

Dinamica

Masa

Proprietatea corpului de a-si pastra starea de repaus sau de miscare rectilinie uniforma cand asupra lui nu actioneaza alte corpuri se numeste inertie. Masura inertiei este masa corpului. Masa este si cantitatea de substanta care se contine in corp. In sistemul de masuri SI masa se masoara in kilograme (kg).

Forta

Un corp material izolat se afla in repaus sau se misca rectiliniu uniform. Aceasta stare a corpului poate fi schimbata prin actiune din exterior. La studierea miscarii corpurilor de multe ori este important rezultatul actiunii si nu natura ei. Se spune ca asupra corpului actioneaza o forta. Forta este un vector. Daca asupra corpului actioneaza mai multe forte, atunci rezultatul actiunii este determinat de suma geometrica a tuturor fortelor:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

si poarta denumirea de principiul suprapunerii fortelor.

Principiile fundamentale ale dinamicii

Acestea au fost formulate de Newton.

- Corpul isi pastreaza starea de repaus sau de miscare rectilinie uniforma daca asupra lui nu actioneaza alte corpuri sau actiunea lor se compenseaza (legea inertiei).
- Daca asupra unui corp actioneaza o forta, acceleratia corpului este proportionala cu forta executata sau:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

- Daca doua corpuri interactioneaza, atunci fortele de interactiune sunt egale ca modul, opuse ca sens si orientate pe aceeasi dreapta- la actiune este si reactiune:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Principiul relativitatii Galilei

Miscarea rectilinie si uniforma a sistemelor de referinta inertiiale nu influenteaza desfasurarea proceselor mecanice in raport cu aceste sisteme. Sau toate procesele mecanice se desfasoara la fel in toate sistemele de referinta inertiiale.

Daca un sistem mobil se deplaseaza de-a lungul axei x cu viteza \vec{v} , atunci au loc transformarile Galilei:

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t',$$

unde v este proiectia vitezei \vec{v} pe axa x .

Legea atractiei universale

Forta de interactiune dintre doua puncte materiale este proportionala produsului maselor corpurilor si invers proportionala patratului distantei dintre ele:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2},$$

unde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ – constanta gravitacionala.

Fora de greutate

Este forta cu care actioneaza Pamantul asupra corpurilor din apropierea lui. Daca inaltimea corpului h de la suprafata Pamantului este cu mult mai mica decat raza Pamantului, atunci

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

unde \vec{g} – acceleratia caderii libere ($g = 9,81 \frac{m}{s^2}$).

Sateliti artificiali

Daca un corp este aruncat de la o anumita inaltime paralel suprafetei Pamantului cu o anumita viteza, el se poate misca pe circumferinta in jurul Pamantului sub actiunea fortei de greutate. Astfel corpul devine satelit artificial al Pamantului. Viteza cu care se misca un satelit artificial pe circumferinta in jurul Pamantului este numita I-a viteza cosmica:

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9 \frac{km}{s}.$$

Daca aparatului i se comunica viteza de $11 \frac{km}{s}$, atunci el se indeparteaza de la Pamant miscandu-se pe o parabola si reprezinta a 2-a viteza cosmica.

Deformatii elastice. Legea lui Hooke

Daca asupra unui corp solid actioneaza forte astfel incat corpul sa ramina in stare de repaus, aceste forte produc deformatii ale corpului. Se deosebesc patru tipuri de deformatii: intindere-comprimare; flexiune-incovaiere; deplasare si torsiune. Deformandu-se, corpul tinde sa-si revina in starea initiala: apar forte de elasticitate.

In cazul deformatiilor de intindere are loc legea lui Hooke:

$$F = -kx,$$

unde x – marimea deformatiei (alungirea), k – coeficientul de elasticitate sau rigiditatea corpului.

Daca asupra corpului actioneaza numai forte de elasticitate, acestea provoaca miscari oscilatorii (bunaoara, un corp prins cu o spirala pe o masa orizontala in lipsa fortelor de frecare).

Greutatea

Este forta cu care actioneaza corpul asupra suportului sau suspensiei, fiind atras de Pamant si se determina ca:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}),$$

unde \vec{a} este acceleratia cu care se misca sistemul.

Fora de frecare (de alunecare)

Apare la deplasarea corpului pe suprafata altui corp si este conditionata de interactiunea dintre molecule. Fora de frecare este orientata in sens opus vitezei si modulul ei este proportional fortei de reactiune a reazemului:

$$F_{fr} = \mu N,$$

unde μ – coeficient de frecare.

Fortele de frecare conduc la incetinirea miscarii si daca nu actioneaza alte forte, corpul peste un anumit interval de timp se opreste.

Momentul fortei

Este produsul dintre forta si bratul ei (distanța de la axa de rotatie pina la directia aplicarii fortei):

$$M = Fd.$$

Un corp se afla in echilibru daca:

- suma geometrica a tuturor fortelor este egala cu zero:

$$\sum \vec{F}_i = 0;$$

- suma algebrica a momentelor fortelor in raport cu axa de rotatie este egala cu zero:

$$\sum M_i = 0.$$

Aici se are in vedere ca unele momente ale fortelor rotesc sistemul intr-un sens, altele, in alt sens. Unele sunt pozitive, altele – negative.

Centrul de masa

Este punctul in care ar fi concentrata toata masa corpului si s-ar misca astfel de parca toate fortele exterioare care actioneaza asupra sistemului de puncte ar fi aplicate in acest punct.

Miscarea centrului de masa are loc astfel ca si cum toate fortele exterioare care actioneaza asupra sistemului de puncte ar fi aplicate in centrul de masa.

Centrul de greutate

Este punctul de aplicare a reazamului pentru ca sistemul de puncte sa se afle in echilibru. In cazul unui corp cu dimensiuni nu prea mari, fortele de greutate care actioneaza asupra diferitor parti ale sistemului de puncte sunt paralele si centrul de greutate coincide cu centrul de masa.

Exemple de rezolvare a problemelor

1. Un tren cu masa de 500 t dupa incetarea actiunii fortei de tractiune de 98 kN se opreste in timp de 1 min. Se cere viteza initiala a trenului.

$$m = 500 \text{ t} = 5 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

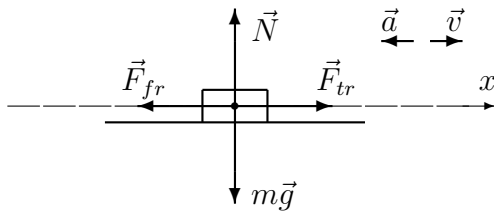
$$F_{tr} = 98 \text{ kN} = 98 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$v_0 - ?$$

Solutie

Aici se subintelege ca initial trenul se misca rectiliniu uniform cu viteza v_0 . Rezulta ca suma fortelor este zero.



Asupra trenului acționează forțele: de tracțiune \vec{F}_{tr} , de frecare \vec{F}_{fr} , de greutate $m\vec{g}$ și de reacțiune \vec{N} :

$$\vec{F}_{tr} + \vec{F}_{fr} + \vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Proiectăm pe axa x :

$$F_{tr} - F_{fr} = 0 \Rightarrow F_{tr} = F_{fr}.$$

După încetarea acțiunii forței de tracțiune rezultanta forțelor este egală cu \vec{F}_{fr} (forțele \vec{N} și $m\vec{g}$ se compensează), prin urmare, conform legii a II-a a lui Newton

$$\vec{F}_{fr} = m\vec{a} = m \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

La oprire peste intervalul de timp t viteza finală $\vec{v} = 0$, prin urmare:

$$\vec{F}_{fr} = -\frac{m\vec{v}_0}{t}.$$

Proiectând pe axa x , obținem:

$$-F_{fr} = -\frac{mv_0}{t} \Rightarrow v_0 = \frac{F_{fr} \cdot t}{m};$$

$$v_0 = \frac{98 \cdot 10^3 \cdot 60}{5 \cdot 10^5} = 11,76 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \approx 42,3 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

2. Un corp alunecă pe un plan inclinat cu unghiul de inclinare de 45° . Parcurgând distanța de 36,4 cm corpul atinge viteza de 2 m/s. Se cere coeficientul de frecare a corpului pe plan.

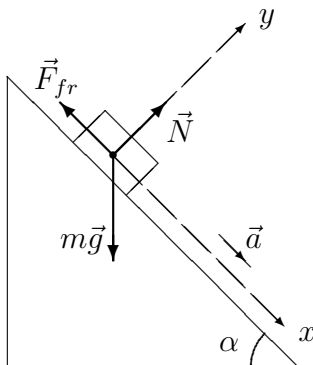
$$S = 36,4 \text{ cm} = 0,364 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$v = 2 \text{ m/s}$$

$$\mu - ?$$

Soluție



Asupra corpului actioneaza fortele: de frecare \vec{F}_{fr} , de greutate $m\vec{g}$ si de reactiune \vec{N} . Corpul se misca pe plan cu acceleratia \vec{a} . Aplicam legea a II-a a lui Newton

$$\vec{F}_{fr} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Orientam axa x in sensul miscarii si axa y in sensul fortei \vec{N} . Proiectam pe axa x si y :
 $x : -F_{fr} + mg \sin \alpha = ma$, $y : N - mg \cos \alpha = 0$.

Luand in considerare ca $F_{fr} = \mu N$, obtinem:

$$\begin{cases} -\mu N + mg \sin \alpha = ma, \\ N - mg \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Din ecuatia a doua $N = mg \cos \alpha$ si, substituind in prima, obtinem:

$$-\mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha = ma,$$

de unde

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}.$$

Vom determina acceleratia din expresia pentru drumul parcurs:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2S} = \frac{v^2}{2S},$$

deoarece $v_0 = 0$. Atunci

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - \frac{v^2}{2S}}{g \cos \alpha} = \frac{2Sg \sin \alpha - v^2}{2Sg \cos \alpha}$$

sau

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{v^2}{2Sg \cos \alpha}, \quad \mu = \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{2^2}{2 \cdot 0,364 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,2.$$

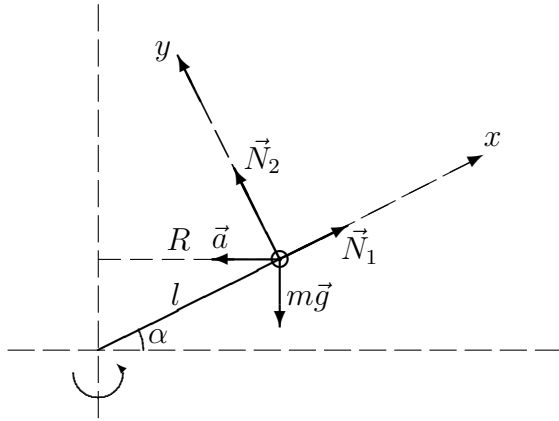
3. O vergea neteda este inclinata sub un unghi de 30° fata de orizontala si poate sa se roteasca in jurul unei axe verticale, ce trece prin capatul ei de jos. Pe vergea este imbracata o marga care se sprijina pe un suport la distanta de 6 cm de la capatul de jos. Cu ce viteza unghilara urmeaza sa se roteasca vergeaua pentru ca marga sa zboare de pe ea?

$$\alpha = 30^\circ$$

$$l = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$$

$$\omega - ?$$

Solutie



Asupra margelei actioneaza fortele: de greutate $m\vec{g}$, de reactiune \vec{N}_1 din partea suportului si de reactiune \vec{N}_2 din partea vergelii. Sub actiunea acestor forte margeaua se misca pe circumferinta de raza R cu acceleratia centripeta \vec{a} . Aplecam legea a II-a a lui Newton:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Orientam axa x in sensul fortei \vec{N}_1 si axa y in sensul fortei \vec{N}_2 (aceste forte sunt reciproc perpendiculare).

Proiectam pe axele x si y :

$$x : N_1 - mg \sin \alpha = -ma \cos \alpha, \quad y : N_2 - mg \cos \alpha = ma \sin \alpha.$$

In momentul ruperii margelei de la suport forta $N_1 = 0$, prin urmare, din prima ecuatie:

$$g \sin \alpha = a \cos \alpha$$

(de ecuatia a doua nu vom avea nevoie).

Relatia dintre acceleratia centripeta si viteza unghiulara este:

$$a = \omega^2 R = \omega^2 l \cos \alpha.$$

Atunci:

$$g \sin \alpha = \omega^2 l \cos^2 \alpha.$$

De unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{l \cos^2 \alpha}},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8 \cdot \sin 30^\circ}{0,06 \cos^2 30^\circ}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 0,5}{0,06 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \approx 10,4 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right).$$

4. Ce parte din greutatea corpului o reprezinta micșorarea ei la ecuator datorita rotatiei Pamantului in jurul axei sale?

$R = 6,37 \cdot 10^6$ m – raza Pamantului

$T = 24 \cdot 3600$ s – perioada de rotatie a Pamantului in jurul axei sale

$a = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ – acceleratia centripeta la rotatia Pamantului in jurul axei sale

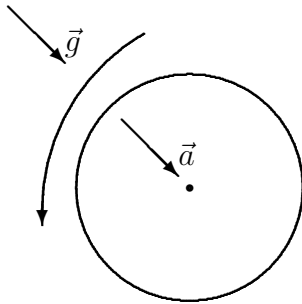
Solutie

Cand sistemul se afla in repaus sau in miscare rectilinie uniforma, greutatea corpului este egala cu forta de greutate $m\vec{g}$.

Daca sistemul se misca cu acceleratia \vec{a} , atunci greutatea este:

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}),$$

adica se micsoreaza cu $m\vec{a}$.



In cazul de fata, Pamantul se roteste in jurul axei sale cu acceleratia \vec{a} orientata spre centrul lui. Tot asa este orientata si acceleratia caderii libere \vec{g} . Prin urmare,

$$P = m(g - a).$$

Deci greutatea se micsoreaza cu ma . Obtinem:

$$\frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2};$$

$$\frac{ma}{mg} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{9,81 \cdot (24 \cdot 3600)^2} = 0,0034 = 0,34 \cdot 10^{-2}.$$

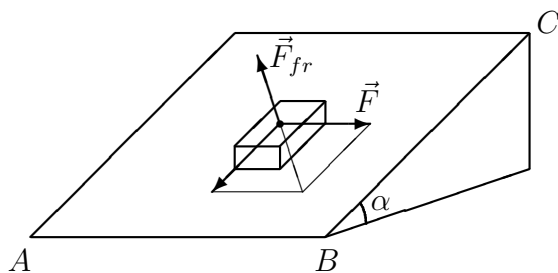
5. Un corp cu masa de 0,5 kg se afla pe un plan inclinat cu unghiul de inclinatie 30° . Suprafata planului este cu asperitati (nu este neteda). Se cere forta minima aplicata paralel muchiei de jos AB pentru ca corpul sa alunece. Coeficientul de frecare este 0,7.

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\mu = 0,7$$

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

$$F - ?$$



Solutie

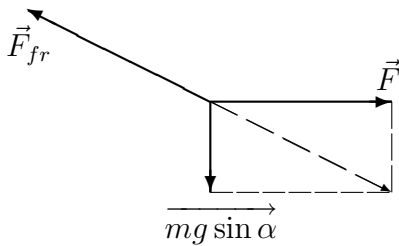
În planul suprafeței pe care se afla corpul, în momentul când corpul începe alunecarea, asupra lui acționează forțele: de tracțiune \vec{F} , de frecare \vec{F}_{fr} și componenta forței de greutate $(\overrightarrow{mg \sin \alpha})$, vector orientat paralel muchiei BC .

În cazul în care corpul începe mișcarea, suma acestor forțe trebuie să fie cel puțin egală cu zero:

$$\vec{F} + \vec{F}_{fr} + (\overrightarrow{mg \sin \alpha}) = 0$$

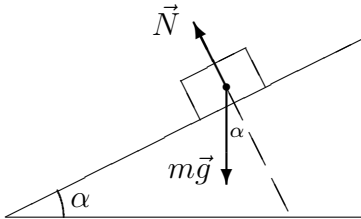
sau

$$\vec{F} + (\overrightarrow{mg \sin \alpha}) = -\vec{F}_{fr}.$$



Prin urmare, diagonala dreptunghiului, care este și rezultanta forțelor \vec{F} și $(\overrightarrow{mg \sin \alpha})$, este egală numeric cu modulul forței de frecare. Deci:

$$F_{fr}^2 = F^2 + (mg \sin \alpha)^2.$$



Din desenul de mai sus obținem:

$$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha.$$

Atunci:

$$(\mu N)^2 = F^2 + (mg \sin \alpha)^2$$

sau

$$(\mu mg \cos \alpha)^2 = F^2 + (mg \sin \alpha)^2.$$

De unde:

$$F = mg \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

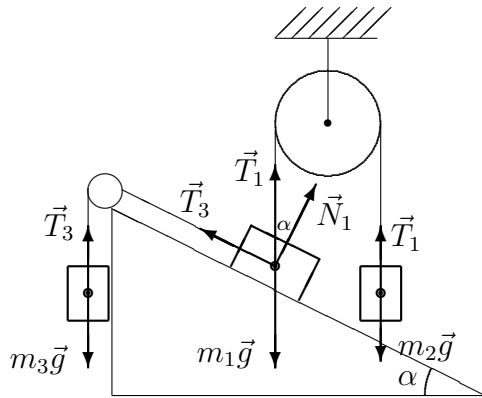
$$F = 0,5 \cdot 9,81 \sqrt{(0,7)^2 \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} = 0,5 \cdot 9,81 \sqrt{(0,7)^2 - \sin^2 30^\circ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (0,5)^2}.$$

$$F \approx 1,72 \text{ (N)}.$$

6. Un sistem de greutăți de mase m_1 , m_2 , m_3 se afla în echilibru. Se cere masa m_3 și forța de presiune a corpului de masa m_1 asupra planului inclinat, dacă masele m_1 , m_2 și

unghiul α sunt cunoscute. Frecarea se neglijeaza.

$$\frac{m_1, m_2, \alpha}{m_3 - ? \quad N_1 - ?}$$



Solutie

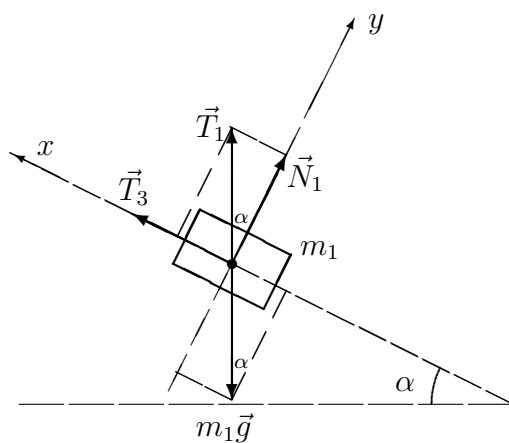
Sistemul se afla in echilibru, prin urmare, suma fortelor care actioneaza asupra fiecarui corp este egala cu zero:

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_3 + \vec{N}_1 = 0, \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_1 = 0, \\ m_3 \vec{g} + \vec{T}_3 = 0. \end{cases}$$

Din a 2-a si a 3-a ecuatie obtinem:

$$T_1 = m_2 g,$$

$$T_3 = m_3 g.$$



Pentru corpul m_1 orientam axa x in sensul fortei \vec{T}_3 , iar axa y in sensul fortei \vec{N}_1 si obtinem proiectiile:

$$x : T_3 + T_1 \sin \alpha - m_1 g \sin \alpha = 0$$

sau

$$m_3 g + m_2 g \sin \alpha - m_1 g \sin \alpha = 0,$$

de unde:

$$m_3 = (m_1 - m_2) \sin \alpha.$$

$$y : -m_1 g \cos \alpha + T_1 \cos \alpha + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = (m_1 g - T_1) \cos \alpha$$

sau

$$N_1 = (m_1 - m_2) g \cos \alpha.$$

N_1 este forta de reactiune a suportului (a planului inclinat) si conform legii a III-a a lui Newton este egala cu forta de presiune a corpului m_1 asupra planului inclinat.

7. Un capat al unei vergele este prins intr-o articulatie in punctul C . De celalalt capat A este prins capatul funiei trecute peste doua scripete si prinsa cu celalalt capat de o bara. La distanta $l = 0,6$ m de la punctul A asupra vergelei actioneaza o forta $F = 75$ N vertical in jos si pentru a asigura echilibrul de scripetele mobil este prinsa o greutate de masa $m = 10,25$ kg. Se cere lungimea vergelei si forta de presiune asupra articulatiei (in punctul C). Masa scripetelor si a vergelei se neglijeaza.

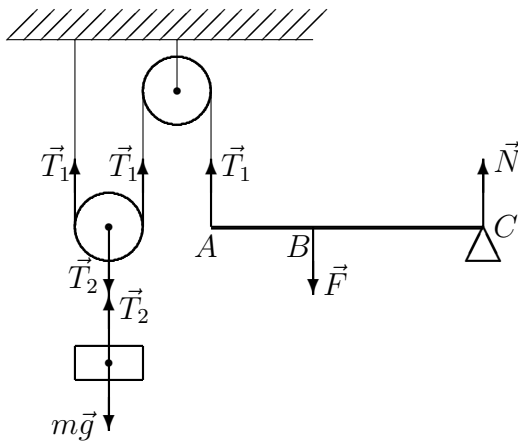
$$|AB| = l = 0,16 \text{ m}$$

$$m = 10,25 \text{ kg}$$

$$F = 75 \text{ N}$$

$$|AC| = L - ? \quad N - ?$$

Solutie



Asupra sistemului actioneaza fortele \vec{T}_1 si \vec{T}_2 de tensiune a firelor, $m\vec{g}$, \vec{F} si \vec{N} .
Conditii de echilibru ale corpului:

$$m\vec{g} + \vec{T}_2 = 0.$$

Conditii de echilibru ale vergelei:

$$\vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{N} = 0$$

si suma momentelor fortelor egala cu zero, dat fiind ca vergeaua, fiind prinsa articulata, are posibilitatea sa se roteasca. Daca alegem axa de rotatie in punctul C , atunci bratul fortei \vec{N} este zero, al fortei \vec{F} $d_2 = L - l$ si al fortei \vec{T}_1 $d_1 = L$.

Momentul fortei \vec{T}_1 tinde sa roteasca vergeaua dupa acele ceasornicului si il consideram pozitiv. Momentul fortei \vec{F} va fi negativ. Obtinem:

$$T_1 d_1 - F d_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 L - F(L - l) = 0.$$

Nu este cunoscuta forta T_1 .

Proiectam ecuatiile de mai sus pe axa y orientata vertical in sus:

$$-mg + T_2 = 0,$$

$$T_1 - F + N = 0.$$

Dar si din conditiile de echilibru al scripetelui mobil:

$$T_1 + T_1 - T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2T_1.$$

Obtinem:

$$-mg + 2T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{mg}{2}.$$

Substituind in ecuatiile respective, obtinem:

$$\frac{mg}{2} \cdot L - F(L - l) = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2Fl}{2F - mg} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 0,6}{2 \cdot 75 - 10,25 \cdot 9,81} = 1,82 \text{ (m)}.$$

Din una din ecuatiile de mai sus obtinem pentru N :

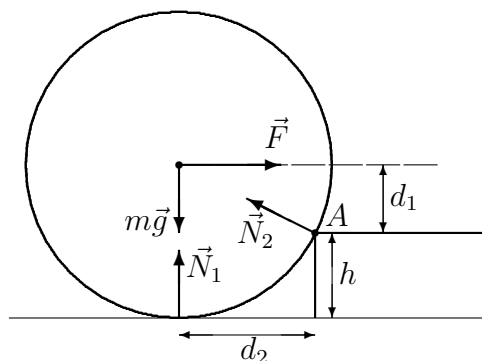
$$N = F - T_1 = F - \frac{mg}{2},$$

$$N = 75 - \frac{10,25 \cdot 9,81}{2} = 24,7 \text{ (N)}.$$

8. O roata de raza R si masa m se afla in fata unui prag de inaltime h . Se cere forta minima aplicata in directia orientata la axa rotii pentru ca ea sa ridice pragul. Frecarea se neglijeaza.

$$\frac{m, R, h}{F - ?}$$

Solutie



Roata va ridica pragul in cazul in care suma algebrica momentelor fortelor in raport cu axa de rotatie care trece prin punctul A va fi nu mai mica de zero.

Asupra rotii actioneaza fortele \vec{F} de tractiune, $m\vec{g}$ de greutate, \vec{N}_1 si \vec{N}_2 de reactiune. Momentul fortei \vec{N}_2 este zero. In momentul ridicarii rotii forta de reactiune $\vec{N}_s = 0$.

Bratul fortei \vec{F} $d_1 = R - h$, iar a fortei $m\vec{g}$ este

$$d_2 = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2} = \sqrt{h(2R - h)}.$$

Momentul fortei \vec{F} tinde sa roteasca dupa acele ceasornicului si il consideram pozitiv. Momentul fortei $m\vec{g}$ va fi negativ:

$$Fd_1 - mgd_2 = 0,$$

$$F(R - h) = mg\sqrt{h(2R - h)} \Rightarrow F = \frac{mg\sqrt{h(2R - h)}}{(R - h)}.$$