

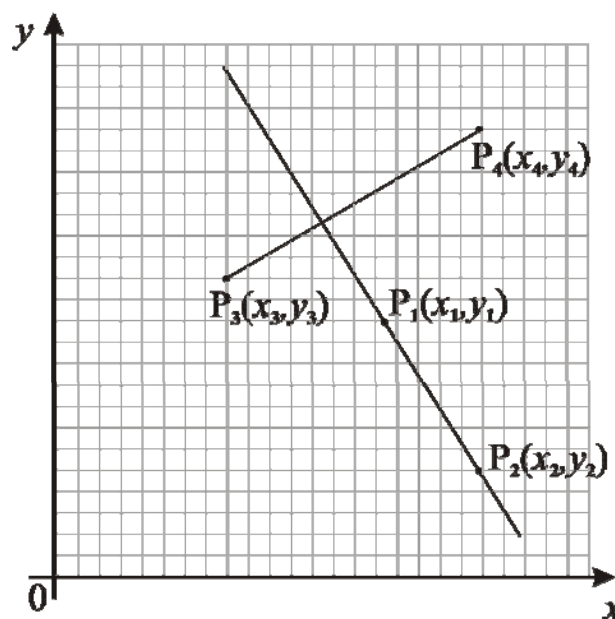
Intersecții

Preliminarii

În majoritatea problemelor de geometrie computațională apare în calitate de subproblemă determinarea coordonatelor punctului de intersecție a două drepte, a două segmente, sau a unui segment și unei drepte. Metoda folosită pentru rezolvare este aceeași, cu diferențe nesemnificative pentru fiecare caz.

Atât pentru definirea dreptei, cât și pentru definirea segmentului se vor folosi două puncte: arbitrar (de pe dreaptă) sau extreme (pentru segment), des. 1.

Prin urmare, atât descrierea dreptei, cât și descrierea segmentului poate fi realizată de aceeași structură de date, care va conține coordonatele a două puncte și, suplimentar, coeficienții A , B , C a ecuației generale a dreptei. Acești coeficienți vor fi necesari pentru calculul coordonatelor punctului de intersecție. Una din metodele de definire a acestei structuri este următoarea:



```
type line=record
    x1,y1,x2,y2 : real;
    A, B, C : real;
end;
```

1. Intersecția dreptelor

Ecuația generală a dreptei

Fie dată dreapta P , care trece prin punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$.

Ecuația dreptei ce trece prin două puncte date este:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1).$$

Din această ecuație pot fi calculați coeficienții ecuației generale a dreptei: $Ax + By + C = 0$
Prin transformări elementare din (1) se obține:

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0 \quad (2)$$

Din (2) rezultă formulele de calcul a coeficienților ecuației generale:

$$\begin{aligned} A &= y_2 - y_1 \\ B &= x_1 - x_2 \\ C &= x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Determinarea punctului de intersecție a două drepte

Fie date două drepte P și L, care trec respectiv prin punctele $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$ și $L_1 (x_3, y_3)$, $L_2 (x_4, y_4)$.

Determinarea punctului Q de intersecție al acestor drepte se reduce la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

unde $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ este ecuația generală a dreptei P, și $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ este ecuația generală a dreptei L. Coeficienții acestor ecuații pot fi calculați conform formulelor (3).

Până la rezolvarea nemijlocită a sistemului se verifică dacă dreptele P și L nu sunt paralele sau coincid. Pentru aceasta se verifică condițiile:

- $A_1 B_2 = A_2 B_1$ & $A_1 C_2 \neq A_2 C_1$ - dreptele sunt paralele
- $A_1 B_2 = A_2 B_1$ & $A_1 C_2 = A_2 C_1$ - dreptele coincid

Dacă nici una din condițiile precedente nu se îndeplinește, există un punct unic de intersecție al dreptelor P și L, care poate fi calculat după una din formulele:

a) Dacă $A_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} y_{sol} &= \frac{A_1 C_2 - C_1 A_2}{B_2 A_1 - B_1 A_2} \\ x_{sol} &= -\frac{B_1 y_{sol} - C_1}{A_1} \end{aligned}$$

b) Dacă $A_1 = 0$

$$\begin{aligned} y_{sol} &= -\frac{C_1}{B_1} \\ x_{sol} &= -\frac{B_2 y_{sol} + C_2}{A_2} \end{aligned}$$

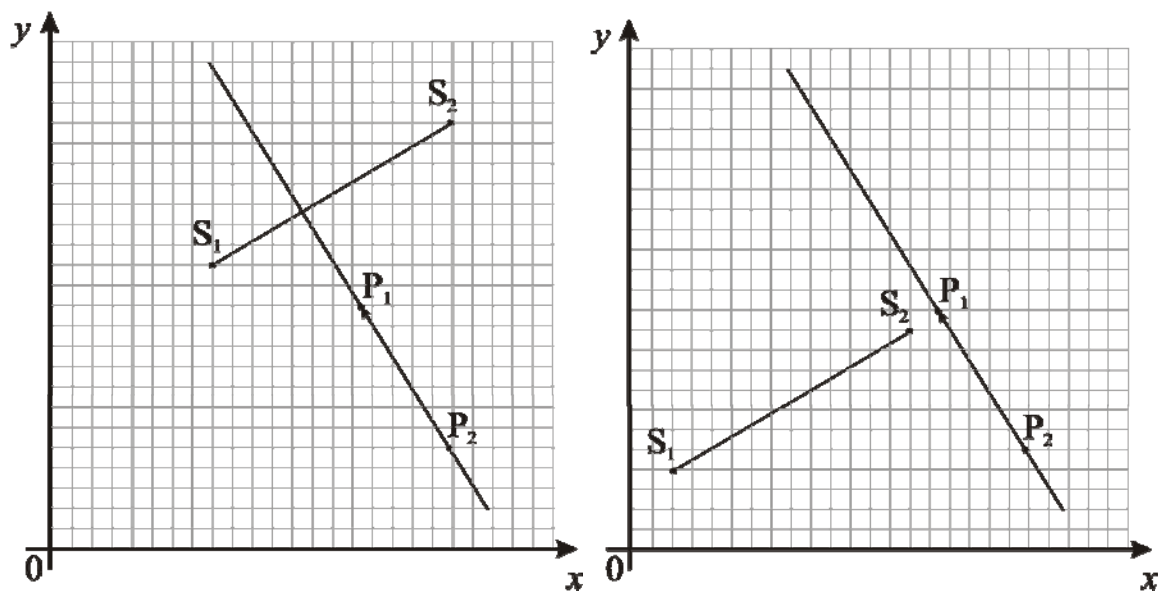
Setul obținut de formule permite determinarea coordonatelor punctului de intersecție Q (x_{sol} , y_{sol}) al dreptelor P și L.

Intersecția dreptei cu un segment

Formulele deduse în paragraful precedent permit să se calculeze coordonatele punctului de intersecție a două drepte. Cazul intersecției a două segmente sau a unei drepte și a unui segment pot fi reduse la cel al intersecției dreptelor, dar cu verificarea unor condiții suplimentare

2. Poziția punctului față de un vector

Fie dată dreapta P care trece prin punctele P_1 și P_2 și segmentul S, cu extremitățile S_1 și S_2 . (des 2)



Se observă, că în cazul intersecției drepte și a segmentului, extremitățile segmentului se află de părți diferite față de segmentul orientat (vectorul) P_2P_1 . Dacă obiectele nu se intersectează, ambele extremități ale segmentului se află de aceeași parte a segmentului orientat (vectorului) P_2P_1 .

Fie dat vectorul P_2P_1 cu coordonatele $(x_2, y_2)(x_1, y_1)$, și punctul S cu coordonatele (x_3, y_3) .

Pentru a poziționa punctul S față de vectorul P_2P_1 , poate fi folosit următorul determinant¹:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantul are o valoare pozitivă dacă punctul S este plasat în semiplanul drept față de vectorul P_2P_1 , este nul dacă S este plasat pe dreapta determinată de vector și negativ, dacă S este plasat în semiplanul stâng.

O realizare posibilă a funcției care realizează calculul determinantului este următoarea:

```
function sarrus(p1,p2,p3:point2): real;
begin
    sarrus:=p1.x*p2.y+p2.x*p3.y+p1.y*p3.x-p3.x*p2.y-p3.y*p1.x-p1.y*p2.x;
end;
```

2.2.2 Intersecția

Fragmentul $Sarrus(p_2, p_1, s_1) * Sarrus(p_2, p_1, s_2)$ va avea o valoare *pozitivă* dacă dreapta și segmentul nu se intersectează, *nulă* – dacă cel puțin una dintre extremități aparține drepte, *negativă* – dacă dreapta intersectează segmentul.

¹ Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия. Введение, Москва, Мир, 1989, pag. 60

² **type** point=record x,y : real; end;

Prin urmare, dacă pentru dreapta care trece punctele P_1 și P_2 și segmentul cu extremitățile S_1 și S_2 expresia $Sarrus(p_2, p_1, s_1) * Sarrus(p_2, p_1, s_2)$ are valoare negativă, atunci coordonatele punctului de intersecție se calculează conform formulelor deduse în 2.1.2.

Dacă valoarea expresiei este nulă, se verifică nemojlocit, care dintre extremitățile segmentului se află pe dreaptă. În cazul în care ambele extremități ale segmentului aparțin drepte, tot segmentul îi aparține.

3. Intersecția segmentelor

Fie date două segmente S și P cu extremitățile în punctele $S_1 S_2$ și $P_1 P_2$. Pentru simplitate se va considera că segmentele nu aparțin aceleiași drepte și nu sunt paralele (cazurile date pot fi verificate cu ajutorul formulelor din 2.1.2).

Segmentele se vor intersecta numai dacă

$$Sarrus(p_2, p_1, s_1) * Sarrus(p_2, p_1, s_2) \leq 0 \text{ și}$$

$$Sarrus(s_2, s_1, p_1) * Sarrus(s_2, s_1, p_2) \leq 0^3$$

4. Probleme rezolvate

4.1 Piatra de la Broșteni⁴

... și unde nu pornește stânca la vale, săltând tot mai sus de un stat de om; și trece prin gardul și prin tinda Irinucăi, pe la capre, și se duce drept în Bistrița, de clocotea apa!

Ion Creangă, Amintiri din copilărie

Piatra pornită de Ion Creangă se rostogolea în linie dreaptă, dărâmând totul în calea ei. Casa Irinucăi are mulți pereți, unii nimerind în calea pietrei. Fiind date coordonatele a două puncte prin care trece piatra și extremitățile segmentelor, care descriu pereții casei, să se determine, câți pereți vor fi dărâmați de piatra în cădere. Peretele, atins într-un punct extrem, rămâne întreg.

Cerință

Scrieți un program, care determină numărul de pereți dărâmați de piatră.

Input

Fișierul de intrare conține N ($N < 1000$) linii a câte patru numere întregi. Prima linie conține descrierea a două puncte prin care trece piatra, în forma $x_1 y_1 x_2 y_2$ ($|x_i, y_i| < 500$). Următoarele $N-1$ linii conțin descrierea coordonatelor extremităților pereților, în aceeași consecutivitate, cu aceleași restricții de valori.

Output

Unica linie a fișierului de ieșire va conține un număr întreg – numărul de pereți dărâmați de piatră.

Exemplu

Piatra.in	Piatra.out
2 1 9 14 2 4 1 8 1 12 3 9 4 14 6 11 7 14 9 10 9 14 7 16 6 10 8 8	4

³ Verificarea corectitudinii expresiei se propune cititorului

⁴ Rezolvați problema în condiția prezentării în fișierul de ieșire a coordonatelor punctelor de intersecție cu trei cifre după virgulă, în linii separate.

3 6 6 6 4 2 4 5 11 10 12 14 8 6 10 8 12 8 14 4	
--	--

Rezolvare

```

program Brosteni;
type point=record
    x,y: real;
end;
segment=record
    e1,e2: point;
end;
var g: array[1..1000] of segment;
    l: segment;
    f,t: text;
    n,i,k: integer;

function sarrus(p1,p2,p3:point): real;
begin
    sarrus:=p1.x*p2.y+p2.x*p3.y+p1.y*p3.x-p3.x*p2.y-p3.y*p1.x-p1.y*p2.x;
end;

begin
    assign(f, 'piatra.in'); reset(f);
    n:=0;
    readln(f, l.e1.x,l.e1.y,l.e2.x,l.e2.y);
    while not eof(f) do
        begin
            inc(n);
            readln(f, g[n].e1.x, g[n].e1.y,g[n].e2.x,g[n].e2.y);
        end;
    close(f);
    k:=0;
    for i:=1 to n do
        if sarrus(l.e1,l.e2,g[i].e1)*sarrus(l.e1,l.e2,g[i].e2) < 0 then inc(k);
    assign(t, 'piatra.out'); rewrite(t);
    writeln(t, k); close(t);
end.

```

4.2 Asalt

Comandantul de oști Bytezar încearcă să ia cu asalt fortăreața Compudava. Pentru a învinge împotrivirea apărătorilor fortăreței, el folosește un tun de asalt, ghiulelele căruia sunt aruncate pe o traiectorie rectilinie. Zidurile fortăreței formează un poligon simplu, descris prin lista vârfurilor sale, în ordinea parcurgerii lor după acele de ceasornic. Poziția tunului e aleasă astfel, încât traiectoria ghiulelei intersectează nimai puncte interioare ale zidurilor. Pentru a repara zidurile, apărătorii au nevoie de coordonatele tuturor spărturilor apărute după împușcătură. Poziția tunului și punctul de oprire a ghiulelei sunt cunoscute.

Cerință

Scrieți un program, care, după coordonatele tunului și a punctului de oprire a ghiulelei stabilește coordonatele spărturilor din zidurile cetății cu o exactitate de 2 cifre după virgulă.

Input

Fișierul de intrare conține N ($10 < N < 1000$) linii a câte două numere întregi ($0 < |x_i, y_i| < 1000$). Prima linie conține coordonatele tunului, următoarea – coordonatele punctului de oprire a ghiulelei. Următoarele N-2 linii conțin descrierea coordonatelor vârfurilor zidului, în ordinea parcurgerii lor după acele de ceasornic.

Output

Prima linie a fișierului de ieșire va conține un număr întreg K – numărul de spărturi. Următoarele K linii vor conține câte 2 numere reale cu 2 cifre după virgulă – coordonatele spărturilor

Bibliografie

1. E. Rohai, M. Rohai, Formule și Tabele Matematice, București, Editura Tehnică, 1996
2. Wolfgang K. Giloi Interactive Computer Graphics. Data structures, Algorithms, Languages. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1978
3. Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия. Введение, Москва, Мир, 1989
4. М. Ласло. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. Москва, Бином, 1997