

ELEMENTE DE MODELARE

1. NOȚIUNE DE MODEL CLASIFICAREA MODELELOR

Imitarea unor procese, obiecte sau fenomene este caracteristică societății umane pe tot parcursul istoriei sale. Primele desene, realizate de oamenii epocii de piatră pe pereții peșterilor erau în același timp și primele încercări de a imita obiectele și fenomenele reale prin imagini (desenul 1).



Desenul 1: imagine paleolitică a unui bizon

Globul-machetă al planetei noastre este și el o imitație a unui corp real. El ne transmite diferite informații despre forma și mișcarea Terrei, amplasarea continentelor și oceanelor, țărilor și orașelor (desenul 2). Dar elementele mache-tei nu sunt reale. Avem de a face doar cu un corp sferic, prin centrul căruia trece o axă, care permite rotirea, iar pe suprafață având imprimate diverse informații despre planetă. Globul-machetă posedă anumite proprietăți ale corpului cosmic real, dar se deosebește de el: diferă dimensiunile, proprietățile fizice, structura etc. Globul-machetă este o realizare simplificată a Terrei, care permite studierea doar a anumitor proprietăți ale ei – un *model*.



Desenul 2: globul-machetă al planetei

Modelul este un obiect material sau ideal, care înlocuiește în procesul de cercetare obiectul original, păstrând unele caracteristici esențiale, importante pentru procesul de cercetare.

Modelele sunt utilizate din cele mai vechi timpuri pentru cercetarea fenomenelor și proceselor complicate, construcția ansamblurilor arhitecturale complicate etc. Un model reușit este mai accesibil pentru cercetări decât obiectul real. Mai mult chiar: unele obiecte și fenomene nu pot fi cercetate în original. Sunt inadmisibile experiențele economice la nivel macroeconomic; imposibile experiențele cu elementele Sistemului Solar; experiențele temporale etc. Un alt aspect important al modelării îl constituie evidențierea factorilor, ce generează anumite proprietăți ale obiectului real, caracteristici esențiale ale lui.

Modelul permite instruirea în vederea utilizării corecte a obiectului real, verificând diferite moduri de a reacționa pe modelul acestui obiect. Experiențele cu obiectul real pot fi imposibile sau foarte periculoase (durata mare a procesului în timp, riscul de a deteriora obiectul). În cazurile cercetării obiectelor dinamice (caracteristicile cărora depind de timp) o importanță primordială capătă problema prognozierii stării obiectului sub acțiunea unor anumiți factori.

Un model bine construit permite obținerea unor cunoștințe noi despre obiectul original cercetat.

Procesul de construire al modelului se numește **modelare**.

Există câteva tipuri de modelare, ce pot fi unite în două grupe mari: modelare *materiale* și *ideală*.

La **modelarea materială** se atribuie metodele, la care cercetarea originalului se realizează prin reproducerea în model a caracteristicilor geometrice, fizice, dinamice, funcționale de bază. Exemple: machetele clădirilor, a diferitor aparate (avioane, automobile, vehicule

militare). Modelarea ideală diferă cardinal de cea materială: ea se bazează pe analogia ideală a modelului față de original.

Modelarea ideală poartă un caracter teoretic. Uneori se poate baza pe o concepție intuitivă despre obiectul cercetărilor. În acest sens experiența de viață a fiecărui om poate fi considerată drept modelul lui a lumii înconjurătoare. În cazul când modelarea nu este intuitivă, se folosesc anumite simboluri, modelarea fiind numită *simbolică*. În calitate de simboluri se folosesc diverse scheme, grafice, formule. În categoria modelelor simbolice un loc aparte îl ocupă *modelarea matematică*, la care cercetarea obiectului se realizează prin intermediul unui model formulat în termeni și noțiuni matematice, cu folosirea unor metode matematice. Un exemplu clasic al modelării matematice este descrierea și cercetarea legilor de bază ale mecanicii lui I. Newton cu instrumentele matematice.

Pentru cercetarea unui proces sau fenomen nu este suficient să fie construit modelul. Modelul descrie anumite legități, relații, caracteristici. De obicei însă, problema pusă cere ca în baza unor mărimi cunoscute să se determine alte mărimi și caracteristici, care s-ar acorda modelului matematic.

Întrebări și exerciții

1. Explicați noțiunea de model. Determinați perechi obiect (fenomen) real și modelul său. Enumerați caracteristicile obiectului real preluate de model
2. Definiți noțiunea de model material. Dați exemple de modele materiale. Motivați necesitatea utilizării modelării materiale în diferite domenii
3. Definiți noțiunea de model ideal. Exemplificați. Motivați necesitatea modelării ideale.

2. MODELUL MATEMATIC ȘI MODELAREA MATEMATICĂ

Dezvoltarea informaticii ca știință a fost generată de progresul în sfera tehnicii de calcul, tehnologiilor informaționale. Scopurile de bază ale acestei științe sunt elaborarea metodelor de soluționare a problemelor complicate de cercetare și de calcul cu ajutorul calculatorului. Inițial informatica se dezvoltă ca o ramură a matematicii aplicative. Primele probleme puse erau de asemenea pur matematice: calcule complicate, analiza unor mulțimi complexe de situații etc. La moment informatica este o știință independentă, cu metode proprii de cercetare (dar care sunt fundamentate matematic). Informatica cercetează și rezolvă probleme din domeniul matematicii, fizicii, chimiei, biologiei, economiei, ecologiei, filologiei, sociologiei. Dar, oricărui domeniu n-ar aparține problema, în procesul de soluționare a ei informatica se bazează pe matematică. Nu e întâmplător. Înainte de a soluționa problema cu ajutorul calculatorului este necesară descrierea fenomenelor și proceselor din problemă cu ajutorul noțiunilor matematice. Acestea pot fi funcții, ecuații, inecuații, sisteme de ecuații etc.

Descrierea unui proces sau fenomen prin intermediul noțiunilor matematice se numește **model matematic**.

Exemplul 1 Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $x=1/2$ și a unei circumferințe unitare cu centrul în originea coordonatelor.

Modelul matematic al acestei probleme este determinat de sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Algoritmul de rezolvare e următorul:

1. Se consideră $x=1/2$.

2. Se calculează $y_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$; $y_2 = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$;

3. Soluția este $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exemplul 2 Pe o masă netedă se află o bilă metalică, fixată de un arc. Arcul se comprimă, fără a se deteriora elasticitatea, apoi se eliberează. Ce cere să se determine, unde se va afla bila peste t secunde.

Dacă k – coeficientul de elasticitate a arcului, m – masa bilei, x – mărimea deformației arcului, atunci în baza *legii lui Huk* și a *legii 2 Newton*, modelul matematic al sistemului *bilă – arc* va avea forma:

$$ma = -kx, \text{ unde } a - \text{acelerația.}$$

Deformarea inițială se notează prin x_0 . Trebuie să se determine deformarea peste t secunde. Pentru aceasta modelul precedent se va transforma astfel încât să fie prezentată dependența deformației de timp. Pentru deformări mici și lipsa forței de frecare se va folosi ecuația deplasărilor armonice

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Soluția problemei inițiale se calculează prin introducerea datelor în formula obținută.

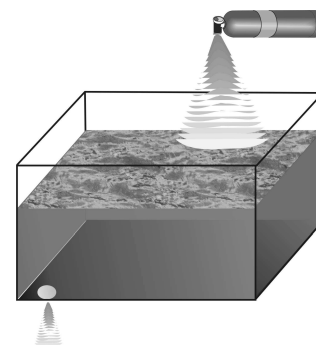
Întrebări și exerciții

1. Definiți noțiunea de model matematic. Este el oare un model material?
2. Descrieți modelul matematic care permite calculul soluțiilor ecuațiilor de forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$
3. Izotopul radioactiv plutonium-235 are perioada de înjumătățire de 26 minute. În această perioadă jumătate din cantitatea inițială a izotopului dispăre. Descrieți modelul matematic, care permite calculul numărului ciclurilor de înjumătățire necesare pentru dispariția a $k\%$ din cantitatea inițială a izotopului.

3. SOLUȚII ANALITICE ȘI SOLUȚII DE SIMULARE

Fie propusă următoarea problemă:

Într-un bazin cu volumul 100 m^3 se pompează apă cu ajutorul unei pompe cu capacitatea de $15 \text{ m}^3/\text{oră}$. Totodată, $5 \text{ m}^3/\text{oră}$ se scurg din bazin în dispozitivul de filtrare. Inițial în bazin se conțin 20 m^3 de apă. Se cere să se determine, peste câte ore bazinul va fi plin.



Desigur, există mai multe metode de rezolvare a acestei probleme. Una din cele mai simple este modelarea volumului de apă în bazin peste fiecare oră, cu ajutorul unui tabel.

<i>Timp (ore)</i>	<i>Pompa</i>	<i>Scurgerea</i>	<i>Bazin</i>
0	0	0	20
1	+15	-5	30
2	+15	-5	40
3	+15	-5	50
4	+15	-5	60
5	+15	-5	70
6	+15	-5	80
7	+15	-5	90
8	+15	-5	100

Soluția problemei a fost obținută printr-un număr relativ mare de calcule consecutive, care au reconstruit dinamic starea bazinului la începutul fiecărei ore următoare. Sigur, nu este cea mai eficientă metodă: se utilizează un număr mare rezultate intermediare, numărul de operații realizate este la fel nemotivat de mare.

O altă soluție se bazează direct pe modelul matematic al problemei. Timpul necesar pentru umplerea bazinului este determinat din formula:

$$20 + 10t = 100,$$

sau

$$t = \frac{100 - 20}{10} = 8.$$

Prima din metodele realizate utiliza un proces iterativ, care determina volumul de apă după fiecare interval elementar de timp (1 oră), și calcula rezultatele noi, folosind datele obținute la etapa precedentă. Cu alte cuvinte, a fost realizată *simularea* procesului de umplere a bazinului. Modelul realizat a fost un *model de simulare* iar soluțiile obținute la fiecare iterație – ***soluții de simulare***.

De obicei modelele de simulare se folosesc atunci când este necesară observarea dezvoltării dinamice ale sistemului cercetat.

Cea de a doua metodă, în care starea sistemului este descrisă prin o formulă, permite ca starea sistemului (bazinului) să fie determinată în orice moment de timp ulterior. Desigur, pentru aceasta este necesară modificarea formulei obținute anterior. Noua formulă (care, de altfel, permite rezolvarea problemei generale a bazinului) este următoarea:

$$t = \frac{V_{\text{bazin}} - V_{\text{initial}}}{C_{\text{pompa}} - C_{\text{scurgere}}},$$

unde

V_{bazin} – volumul total al bazinului,

V_{initial} – cantitatea inițială de apă în bazin,

C_{pompa} – capacitatea pompei (pe oră),

C_{scurgere} – capacitatea găurii de scurgere (pe oră).

Astfel putem calcula timpul necesar pentru umplerea *oricărui* bazin, cu *orice* cantitate inițială de apă și cu *orice* capacitate a pompei, care depășește capacitatea de scurgere, care de asemenea poate varia.

Metoda de rezolvare care utilizează formulele analitice, ce permit calculul direct al rezultatului final, fără iterații și rezultate intermediare se numește **metoda analitică** de rezolvare. Soluțiile obținute cu ajutorul metodei analitice sunt numite **soluții analitice**.

Fiecare dintre metodele expuse are prioritățile și neajunsurile sale. Pentru unele probleme este foarte complicat sau practic imposibil de determinat formula analitică (de exemplu, coordonatele unei comete sau asteroid în funcție de timp), pentru altele este destul de complicat de simulat un model adecvat, chiar și folosind un număr foarte mare de calcule intermediare. Cunoașterea formulei analitice permite calculul imediat al soluției finale; utilizarea unui proces iterativ permite construirea dinamică a soluției în dependență de factorii utilizați în problemă.

Alegerea metodei este influențată de mai mulți factori, principalii fiind:

- Posibilitatea de determinare a soluției analitice
- Costul calculelor
- Numărul de calcule necesare pentru determinarea soluției de simulare
- Gradul de apropiere a soluției de simulare de soluția reală (exactă) a problemei

Întrebări și exerciții

1. Definiți noțiunea de simulare. Ce este o soluție de simulare?
2. Ce înțelegeți prin metodă analitică de rezolvare? Ce este o soluție analitică? Care sunt proprietățile soluțiilor analitice?
3. Enumerați proprietățile soluțiilor de simulare. Care dintre aceste proprietăți implică utilizarea calculatorului pentru rezolvarea problemelor prin metode de simulare?
4. Determinați o metodă de simulare pentru obținerea elementului cu numărul N din șirul de numere 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Există oare o metodă analitică pentru determinarea elementului cu numărul N ?
5. Rezolvați problema prin metoda simulării:
 - a) buburuză urcă în timpul zilei pe un stâlp 5 m, iar noaptea coboară 3m. Ascensiunea începe dimineata. Înălțimea stâlpului este de 15m. Când va ajunge buburuza în vârful stâlpului?
 - b) În condițiile punctului precedent ascensiunea începe dimineata de la înălțimea de 6m.
 - c) În condițiile punctului precedent ascensiunea începe seara.

4. ETAPELE REZOLVĂRII PROBLEMEI LA CALCULATOR

Instrumentele informatice permit rezolvarea problemelor atât prin metode analitice, cât și prin metode de simulare. Dar, rezolvarea oricărei probleme în informatică se divide în mai multe etape, fiecare din ele având același grad de importanță.

Analiza problemei inițiale. La această etapă este studiată problema reală. Sunt separate datele inițiale, se determină ce trebuie de obținut, care sunt relațiile dintre datele inițiale și rezultat. Tot aici sunt determinate restricțiile suplimentare asupra datelor inițiale și rezultatului.

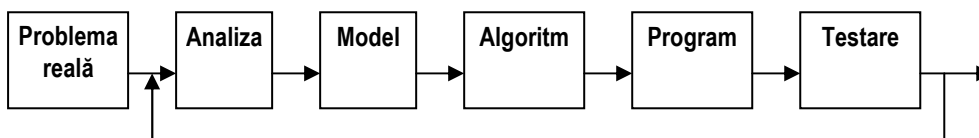
Crearea modelului problemei. Este creat modelul matematic al problemei. În dependență de problemă acest model poate fi analitic sau de simulare. Pentru modelul analitic este necesar să se determine formulele de calcul, care exprimă rezultatul căutat prin datele inițiale. Pentru un model iterativ se stabilesc valorile inițiale ale datelor, relațiile (formulele) de trecere la iterația următoare, condiția de întrerupere a calculelor. Tot la această etapă are loc (dacă e posibil) divizarea problemei în *subprobleme* și elaborarea modelelor pentru fiecare din ele.

Elaborarea algoritmului. În cazul rezolvării informatice a unei probleme algoritmul conține metoda de rezolvare a problemei, descrisă într-o formă acceptabilă (pseudocod, schemă logică etc.) și relațiile dintre diferite etape de rezolvare. Dacă problema a fost divizată în subprobleme, algoritmul mai conține date despre relațiile dintre modelele subproblemelor. În procesul de rezolvare la calculator a problemei este deosebit de importantă consecutivitatea îndeplinirii instrucțiunilor. Anume algoritmul divizează modelul matematic în pași elementari și stabilește ordinea de efectuare a calculelor la fiecare pas.

Scrierea programului. Pentru ca să devină posibilă rezolvarea problemei de către calculator, nu este suficient algoritmul de rezolvare. Algoritmul trebuie transpus într-o formă înțeleasă de calculator – **program** într-un **limbaj de programare**. Pașii algoritmului sunt descriși cu ajutorul instrucțiunilor limbajului de programare, iar consecutivitatea lor – de consecutivitatea instrucțiunilor. În procesul de scriere a programului pot să apară erori sintactice sau semantice. Procesul de corectarea a lor este de asemenea inclus în etapa de scriere a programului. Etapa se consideră încheiată atunci când compilarea sau interpretarea programului finalizează fără erori.

Testarea programului. O compilare reușită nu înseamnă o problemă rezolvată corect. Pentru verificarea corectitudinii se realizează o serie de teste, care cercetează lucrul programului în funcție de seturi de date de intrare simple, medii și extreme. Dacă pentru toate testele efectuate programul determină rezultate corecte, se poate presupune că problema a fost rezolvată corect. Dacă în procesul de testare se obțin rezultate eronate, urmează să fie cercetate din nou etapele precedente, începând cu *analiza problemei* și până la *scrierea programului*.

Procesul de rezolvare a unei probleme la calculator poate fi ilustrat cu ajutorul următoarei scheme:



Exemplul 1

Problema: Ion a elaborat un nou model de robot. Robotul se deplasează după un algoritm care conține doar instrucțiuni din setul: un pas la Sud (S), un pas la Nord (N), un pas la Vest (W), un pas la Est (E). Instrucțiunile algoritmului se îndeplinesc consecutiv. După sfârșitul programului robotul se oprește. Axele de coordonate sunt paralele direcțiilor geografice. Unitatea de măsură coincide cu un pas al robotului. Determinați câți algoritmi

distincți din exact K ($0 \leq K \leq 16$) instrucțiuni deplasează robotul din punctul cu coordonatele $(0,0)$ în punctul cu coordonatele (X, Y) ($|X|, |Y| \leq 16$).

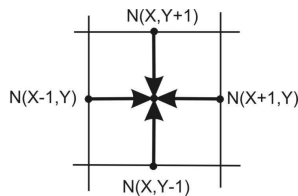
Analiza problemei: Este dată o suprafață de rețea, nodurile rețelei fiind puncte cu coordonate întregi. Se cere de determinat numărul de trasee diferite pe rețea fin nodul cu coordonatele $(0,0)$ în nodul cu coordonatele (X,Y) .

Rețeaua este formată din nu mai mult de 33 de linii și 33 de coloane. Numărul de mișcări nu depășește 16.

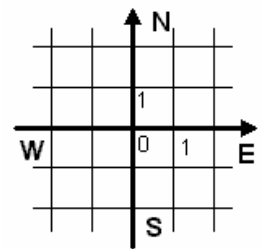
Datele inițiale vor fi introduse de la tastatură. Rezultatele vor fi afișate la ecran.

Modelul matematic: Se construiește schema grafică a problemei (desenul 3). Inițial robotul se află în originea coordonatelor. Poziția finală este determinată de valorile X și Y date inițial.

Se observă că numărul de algoritmi din K instrucțiuni care permit deplasarea din $(0,0)$ în (X, Y) este egal cu suma numerelor de algoritmi din $K-1$ mișcări, cu care se poate ajunge în punctele vecine celui cu coordonatele (X,Y) .



Desenul 4. Numărul de posibilități de a ajunge în K mișcări în (X,Y) se determină ca suma numărului de posibilități de a ajunge în $K-1$ mișcări în unul din punctele $(X,Y+1)$ $(X,Y-1)$ $(X+1,Y)$ $(X-1,Y)$



Desenul 3. Poziția inițială a robotului și direcțiile de deplasare

Inițial în 0 mișcări se poate ajunge doar din $(0,0)$ în $(0,0)$ într-un singur mod. La fiecare iterație următoare se folosește formula

$$N_{i+1}(X,Y) = N_i(X,Y+1) + N_i(X+1,Y) + N_i(X,Y-1) + N_i(X-1,Y)$$

Algoritm:

Pas 0. Inițializarea. Se formează tablourile A , B $[-20..20, -20..20]$ cu elemente de tip întreg lung. Elementul $A[I,J]$ indică numărul de algoritmi din R ($R= 0..K$) mișcări care deplasează robotul din $(0,0)$ în (I,J) . Matricea B păstrează valorile elementelor matricei A de la iterația precedentă. R se inițializează cu 0; $A[0,0]$ cu 1, celelalte elemente ale matricei A – cu 0.

Pas 1. $R \leftarrow R + 1$; $B \leftarrow A$

Pas 2. Pentru toți I de la $-R$ până la R

Pentru toți J de la $-R$ până la R

$$A[I,J] \leftarrow B[I, J+1] + B[I, J-1] + B[I+1, J] + B[I-1, J]$$

Pas 3. Dacă $R=K$ se trece la **pas 4**, în caz contrar – se revine la **pas 1**

Pas 4. Afișare $A[X,Y]$. Stop.

Program

```
program cn001;
type  grid = array [-18..18, -18..18] of longint;
var
    a, b: grid;
```



```

i, r, j, k, n, x, y: longint;
begin
  read(k, x, y);
  a[0,0] := 1;
  for r := 1 to k do
    begin
      b := a;
      for i := -r to r do
        for j := -r to r do
          a[i,j] := b[i+1,j]+b[i-1,j]+b[i,j-1]+b[i,j+1];
        end;
      writeln(a[x,y]);
    end;
end.

```

Testare Pentru testare a fost folosit următorul set de teste:

Date inițiale	Rezultat
0 0 0	1
7 - 4 1	147
8 1 3	1568
12 4 2	174240
16 0 -16	1
16 2 2	103062960

Întrebări și exerciții

1. Enumerați etapele rezolvării unei probleme la calculator. Explicați necesitatea fiecărei etape.
2. Care sunt metodele de descriere a algoritmului unei probleme? Exemplificați.
3. Care este impactul divizării unei probleme în subprobleme elementare? Dați exemple de probleme, care pot fi divizate în subprobleme. Indicați două sau mai multe probleme, care conțin subprobleme identice
4. Pentru următoarele probleme realizați modelul matematic:
 - a) Sunt cunoscute coordonatele a trei vârfuri ale unui dreptunghi cu laturile paralele axelor de coordonate. Se cere să se determine coordonatele celui de al patrulea vârf.
 - b) În condițiile punctului precedent laturile dreptunghiului pot fi poziționate arbitrar față de axele de coordonat
5. Pentru următoarele probleme descrieți algoritmul, folosind una din metodele de descriere cunoscute
 - a) Este dat un șir din cel mult 100 numere naturale. Se cere să se ordoneze elementele șirului în ordine crescătoare
 - b) Este dat un șir din cel mult 100 de numere întregi. Se cere să se determine elementul cu valoare maximă din șir și numărul de repetări ale lui prin o singură parcurgere a șirului.
6. Elaborați programe pentru rezolvarea problemelor din exercițiile 3 și 4.
7. Elaborați seturi de teste pentru programele realizate în exercițiul 5.