

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

1. DETERMINANȚI NUMERICI

Fie dată o matrice pătratică arbitrară de ordin n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Fiecărei din matricele de acest tip îi este asociată o valoare numerică, numită **determinant**. Determinantul poate fi definit în mod inductiv. Notăția folosită pentru determinantul matricei A este $\det(A)$.

- I.** Ordinul matricei A este 1. Matricea este formată dintr-un singur element a_{11} . Determinantul matricei A va fi chiar valoarea elementului a_{11} .

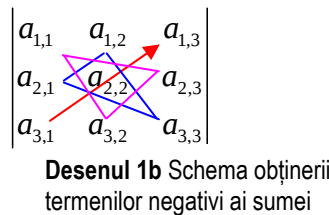
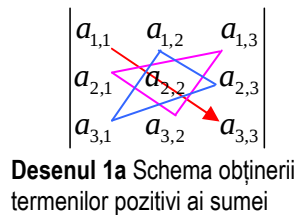
Exemplu: $A = (7)$; $\det(A) = 7$.

- II.** Pentru o matrice de ordinul 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ determinantul va fi egal cu valoarea expresiei $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (diferența produselor elementelor de pe diagonala principală și cea secundară).

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\det(A) = 9$.

- III.** Pentru o matrice de ordinul 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ determinantul poate fi calculat

folosind regula lui *Sarrus* (regula diagonalelor și a triunghiurilor). Termenii cu semnul (+) în suma ce corespunde valorii determinantului se obțin înmulțind elementele de pe diagonala principală și cele din vârfurile triunghiurilor, care au bazele paralele cu diagonala principală (desenul 1a). Termenii cu semnul (−) se obțin înmulțind numerele de pe diagonala secundară și cele din vârfurile triunghiurilor, care au bazele paralele cu diagonala secundară (desenul 1b).



Astfel, pentru o matrice de ordinul 3 determinantul poate fi calculat direct după formula:

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}.$$

Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \det(A) = 1 \times 0 \times 1 + 7 \times 0 \times 2 + 3 \times 2 \times (-1) - 7 \times 0 \times (-1) - 0 \times 3 \times 1 - 1 \times 2 \times 2 = 0 + 0 - 6 - 0 - 0 - 4 = -10.$

Pentru definiția determinantului unei matrice de ordin n se va folosi noțiunea de *minor*:

Se numește **minor de ordin $n-1$** al elementului a_{ij} al matricei A de rang n ($n > 1$) determinantul matricei de rang $n-1$, obținută din matricea A prin excluderea rândului i și a coloanei j . Vom nota minorul elementului a_{ij} prin $A_{i,j}$, unde i indică rândul, iar j – coloana la intersecția căreia se află elementul a_{ij} .

Vom cerceta matricea din exemplul precedent. Pentru a calcula minorul $A_{1,2}$ a elementului $a_{1,2}$ se exclude din matrice linia 1 și coloana 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; A_{1,2} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

IV.

Se numește determinant al matricei A de rang n valoarea expresiei $\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1,j} A_{1,j}$.

Conform definiției

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1,j} A_{1,j}$$

Fie dată matricea de ordinul 4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}, \det(A) = a_{1,1}A_{1,1} - a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3} - a_{1,4}A_{1,4}.$$

Fiecare dintre minorii $A_{1,j}$, $j=1, \dots, 4$ este determinantul unei matrice de ordinul 3 și poate fi calculat direct.

Algoritmul de calcul al determinanților numerici

Fie dată matricea A de ordinul n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Algoritmul de calcul al determinantului unei matrice de ordin n se bazează direct pe definiție.

Se va folosi dezvoltarea determinantului după prima linie a matricei.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1,j} A_{1,j}$$

În această formulă elementele necunoscute sunt minorii elementelor din prima linie. Fie un minor arbitrar $A_{1,j}$. El este determinantul unei matrice de ordinul $n-1$. Pentru a-l calcula urmează să rezolvăm o problemă echivalentă cu problema inițială, dar de dimensiune mai mică. Deoarece la un moment dat se ajunge la calculul unui determinant de ordin 1, 2, sau 3, care pot fi calculați direct, se respectă regula de consistență și poate fi aplicat un algoritm recursiv:

- a) Există un caz elementar: matricea, ce corespunde minorului curent are ordinul 1
- b) La nivelul k se fac k apeluri pentru calculul determinanților de ordin $k-1$. Prin urmare procesul converge spre un caz elementar.

Fie matricea A are ordinul R

Algoritm (R):***Cazul elementar***

Dacă ordinul matricei A este 1, atunci determinantul este egal cu valoarea unicului element al matricei.

În caz contrar

Cazul de reducere

- 1) Se dezvoltă determinantul matricei A după prima linie. Valoarea determinantului Δ se inițializează cu 0.
- 2) Pentru j de la 1 la R
 - a. Se formează matricea $M_{1,j}$ prin excluderea din matricea curentă A a liniei 1 și coloanei j . (Ordinul $M_{1,j}$ este $R-1$. Ea corespunde minorului $A_{1,j}$)
 - b. Se calculează determinantul $\det(M_{1,j})$ al matricei $M_{1,j}$ utilizând algoritmul curent.
 - c. Se actualizează valoarea determinantului
 $\Delta = \Delta + (-1)^{1+j} \det(M_{1,j})$

Implementare

Fie date declarațiile:

```
const nmax=10;
type mat=array[1..nmax,1..nmax] of real;
```

Una din posibilitățile de realizare în limbajul Pascal a funcției recursive de calcul al determinanților este următoarea:

```
function det(var x:mat; t:integer) : real;
var
    i, j, k, l : integer;
    s : real;
    minor : mat;
begin
    if t=1 then calcul:=x[1,1] {caz elementar}
    else
        begin
            s:=0;
            for k:=1 to t do
                begin
                    {Se exclude linia 1 si coloana k
                     pentru a forma matricea, care corespunde
                     minorului elementului x[1,k]}
                    for i:=1 to t-1 do
                        for j:=1 to k-1 do
                            minor[i,j]:=x[i+1,j];
                    for i:=1 to t-1 do
                        for j:=k to t-1 do
                            minor[i,j]:=x[i+1,j+1]; {apelul recursiv}
                    if odd(k)
                        then s:=s+x[1,k]*det(minor, t-1)
                        else s:=s-x[1,k]*det(minor, t-1);
                    end;
                end;
            calcul:=s;
        end;
    end;
```

Întrebări și exerciții

1. Explicați legătura dintre matrice și determinantul ei.
2. Elaborați o funcție pentru calculul determinanților de ordinul 3 utilizând regula lui Sarrus.
3. Descrieți algoritmul de calcul al determinanților de ordinul n prin dezvoltare după elementele unei linii arbitrare.
4. Elaborați un program pentru calculul determinanților de ordinul n ($n \leq 10$), în care veți folosi funcția **det**, descrisă în paragraful curent. Ordinul matricei și valorile elementelor sale se vor introduce de la tastatură
5. În programul realizat în exercițiul 4, transformați parametrul variabilă x al funcției **det** în parametru valoare. Observați, ce se va întâmpla în cazul calculului aceluiași determinant pentru diferite tipuri ale parametrului x . Explicați diferența observată.
6. Încercați să aplicați programul realizat pentru calculul determinanților matricelor cu dimensiuni n , $n > 20$, cu elemente de tip real. Ce se va întâmpla? Explicați.

2. METODA KRAMER DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Matricea pătratică A se numește *nesingulară*, dacă determinantul ei este diferit de 0.

Matrice inversă matricei A – matricea, care fiind înmulțită la A (fie la stânga, fie la dreapta) dă în rezultat matricea unitară E . Matricea inversă matricei A va fi notată A^{-1} .

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Teoremă Pentru orice matrice nesingulară există matricea inversă.
(fără demonstrație)

Pentru determinarea elementelor matricei inverse se utilizează formula:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{\Delta} & \frac{A_{2,1}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1,2}}{\Delta} & \frac{A_{2,2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1,n}}{\Delta} & \frac{A_{2,n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,n}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

unde A_{ij} este minorul elementului a_{ij} al matricei A , iar $\Delta = \det(A)$.

Formulele Kramer¹

Fie dat sistemul din n ecuații liniare cu n necunoscute:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Vom nota prin $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matricea coeficienților sistemului, prin $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - vectorul

termenilor liberi ai sistemului, iar prin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vectorul soluțiilor.

În formă vectorială sistemul (1) capătă forma

$$Ax = b. \quad (2)$$

În cazul când determinantul A este diferit de 0, există matricea inversă A^{-1} . Înmulțind ambele părți ale egalității (2) la A^{-1} , obținem:

¹ Deducerea formulelor Kramer este opțională

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

ceea ce este echivalent cu

$$x = A^{-1}b.$$

Această formulă permite calculul soluțiilor sistemului (1) în cazul în care matricea A a sistemului este nesingulară. În continuare vom detalia formula pentru a determina formulele de calcul pentru componentele vectorului soluție.

Conform formulei de calcul a matricei inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{\Delta} & \frac{A_{2,1}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1,2}}{\Delta} & \frac{A_{2,2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,2}}{\Delta} \\ & & \dots & \\ \frac{A_{1,n}}{\Delta} & \frac{A_{2,n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,n}}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \text{prin urmare, } x = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{\Delta} & \frac{A_{2,1}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1,2}}{\Delta} & \frac{A_{2,2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,2}}{\Delta} \\ & & \dots & \\ \frac{A_{1,n}}{\Delta} & \frac{A_{2,n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,n}}{\Delta} \end{pmatrix} b$$

sau, după componente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{\Delta} & \frac{A_{2,1}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,1}}{\Delta} \\ \frac{A_{1,2}}{\Delta} & \frac{A_{2,2}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,2}}{\Delta} \\ & & \dots & \\ \frac{A_{1,n}}{\Delta} & \frac{A_{2,n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n,n}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

de unde $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad i = 1, \dots, n$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (3).$$

Formulele (3) permit calculul direct al soluțiilor sistemului de ecuații liniare (1), deoarece conțin doar mărimi calculate prin utilizarea matricei coeficienților sistemului (1) și a vectorului termenilor liberi a acestui sistem. Ele sunt numite *formulele Kramer pentru calculul soluțiilor unui sistem de ecuații liniare*.

Algoritmizarea metodei

Fie dat un sistem din n ecuații liniare cu n necunoscute. Pentru realizarea metodei Kramer de rezolvare a acestui sistem vor fi necesare anumite structuri de date:

- Un tablou bidimensional ($n \times n$) cu elemente de tip real sau întreg (în dependență de valorile coeficienților sistemului) – tabelul A al coeficienților sistemului.
- Un tablou unidimensional cu elemente de tip real sau întreg (în dependență de valorile termenilor liberi ai sistemului) – vectorul b al termenilor liberi ai sistemului.
- Un tablou unidimensional cu elemente de tip real – vectorul soluțiilor x .

Determinarea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare utilizând metoda Kramer se bazează pe calculul determinanților. Prin urmare, este necesar să se realizeze în program o funcție, care determină valoarea determinantului unei matrice. Pentru aceasta poate fi utilizat algoritmul propus în paragraful precedent.

Fiind realizată funcția de calcul al determinantului unei matrice, se va trece la algoritmul de rezolvare a sistemului, folosind metoda Kramer:

Pas 1.

Se calculează $\Delta = \det(A)$ (A - matricea coeficienților sistemului).

Dacă $\Delta \neq 0$, se trece la **pas 2**, în caz contrar se afișează mesajul de imposibilitate de utilizare a metodei, apoi SFÂRȘIT.

Pas 2.

Se consideră $i := 1$;

Pas 3.

a) În matricea coeficienților sistemului coloana cu numărul de ordine i este înlocuită cu vectorul termenilor liberi b .

b) Se calculează determinantul Δ_i al matricei modificate, apoi componenta i a soluției:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Pas 4.

Dacă $i < n \Rightarrow i := i + 1$ după care se revine la **pas 3**, în caz contrar este afișat vectorul x . SFÂRȘIT.

Întrebări și exerciții

1. Pentru rezolvarea căror probleme poate fi folosită metoda Kramer? Care sunt condițiile când metoda nu poate fi aplicată?
2. Explicați sensul elementelor Δ și Δ_i din formulele Kramer.
3. Cum poate fi evitată crearea și utilizarea tabloului bidimensional suplimentar în care o coloană a coeficienților sistemului este înlocuită prin vectorul termenilor liberi a sistemului?
4. Elaborați un program pentru calculul soluției unui sistem din n ecuații liniare cu n necunoscute, utilizând metoda Kramer. ($n \leq 10$)
5. Rezolvați următoarele sisteme de ecuații, utilizând programul realizat în exercițiul 4. Numărul de ecuații n , valorile coeficienților ecuațiilor sistemului și a termenilor liberi se introduc de la tastatură.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 38 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -8 \\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 199 \\ 9x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 52 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 198 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 33 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 + x_6 = -48 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 8x_4 - 6x_5 - 5x_6 = -106 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 10x_4 + 9x_5 - 3x_6 = 70 \\ 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7x_4 + 7x_5 + 9x_6 = 64 \\ -8x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 1x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 25 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 6x_5 + 3x_6 = -82 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 2x_6 + 2x_7 = -104 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 - x_6 - 8x_7 = 94 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 10x_6 + 9x_7 = 159 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_4 + 3x_5 + 6x_6 - 8x_7 = -80 \\ -x_1 - x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 2x_5 - 6x_6 + 2x_7 = 204 \\ 7x_1 + x_2 + 9x_3 - 9x_4 + 6x_5 - 6x_6 = 209 \\ -5x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 5x_4 + 10x_5 - x_6 - 9x_7 = -29 \end{array} \right.$$

3. METODA GAUSS DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Matrice extinsă a unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute se va numi matricea din n linii și $n+1$ coloane, formată din coeficienții sistemului și vectorul termenilor liberi, amplasați după cum urmează:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{pmatrix}$$

Două sisteme de ecuații liniare se numesc **echivalente**, dacă sunt echivalente mulțimile soluțiilor acestor sisteme.

Transformare elementară a unei matrice se numește:

- înmulțirea unei linii a matricei cu un număr k , $k \neq 0$.
- adunarea unei linii a matricei la altă linie
- schimbul cu locul a două linii a matricei
- o combinație liniară a transformărilor a)-c).

Una din metodele eficiente de determinare a soluției unui sistem de ecuații liniare este metoda excluderii consecutive a necunoscutelor. Această metodă este cunoscută și sub numele *metodei Gauss*. Ea poate fi utilizată în cazul când sistemul cercetat are o soluție unică. (Matricea coeficienților sistemului este nesingulară)

Fie dat sistemul (1) din n ecuații liniare cu n necunoscute:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,i}x_i + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,i}x_i + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,i}x_i + \dots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,i}x_i + \dots + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,i}x_i + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1) \quad \left(\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \dots & & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} & b_i \\ & & \dots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,i} & \dots & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right) \quad (1a)$$

cu matricea extinsă (1a)

Metoda presupune:

- excluderea variabilei x_1 din toate ecuațiile sistemului, începând cu a doua;
- excluderea variabilei x_2 din toate ecuațiile sistemului, începând cu a treia;
-
- excluderea variabilei x_i din toate ecuațiile sistemului, începând cu ecuația $i+1$;
-
- excluderea variabilei x_{n-1} din ecuația cu numărul n .

În termeni matematici, trebuie să se construiască un sistem de ecuații, echivalent cu sistemul (1), de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^* x_1 + a_{1,2}^* x_2 + \dots + a_{1,i}^* x_i + \dots + a_{1,n}^* x_n = b_1^* \\ a_{2,2}^* x_2 + \dots + a_{2,i}^* x_i + \dots + a_{2,n}^* x_n = b_2^* \\ \dots \\ a_{i,i}^* x_i + \dots + a_{i,n}^* x_n = b_i^* \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}^* x_{n-1} + a_{n-1,n}^* x_n = b_{n-1}^* \\ a_{n,n}^* x_n = b_n^* \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}^* & a_{1,2}^* & \dots & a_{1,i}^* & \dots & a_{1,n}^* & b_1^* \\ 0 & a_{2,2}^* & \dots & a_{2,i}^* & \dots & a_{2,n}^* & b_2^* \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,i}^* & \dots & a_{i,n}^* & b_i^* \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-1}^* & a_{n-1,n}^* & b_{n-1}^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n}^* & b_n^* \end{array} \right) \quad (2a)$$

cu matricea extinsă (2a)

Soluția unui sistem de tipul (2) poate fi determinată după componente, începând cu x_n , care se determină direct din ultima ecuație a sistemului. În general, având calculate componentele $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$, din ecuația i a sistemului (2) se determină componenta x_i .

Astfel, procesul de calcul al soluției unui sistem de ecuații prin metoda Gauss se divide în două etape:

Etapa 1 (directă)

transformarea sistemului (1) în sistemul echivalent (2) prin transformări elementare a matricei (1a)

Etapa 2 (inversă)

calculul componentelor soluției sistemului (2).

Algoritmul

Descrierea matematică

ETAPA 1

Excluderea x_i din ecuațiile $i+1, \dots, n$. În matricea supusă transformării, elementele $a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{n,i}$ urmează să devină 0.

Se consideră că $a_{i,i} \neq 0$ (dacă $a_{i,i}=0$, ecuația i se schimbă cu locul cu o altă ecuație j , ($j > i$) în care $a_{j,i} \neq 0$)

Pentru ecuația j ($j = i+1, \dots, n$) se calculează coeficientul de multiplicare $k = \frac{-a_{j,i}}{a_{i,i}}$.

Coeficienții ecuației i se înmulțesc cu k apoi se adună la coeficienții ecuației j (transformarea se extinde și asupra termenilor liberi).

Se obțin consecutiv sistemele:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^{(0)} x_1 + a_{1,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1,i}^{(0)} x_i + \dots + a_{1,n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ a_{2,2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2,i}^{(1)} x_i + \dots + a_{2,n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ a_{3,2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{3,i}^{(1)} x_i + \dots + a_{3,n}^{(1)} x_n = b_3^{(1)} \\ \dots \\ a_{n,2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{n,i}^{(1)} x_i + \dots + a_{n,n}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^{(0)} x_1 + a_{1,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1,i}^{(0)} x_i + \dots + a_{1,n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ a_{2,2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2,i}^{(1)} x_i + \dots + a_{2,n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ a_{3,3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3,n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ \dots \\ a_{n,3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{n,n}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

...

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^{(0)}x_1 + a_{1,2}^{(0)}x_2 + \dots + a_{1,i}^{(0)}x_i + \dots + a_{1,n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,i}^{(1)}x_i + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n,n}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^{(0)}x_1 + a_{1,2}^{(0)}x_2 + \dots + a_{1,i}^{(0)}x_i + \dots + a_{1,n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,i}^{(1)}x_i + \dots + a_{2,n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{n,n}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

ETAPA 2

Din ultima ecuație a sistemului (2) se determină x_n : $x_n = \frac{b_n^*}{a_{n,n}^*}$

Înlocuind în ecuația $n-1$:

În caz general:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^* - a_{n-1,n}^* x_n}{a_{n-1,n-1}^*} \quad x_i = \frac{b_i^* - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^* x_j}{a_{ii}^*}$$

Conform formulei obținute componentele vectorului soluție x se calculează recurent, începând cu x_n

Pseudocodul

Pas 0 Numărul ecuației (i) $\leftarrow 0$

Pas 1 $i \leftarrow i+1$

a) Dacă $a_{ii} = 0$ linia i este schimbată cu locul cu o linie l ($l > i$) pentru care $a_{li} \neq 0$. Dacă o asemenea linie nu există, se afișează mesajul de existență a unei infinități de soluții, apoi SFÂRȘIT.

b) pentru fiecare din liniile j de la $i+1$ la n se repetă procedura (**P**): (**P**) linia i se înmulțește cu $k = \frac{-a_{j,i}}{a_{i,i}}$ și se adăugă la linia j (inclusiv și termenii liberi)

Pas 2 Dacă $i < n$ se revine la **pas 1**, în caz contrar se trece la **pas 3** {*trecerea la pasul 3 marchează sfârșitul etapei directe în începutul etapei inverse a metodei*}.

Pas 3

Pentru i de la n la 1 se calculează:

$$x_i = \frac{b_i^* - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^* x_j}{a_{ii}^*}$$

Până la realizarea metodei Gauss se vor cerceta condițiile de posibilitate a aplicării ei. Pentru aplicarea metodei este suficient ca determinantul matricei coeficienților sistemului (1) să fie diferit de 0. Verificarea poate fi realizată cu ajutorul unei funcții, care va calcula valoarea acestui determinant, sau nemijlocit în procesul realizării etapei directe a metodei: (pasul 1 a)).

Resurse de memorie:

Pentru realizarea practică a metodei Gauss vor fi necesare următoarele structuri de date:

1. Tablou bidimensional cu n linii și $n+1$ coloane pentru stocarea matricei extinse a sistemului inițial. elementele tabloului vor fi de tip real.
2. Tablou unidimensional din n elemente reale – pentru păstrarea soluției obținute.

Exemplu 1. Fie dat sistemul de n ($n < 20$) ecuații liniare cu coeficienți reali, ($a_{ii} \neq 0$) de forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Elaborați un program în care pentru determină soluțiilor acestui sistem se utilizează una din etapele metodei Gauss.

Coeficienții sistemului și termenii liberi se citesc din fișierul text IN.TXT cu următoarea structură:

$$\begin{array}{cccc} & n & & \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & & a_{2,n} & b_2 \\ & \dots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & b_n \end{array}$$

Rezolvare: Din structura sistemului se observă că transformarea matricei coeficienților nu este necesară. Prin urmare nu este necesară aplicarea etapei directe (etapa 1) a metodei. Este suficient să se implementeze etapa inversă (etapa 2).

Program:

```
program cn012;
const nmax=21;
type
  mat=array[1..nmax,1..nmax] of real;
  vect=array[1..nmax] of real;
var
  a:mat;
  s:vect;
  i,n:integer;

procedure citeste(var x:mat; var t:integer);
var
  i, j:integer;
  f:text;
begin {citeste}
  assign (f, 'in.txt');
  reset(f);
  readln(f, t);
  for i:=1 to t do
    begin
      for j:=1 to t+1 do read(f,x[i,j]);
      readln(f);
    end;
  close(f);
end; {citeste}

procedure invers (var q:vect);
```

```

var i,j: integer;
    s:real;
begin
    for i:=n downto 1 do
        begin
            s:=0;
            for j:=i+1 to n do
                s:=s+a[i,j]*q[j];
            q[i]:=(a[i,n+1]-s)/a[i,i];
        end;
    end;
begin
    citeste(a,n);
    direct(a,n);
    invers(s);
    for i:=1 to n do writeln('x[' ,i, ']=',s[i]:0:6);
    readln;
end.

```

Întrebări și exerciții

- 1) Descrieți etapele algoritmului de calcul a soluției unui sistem din n ecuații liniare cu n necunoscute, utilizând metoda Gauss.
- 2) Indicați, care sunt resursele de memorie necesare pentru calculul soluției unui sistem din n ecuații liniare cu n necunoscute prin metoda Gauss.
- 3) Elaborați un program pentru calculul soluției unui sistem din n ecuații liniare cu n ($n \leq 10$) necunoscute, prin metoda Gauss.
- 4) Rezolvați sistemele de ecuații din exercițiul 5, paragraful 3.2, utilizând programul realizat în exercițiul 3. Pentru fiecare sistem numărul de ecuații n , valorile coeficienților ecuațiilor sistemului și a termenilor liberi se citesc dintr-un fișier text cu următoarea structură: prima linie a fișierului conține un număr întreg n – numărul de ecuații. Fiecare din următoarele n linii conține câte $n+1$ numere reale, separate prin spațiu: matricea extinsă a sistemului de ecuații. Explicați motivul apariției diferenței între valorile soluțiile calculate prin metode Kramer și cele calculate prin metoda Gauss.
- 5) Realizați o modificare a programului cn012, care ar permite determinarea soluțiilor

$$\begin{array}{l}
 \text{sistemelor de forma} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right. \quad \text{indiferent de} \\
 \text{valorile coeficienților } a_{i,i}
 \end{array}$$

- 6) Etapa directă a metodei Gauss poate fi aplicată pentru calculul determinanților. Sunt folosite următoarele proprietăți ale matricelor numerice:

1: Dacă de o parte a diagonalei principale a matricei pentru care se calculează determinantul sînt numai zerouri, atunci valoarea determinantului este produsul elementelor de pe diagonala principală.

2: La schimbarea cu locul a două linii (coloane) ale matricei, semnul determinantului trece în opus.

3: La adăugarea la o linie a matricei a altei linii înmulțite cu un număr, valoarea determinantului nu se schimbă.

Elaborați o funcție iterativă de calcul a determinanților, care utilizează aceste proprietăți.

Comparați timpul de lucru al funcției iterative și a funcției recursive din paragraful 4.1 Explicați motivul apariției diferențelor în timpul de calcul.