Cercul

Cercul este determinat, daca se stiu centrul si raza lui. Ecuatia carteziana a cercului de centru $C(a,b)$ si raza R este

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Punctul $M_0(x_0,y_0)$ apartine cercului (1), daca si numai daca coordonatele lui verifica ecuatia (1).

Multimea punctelor planului coordonatele carora verifica inecuatia $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$ $\left((x-a)^2+(y-b)^2>R^2\right)$ formeaza **interiorul (exteriorul) cercului** (1).

Probleme rezolvate

1. Sa se scrie ecuatiile cercurilor de centru C si raza R:
a) $C(2,-3), R=\sqrt{3}$;
b) $C(3,0), R=2$;
c) $C(0,0), R=1$.

Solutie
a) $(x-2)^2+(y+3)^2=3$.

b) $(x-3)^2+y^2=4$.

c) $x^2+y^2=1$.

2. Sa se determine coordonatele centrului si razele cercurilor definite prin ecuatiile
a) $(x+3)^2+(y-2)^2=16$;
b) $(x+2)^2+y^2=5$;
c) $x^2+6x+y^2-4y+4=0$.

Solutie
a) $C(-3,2), R=4$.

b) $C(-2,0), R=\sqrt{5}$.

c) Aducem ecuatia **c)** la forma canonica (1), evidentiind patrate perfecte: $x^2+6x+y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot 3x+9-9+y^2-2\cdot 2y+4=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=9$. De aici, $C(-3,2), R=3$.

3. Sa se determine conditia in care ecuatia $x^2+y^2+ax+by+c=0$ este ecuatia unui cerc.

Solutie
$x^2+y^2+ax+by+c=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot x+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2+2\cdot\frac{b}{2}\cdot y+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$. De aici, obtinem ca a^2+b^2-4c trebuie sa fie pozitiv.
Raspuns: $a^2+b^2-4c>0$.

4. Sa se determine, care din urmatoarele ecuatii sint ecuatii ale unor cercuri:
a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 22 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 5 = 0$.

Solutie

a) $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 36 - 88 < 0$.

b) $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 4 - 20 = 0$.

c) $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 9 + 20 > 0$.

Deci, **c)** este ecuatia unui cerc, iar **a)** si **b)** nu sunt ecuatii ale unor cercuri.

5. Sa se scrie ecuatia tangentei la cercul (1) in punctul $M_0\,(x_0, y_0)$ de pe cerc.

Solutie

Cum vectorul $\overrightarrow{CM_0} = \{x_0 - a, y_0 - b\}$ este un vector normal al tangentei, ecuatia ei va fi

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Avem: (2) $\Leftrightarrow$ $(x_0 - a)(x - a + a - x_0) + (y_0 - b)(y - b + b - y_0) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) - (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)(y - b) - (y_0 - b)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2. \tag{3}$$

Deci, ecuatia tangentei poate fi scrisa sub forma (2) sau (3).

6. Din punctul $M_0\,(x_0, y_0)$ situat in exteriorul cercului (1) sunt duse tangentele la acest cerc. Sa se scrie ecuatia coardei ce uneste punctele de tangenta.

Solutie

Fie $M_1\,(x_1, y_1)$ si $M_2\,(x_2, y_2)$ sunt punctele de tangenta. Conform formulei (3), ecuatiile tangentelor M_1M_0 si M_2M_0 sunt, respectiv,

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2,$$

$$(x_2 - a)(x - a) + (y_2 - b)(y - b) = R^2.$$

Cum $M_0\,(x_0, y_0)$ apartine acestor tangente, au loc egalitatile

$$\begin{cases} (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) = R^2, \\ (x_0 - a)(x_2 - a) + (y_0 - b)(y_2 - b) = R^2. \end{cases} \tag{4}$$

Egalitatile (4) arata ca punctele M_1 si M_2 apartin dreptei

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2 \tag{5}$$

si cum prin doua puncte distincte trece o dreapta si numai una singura, rezulta ca ecuatia (5) este ecuatia ce uneste punctele de tangenta.

7. Sa se scrie ecuatia coardei cercului $(x-1)^2+(y+2)^2=49$, daca punctul $A(2,0)$ este mijlocul acestei coarde.

Solutie

Deoarece diametrul ce trece prin mijlocul unei coarde este perpendicular pe aceasta coarda, rezulta ca vectorul $\overrightarrow{CA}=\{1,2\}$ este vector normal al coardei din enunt. Deci, ecuatia ceruta este $1\cdot(x-2)+2\cdot(y-0)=0$ sau $x+2y-2=0$.

8. Sa se scrie ecuatia cercului simetric cu cercul $x^2+y^2-4x-4y+19=0$ fata de dreapta $x-y-2=0$.

Solutie

Scriem ecuatia canonica a cercului dat:

$$(x-2)^2+(y-4)^2=1.$$

Cercul dat are centrul $C(2,4)$ si raza $R=1$. Gasim coordonatele centrului C_1 a cercului simetric cercului dat: $C_1(6,0)$. (vezi **problema 5** de la **Dreapta in plan**).

Deci ecuatia cercului simetric este $(x-6)^2+y^2=1$.

9. Sa se scrie ecuatia cercului care trece prin punctele $A(4,-3)$ si $B(0,1)$ si are centrul pe dreapta $x+y+1=0$.

Solutie

Punctele date nu apartin dreptei date, deoarece coordonatele lor nu verifica ecuatia dreptei. Centrul cercului este egal departat de punctele A si B, deci este situat pe mediatoarea segmentului AB. Gasim coordonatele mijlocului D al segmentului AB: $D\left(\dfrac{4+0}{2},\dfrac{-3+1}{2}\right)$. Deci, $D(2,-1)$. Vectorul $\overrightarrow{AB}=\{-4,4\}$ este un vector normal al mediatoarei, prin urmare, ecuatia mediatoarei segmentului AB este

$$-4(x-2)+4(y+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -x+y+3=0.$$

Cum centrul C al cercului se afla si pe dreapta data, coordonatele lui sunt solutii ale sistemului

$$\begin{cases} -x+y+3=0, \\ x+y+1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Deci, $C(1,-2)$.

Raza cercului $R=CA=\sqrt{(4-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{10}$. Astfel ecuatia cercului este $(x-1)^2+(y+2)^2=10$.

10. Sa se scrie ecuatia cercului circumscris triunghiului laturile caruia au ecuatiile $x-3y=0$, $7x+4y=0$, $9x-2y-50=0$.

Solutie

Gasim coordonatele virfurilor triunghiului, rezolvand trei sisteme de ecuatii:

$$1)\begin{cases} x-3y=0, \\ 7x+4y=0, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-3y=0, \\ 9x-2y-50=0, \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} 7x+4y=0, \\ 9x-2y-50=0. \end{cases}$$

Obtinem varfurile $A\,(0,0)$, $B\,(6,2)$, $C\,(4,-7)$.

Cum cercul trece prin virfurile triunghiului, obtinem sistemul

$$\begin{cases} a^2+b^2=R^2, \\ (6-a)^2+(2-b)^2=R^2, \\ (4-a)^2+(-7-b)^2=R^2. \end{cases}$$

Sistemul are solutiile $a=4,1;\;\; b=-2,3;\;\; R^2=22,1$. Deci, ecuatia cercului este

$$(x-4,1)^2+(y+2,3)^2=22,1.$$

Probleme propuse

1. Sa se scrie ecuatia cercului:
a) cu centrul $C\,(4,-5)$ si raza egala cu 8;
b) cu diametrul AB, unde $A\,(6,9)$ si $B\,(-2,1)$;
c) cu centrul $C\,(-1,6)$ si care contine punctul $A\,(2,2)$;
d) cu centrul $C\,(1,2)$ si care este tangent la dreapta $3x-4y=0$;
e) cu centrul situat pe drepta $x-3y+2=0$ si punctele $A\,(1,3)$, $B\,(3,-1)$ apartinandu-i;
f) care trece prin punctele $A\,(-1,3)$, $B\,(0,2)$ si $C\,(1,-1)$.

2. Sa se scrie ecuatiile tangentelor duse la cercul $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ din originea sistemului de coordonate.

3. Sa se calculeze distanta de la punctul indicat la cercul dat:
a) $A\,(1,-8)$, $\;x^2+y^2-2x-4y-14=0$;
b) $B\,(-4,3)$, $\;x^2+y^2=9$.

4. Sa se scrie ecuatia coardei comune cercurilor $x^2+y^2+2x+6y-40=0$ si $x^2+y^2-10x-10y=0$.

5. Sa se scrie ecuatia diametrului cercului $x^2+y^2-6x+4y-17=0$ paralel cu dreapta $5x-2y+13=0$.

6. Sa se scrie ecuatia cercului inscris in triunghiul laturile caruia au ecuatiile $2x+3y-5=0$, $2x-3y+1=0$ si $3x+2y+5=0$.

7. Sa se gaseasca coordonatele centrului C si raza R a cercurilor:
a) $x^2+y^2-x=0$;
b) $x^2+y^2-5y=0$;
c) $x^2+y^2-2x+4y=0$;
d) $2x^2+2y^2-5x+6y-3=0$.

8. Sa se scrie ecuatia cercului tangent la dreptele $3x-4y-10=0$ si $3x-4y-20=0$ a carui centru se afla pe dreapta $3x+4y-8=0$.

9. Sa se scrie ecuatiile cercurilor tangente la dreptele $x+y+13=0$ si $x-7y+5=0$, daca punctul $(-3,1)$ apartine acestor cercuri.

10. Din punctul $A\,(6,1)$ sunt duse tangentele la cercul $x^2+y^2+2y-19=0$. Sa se calculeze aria triunghiului cu virfurile in punctul A si punctele de tangenta. Sa se scrie ecuatia coardei ce uneste punctele de tangenta.