frac{3}{2}a.$$

Cum  $a > 0$  intersectia multimilor  $(-\infty; -a]$  si  $(-\frac{3a}{2}; +\infty)$ , si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei, este  $(-\frac{3a}{2}; -a]$ ;

2. fie  $x \in (-a; 2a]$ . Atunci  $|x + a| = x + a$ ,  $|x - 2a| = 2a - x$  si inecuatiile devine

$$x + a + 2a - x < 4a \quad \text{sau} \quad 3a < 4a$$

si, cum  $a > 0$ , orice numar din intervalul  $(-a; 2a]$  este solutie

3. fie  $x \in (2a; +\infty)$ , atunci  $|x + a| = x + a$  si  $|x - 2a| = x - 2a$  si ecuatiile devine

$$x + a + x - 2a < 4a \quad \text{sau} \quad x < \frac{5}{2}a.$$

Se tine seama ca  $x \geq 2a$  si se obtine  $x \in (2a; \frac{5}{2}a)$ .

Asadar pentru  $a \leq 0$ , inecuatiile nu are solutii, iar pentru  $a > 0$  multimea solutiilor inecuatiilor date este  $(-\frac{3}{2}a; -a] \cup (-a; 2a] \cup (2a; \frac{5}{2}a)$  sau  $(-\frac{3}{2}a; \frac{5}{2}a)$ .

b) Se observa ca inecuatiile poate avea numai solutii pozitive. Pentru  $x > 0$  inecuatiile se scrie  $|x + a| < |a| \cdot |x|$  si se rezolva utilizand proprietatile modului

$$\begin{aligned} |x + a| < |a| \cdot |x| &\Leftrightarrow |x + a| < |ax| \Leftrightarrow (x + a + ax)(x + a - ax) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(a + 1)x + a][(1 - a)x + a] < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)x + a > 0, \\ (1 - a)x + a < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)x > -a, \\ (1 - a)x < -a, \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)x + a < 0, \\ (1 - a)x + a > 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (a + 1)x < -a, \\ (1 - a)x > -a. \end{cases} \end{aligned}$$

Daca  $a > 1$ , atunci  $a - 1 > 0$  si  $a + 1 > 0$  si primul sistem al totalitatii devine

$$\begin{cases} -\frac{a}{a + 1} < x, \\ -\frac{a}{1 - a} < x, \end{cases}$$

de unde (se tine seama ca  $x > 0$ ) rezulta

$$x > \frac{a}{a - 1},$$

iar al doilea sistem devine

$$\begin{cases} x < -\frac{a}{a + 1}, \\ x < -\frac{a}{1 - a}, \end{cases}$$

si cum  $a > 1$  implica  $-\frac{a}{a + 1} < 0$ , iar  $x > 0$ , sistemul nu are solutii.

Daca  $a = 1$  primul sistem nu are solutii, iar din al doilea rezulta  $x < -\frac{1}{2}$  si cum  $x > 0$  si in acest caz inecuatiile nu are solutii.

Daca  $-1 < a < 1$ , rezulta  $a + 1 > 0$  si  $1 - a > 0$  si primul sistem devine

$$\begin{cases} x > -\frac{a}{a + 1}, \\ x < -\frac{a}{1 - a}, \end{cases} \quad \text{sau} \quad -\frac{a}{a + 1} < x < \frac{a}{a - 1}$$

de unde tinand seama ca

$$-\frac{a}{a+1} < \frac{a}{a-1} \Rightarrow -a^2 > a^2$$

se obtine ca primul sistem este incompatibil. Din al doilea sistem se obtine

$$\frac{a}{a-1} < x < \frac{-a}{a+1}$$

de unde tinand seama ca  $x > 0$ , rezulta sistemul

$$\begin{cases} \frac{a}{a+1} \geq 0, \\ \frac{a}{a-1} < \frac{-a}{a+1}, \end{cases}$$

ce se verifica pentru  $a < 0$ . Asadar pentru  $a \in [0; 1)$  inecuatia nu are solutii, iar pentru  $a \in (-1; 0)$  solutiile inecuatiei formeaza multimea  $(\frac{a}{a-1}; -\frac{a}{a+1})$ .

Daca  $a = -1$  primul sistem nu are solutii, iar din al doilea se obtine  $x > \frac{1}{2}$ .

Daca  $a < -1$ , atunci  $a + 1 < 0$  si  $1 - a > 0$  si din primul sistem rezulta

$$\begin{cases} x < -\frac{a}{a+1}, \\ x < -\frac{a}{1-a}. \end{cases}$$

Cum  $x > 0$  si  $a < -1$  avem  $-\frac{a}{a+1} < 0$  si prin urmare in acest caz inecuatia nu are solutii. Al doilea sistem al totalitatii devine

$$\begin{cases} x > -\frac{a}{a+1}, \\ x > -\frac{a}{1-a}, \end{cases}$$

si cum  $x > 0$ , ramane  $x > \frac{a}{a-1}$ .

Asadar

daca  $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ,  $x \in (\frac{a}{a-1}; +\infty)$ ;

daca  $a \in [0; 1]$ , inecuatia nu are solutii;

daca  $a = -1$ ,  $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$ .

c) Se utilizeaza proprietatile modulului si se obtine

$$|x+a| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a > 2, \\ x+a < -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2-a, \\ x < -a-2. \end{cases}$$

d) Daca  $a < 0$  inecuatia nu are solutii (membrul) din stanga este nenegativ). Daca  $a = 0$  inecuatia are o solutie unica:  $x = 0$ . Daca  $a > 0$ ,

$$|x-a| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x-a \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2a.$$