Progresii aritmetice si geometrice

Progresia aritmetica.

Definitia 1. Sirul numeric $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numeste progresie aritmetica, daca exista un numar real d, numit ratia progresia, astfel incat

$$a_{n+1} - a_n = d,\ \ (\forall n \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

adica daca fiecare termen al sirului (incepand cu al doilea) este egal cu precedentul plus unul si acelasi numar (ratia).

Elementul a_n se numeste termen general al progresiei sau termen de rang n.

Exemplul 1. Sa se verifice daca sirurile ce urmeaza formeaza o progresie aritmetica

$$a)\ a_n = 2n-1, \qquad b)\ 3, 6, 9, \ldots, 3k, \ldots \qquad c)\ a_n = \frac{1}{n}.$$

Rezolvare. a) Cum diferenta $a_{n+1} - a_n$ reprezinta un numar constant

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$, rezulta ca sirul dat de termenul general $a_n = 2n - 1$ reprezinta o progresie aritmetica cu ratia 2, si anume

$$1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$$

b) Similar exemplului a) se obtine

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 3n = 3, \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

si prin urmare sirul dat formeaza o progresie aritmetica cu ratia 3.

c) Se scriu primii trei termeni ai sirului $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}$ si se observa ca $a_2 - a_1 = -\dfrac{1}{2} \neq a_3 - a_2 = -\dfrac{1}{6}$, adica sirul dat nu formeaza o progresie aritmetica.

Altfel, se considera diferenta $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{(n+1)n}$ si se observa ca ea depinde de n (nu este un numar constant) si prin urmare sirul dat nu este o progresie aritmetica.

Proprietati ale progresiei aritmetice

Demonstratiile proprietatilor ce urmeaza, pot fi gasite, de exemplu, in [1].

P1. Termenul general al progresiei aritmetice se poate determina prin formula

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{2}$$

unde a_1 - primul termen al progresiei, d - ratia ei.

P2. (Proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice). Termenul de rang n este media aritmetica a termenilor echidistanti de el:

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n, \quad k = \overline{1, n-1} \tag{3}$$

Nota. Din propretatea **P2** rezulta ca conditia necesara si suficienta ca
a) trei numere a, b, c (in ordinea data) sa formeze o progresie aritmetica este

$$2b = a + b, \tag{4}$$

b) trei numere a, b, c (fara precizarea consecutivitatii) sa formeze o progresie aritmetica este

$$(2b - a - c)(2c - a - b)(2a - b - c) = 0. \tag{5}$$

P3. Daca $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetica si $k + n = m + p$ $(k, n, m, p \in \mathbf{N})$, atunci

$$a_k + a_n = a_m + a_p. \tag{6}$$

P4. Formula sumei S_n primilor n termeni ai progresiei aritmetice:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \tag{7}$$

sau tinand seama de (2)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{8}$$

Definitia 2. Progresia aritmetica este un sir crescator (descrescator), daca si numai daca ratia ei este un numar pozitiv (negativ). Daca ratia progresiei este zero avem un sir constant.

In continuare sa anlizam cateva exemple.

Exemplul 2. Sa se determine progresia aritmetica, daca $a_3 = 2$ si $a_5 = -2$.

Rezolvare. Se aplica formula teremenul general al progresiei aritmetice si se obtine sistemul

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d, \\ a_5 = a_1 + 4d, \end{cases}$$

sau, tinand seama de conditiile problemei obtinem

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 2, \\ a_1 + 4d = -2, \end{cases}$$

de unde se obtine primul termen al progresiei $a_1 = 6$ si ratia progresiei $d = -2$.

Exemplul 3. Sa se determine numarul x, astfel ca numerele $a - x,\ x,\ b$ $(a,\ b$ fiind date), luate in aceasta ordine sa formeze o progresie aritmetica.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice si se obtine ecuatia liniara

$$2x = a - x + b,$$

cu solutia $x = \dfrac{a+b}{3}$.

Exemplul 4. Sa se determine progresia aritmetica, suma primilor n termeni ai careia se exprima prin formula

$$S_n = 3n^2 + 6n \quad (n \geq 1).$$

Rezolvare. Cum suma primilor $(n-1)$ termeni este

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 + 6(n-1) = 3n^2 - 3, \quad (n \geq 2)$$

si cum $S_n - S_{n-1} = a_n$, rezulta

$$a_n = 3n^2 + 6n - 3n^2 + 3 = 6n + 3.$$

Substituind in formula termenului general, consecutiv $n = 1, 2, 3, \ldots$ se obtine $a_1 = 9$, $a_2 = 15$, $a_3 = 21$, ...

Exemplul 5. Sa se determine suma primilor nouasprezece termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, a_3, \ldots$, daca

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

Rezolvare. Se observa ca $4+16 = 8+12$ si, prin urmare, (a se vedea (6)) $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12}$. Se tine seama ca suma acestor termeni este 224, si se obtine $a_4 + a_{16} = 112$.

Cum (a se vedea (7)) $S_{19} = \dfrac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19$ si $a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = 112$ (1+19=4+16), rezulta

$$S_{19} = \frac{112}{2} \cdot 19 = 1054.$$

Exemplul 6. Pentru ce valori ale parametrului a exista asa valori ale variabilei x astfel incat numerele

$$5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad \frac{a}{2}, \quad 25^x + 25^{-x}$$

sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare. Conform proprietatii caracteristice a progresiei aritmetice, se obtine ecuatia

$$a = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}.$$

Se observa ca pentru $a \leq 0$ ecuatia nu are solutii (membrul din dreapta, ca suma de termeni pozitivi, este un numar pozitiv).

Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad (a > 0,\ a \neq 1)$, ecuatia se scrie

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} + 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) = a.$$

Se noteaza $5^x + \dfrac{1}{5^x} = t,\ t \geq 2$ (suma a doua marimi pozitive inverse), atunci

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} = \left(5^x + \frac{1}{5^x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

si ecuatia devine

$$t^2 + 5t - (a+2) = 0.$$

Cel putin o radacina a acestei ecuatii urmeaza a fi mai mare ca doi (ecuatia data are doua radacini reale distincte, deoarece pentru $a > 0,\ -(a+2) < 0$ si coeficientul de pe langa $t^2,\ 1 > 0$), pentru ce este suficient ca sa se verifice sistemul

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} < 2, \\ f(2) \leq 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} -\dfrac{5}{2} < 2, \\ 4 + 10 - (a+2) \leq 0, \end{cases} \qquad \text{de unde} \ \ a \geq 12.$$

Exemplul 7. Sa se determine suma tuturor numerelor pare de trei cifre, divizibile la 3.

Rezolvare. Primul numar par de trei cifre, divizibil la 3 este 102. Cum numarul par, divizibil la 3 se divide si la 6, se obtine progresia

$$102,\ 108,\ 114,\ \ldots,\ 996,$$

cu $a_1 = 102,\ d = 6$ si ultimul termen $a_x = 996$ ($x \in \mathbf{N}$).

Se tine seama ca $a_x = a_1 + (x-1)d$ sau

$$102 + (x-1)\cdot 6 = 996,$$

de unde, numarul tuturor numerelor pare de trei cifre divizibile prin trei, $x = 150$. Astfel, utilizand formula (7) se obtine

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 74850.$$

Exemplul 8. Fie $S_n,\ S_m$ si S_p suma primilor n, respectiv m si p, termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Sa se arate ca

$$\frac{S_n}{n}(m-p) + \frac{S_m}{m}(p-n) + \frac{S_p}{p}(n-m) = 0. \tag{9}$$

Rezolvare. Se tine seama de formula (8) si egalitatea (9) devine

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}(m-p) + \frac{2a_1 + (m-1)d}{2}(p-n) + \frac{2a_1 + (p-1)d}{2}(n-m) = 0$$

sau

$$2a_1[m-p+p-n+n-m]+[(n-1)(m-p)+(m-1)(p-n)+(p-1)(n-m)]d=0.$$

Cum

$$(n-1)(m-p)+(m-1)(p-n)+(p-1)(n-m)=nm-np-m+p+mp-mn-p+n+pn-pm-n+m=0$$

se obtine

$$2a_1\cdot 0+0\cdot d=0, \quad \text{adica} \quad 0=0,$$

si prin urmare, egalitatea este demonstrata.

Exemplul 9. Sa se determine numerele, ce sunt termeni comuni ai progresiilor aritmetice $2, 5, 8, \dots, 332$ si $7, 12, 17, \dots, 157$.

Rezolvare. Fie b este termenul de rang n in prima progresie si, prin urmare, $b=2+(n-1)\cdot 3$ si in acelasi timp, este termenul de rang m in a doua progresie, adica $b=7+(m-1)\cdot 5$. Asadar se obtine ecuatia

$$2+(n-1)\cdot 3=7+(m-1)\cdot 5,$$

sau

$$3(n-1)=5m$$

de unde, tinand seama ca m, n sunt numere naturale, se obtine $n=5k+1$ si $m=3k$, $k\in\mathbf{N}$, adica termenii $a_6, a_{11}, a_{16}, \dots, a_{5k+1}$ din prima progresie coincid cu termenii $c_3, c_6, c_9, \dots, c_{3k}$, din a doua progresie. Asadar, termenii comuni sunt: 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137 si 152.

Exemplul 10. Suma a trei numere pozitive α, β si γ este egala cu $\frac{\pi}{2}$. Sa se determine produsul $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma$ daca $\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\beta,\ \operatorname{ctg}\gamma$ formeaza o progresie aritmetica.

Rezolvare. Se tine seama de proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice si se obtine relatia

$$2\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma.$$

Cum $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ implica $\beta=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\gamma)$, se utilizeaza formula de reducere $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$ si se obtine

$$2\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$$

sau, folosind formulea tangentei sumei a doua unghiuri

$$2\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

de unde,

$$2\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}$$

sau, tinand seama ca α, β si γ sunt numere pozitive si suma lor este $\frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\neq 1$, $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, $\operatorname{tg}\gamma\neq 0$) se obtine

$$2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$$

de unde rezulta $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{1}{3}$ si, prin urmare, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma = 3$.

Exemplul 11. Fie ecuatia patrata $x^2 + px + q = 0$ cu radacinile reale x_1 si x_2. Sa se determine p si q astfel incat $q,\ x_1,\ p,\ x_2$ (in ordinea indicata) sa formeze o progresie aritmetica crescatoare.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea caracteristica a progresiei aritmetice, teorema lui Viete si se obtine sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 = q + p, \\ 2p = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases}$$

cu solutiile

$$\begin{cases} q = -4, \\ x_1 = -2, \\ p = 0, \\ x_2 = 2, \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} q = 0, \\ x_1 = 0, \\ p = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Cum progresia urmeaza a fi crescatoare, ramane $q = -4,\ x_1 = -2,\ p = 0,\ x_2 = 2$ si prin urmare ecuatia patrata ce verifica conditiile problemei date este $x^2 - 4 = 0$ cu $p = 0$ si $q = -4$.

Exemplul 12. Sa se determine primii trei termeni ai unei progresii aritmetice, descrescatoare, daca $a_1 + a_3 + a_5 = -24$ si $a_1 a_3 a_5 = 640$.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatea **P3** si se determina $a_3 = -8$, dupa ce se obtine sistemul

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = -16, \\ a_1 a_5 = -80, \end{cases}$$

cu solutiile $a_1' = -20,\ a_5' = 4$ si $a_1'' = 4,\ a_5'' = -20$. Cum progresia este descrescatoare ($d < 0$) ramane $a_1 = 4$ si $a_5 = -20$. Se utilizeaza **P3** si se obtine $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} = \dfrac{4 + (-8)}{2} = -2$. Asadar primii trei termeni ai progresiei sunt $4,\ -2$ si -8.

Progresia geometrica

Definitia 3. Sirul numeric $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se numeste progresie geometrica, daca exista asa un numar q, numit ratia progresiei, astfel incat

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \tag{10}$$

adica daca fiecare termen al sirului (incepand cu al doilea) este egal cu produsul dintre termenul precedent si unul si acelasi numar (ratia).

Elementul b_n se numeste termen general al progresiei de rang n.

Urmatoarele siruri reprezinta progresii geometrice:

$$\begin{array}{ll} 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots & \text{cu } b_1 = 2 \text{ si } q = 2, \\ 3; -1; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}, \ldots & \text{cu } b_1 = 3 \text{ si } q = -\dfrac{1}{3}, \\ a, a, a, \ldots & \text{cu } b_1 = a \text{ si } q = 1, \\ a, 0, 0, \ldots & \text{cu } b_1 = a \text{ si } q = 0 \end{array}$$

Tinem sa mentionam, ca daca unul din termenii progresiei geometrice este egal cu zero, atunci sau $b_1 = 0$ sau $q = 0$.

Proprietatile progresiei geometrice

P5. Termenul de rang n al progresiei geometrice se determine prin formula

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad (\forall n \in \mathbf{N}). \tag{11}$$

P6. (Proprietatea caracteristica a unei progresii geometrice). Patratul termenului de rang n este egal cu produsul termenilor echidistanti de el:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \quad (n \geq 2,\ k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{12}$$

in caz particular, pentru orice trei termeni consecutivi

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \tag{13}$$

Nota. Formulele (12), (13) se pot scrie si astfel

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}, \tag{14}$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \tag{15}$$

adica modulul termenului de rang n este media geometrica a termenilor echidistanti de el. In cazul progresiei cu termeni pozitivi insasi termenul de rang n este media geometrica a termenilor echidistanti de el

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

P7. Daca $k + n = m + p$ $(k, n, m, p \in \mathbf{N})$, atunci

$$b_k \cdot b_n = b_m \cdot b_p, \tag{17}$$

unde b_k, b_n, b_m, b_p - termeni ai progresiei geometrice $b_1, b_2, \ldots$.

P8. Trei numere a, b, c formeaza o progresie geometrica (fara a preciza consecutivitatea lor) daca si numai daca verifica relatia:

$$(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = 0, \tag{18}$$

iar numerele a, b, c formeaza o progresie geometrica (in ordinea indicata) daca si numai daca

$$b^2 = ac.$$

P9. Suma primilor n termeni S_n ai unei progresii geometrice se determina prin formula

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, \quad (q \neq 1) \tag{19}$$

unde b_1 - primul termen, q - ratia, si b_n - termenul general al progresiei geometrice.

In caz $q = 1$ suma primilor n termeni se determina prin formula

$$S_n = b_1 \cdot n. \tag{20}$$

P10. Suma S a tuturor termenilor ai progresiei geometrice infinit descrescatoare ($|q| < 1$) se determina prin formula

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \tag{21}$$

In continuare sa analizam cateva exemple.

Exemplul 13. Produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice este egal cu 1728, iar suma lor este egala cu 63. Sa se determine primul termen si ratia progresiei.

Rezolvare. Fie primii termeni ai progresiei b_1, b_2 si b_3. Atunci din conditia $b_1 b_2 b_3 = 1728$ rezulta (a se vedea (12)) $b_2^3 = 1728$ si $b_2 = 12$. Astfel se obtine sistemul:

$$\begin{cases} b_1 b_3 = 144, \\ b_1 + b_3 = 51, \end{cases}$$

solutiile caruia sunt si solutiile (a se vedea teorema reciproca a lui Viete) ecuatiei patrate

$$z^2 - 51z + 144 = 0.$$

Se rezolva ecuatia si se obtine $z_1 = 3$ si $z_2 = 48$, adica $b_1 = 3,\ b_3 = 48$ sau $b_1 = 48,\ b_3 = 3$. Cum $b_1 = 3,\ b_2 = 12$ sau $b_1 = 48$ si $b_2 = 12$ se obtine $q = 4$ sau $q = \dfrac{1}{4}$. Asadar solutiile problemei sunt $b_1 = 3$ si $q = 4$ sau $b_1 = 48$ si $q = \dfrac{1}{4}$.

Exemplul 14. Intr-o progresie geometrica cu termeni pozitivi termenul de rangul $(m+n)$ este egal cu p, iar termenul de rangul $(m-n)$ $(m > n)$ este s. Sa se determine termenul de rang m si termenul de rang n.

Rezolvare. Cum (a se vedea (11))

$$b_{m-n} \cdot b_{m+n} = b_m^2$$

rezulta $b_m^2 = ps$ si cum $b_m > 0$, se obtine $b_m = \sqrt{ps}$.

Conform conditiilor problemei si formulei (10) avem

$$\begin{cases} b_1 q^{m+n-1} = p, \\ b_1 q^{m-n-1} = s, \end{cases}$$

de unde $q^{2n} = \dfrac{p}{s}$ si prin urmare $q = \sqrt[2n]{\dfrac{p}{s}}$. Cum

$$b_1 q^{m+n-1} = b_1 q^{n-1} \cdot q^m = b_n \cdot q^m = p,$$

rezulta

$$b_n = \frac{p}{q^m} = \frac{p}{\sqrt[2n]{\left(\frac{p}{s}\right)^m}} = p \cdot \sqrt[2n]{\left(\frac{s}{p}\right)^m}.$$

Exemplul 15. Sa se calculeze suma

$$S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{n \text{ cifre}}.$$

Rezolvare. Avem

$$S_n = 7(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cifre}}),$$

$$9S_n = 7(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{n \text{ cifre}})$$

sau

$$\frac{9}{7}S_n = (10-1) + (100-1) + (10^3-1) + \ldots + (10^n-1)$$

de unde

$$\frac{9}{7}S_n = (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - n.$$

Cum in paranteze se afla suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu primul termen $b_1 = 10$ si ratia $q = 10$ se utilizeaza formula (19) si se obtine

$$\frac{9}{7}S_n = \frac{10 - 10^{n+1}}{1-10} - n$$

de unde

$$S_n = \frac{7}{9}\left(\frac{10 - 10^{n+1} + 9n}{-9}\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{9}\right) = \frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-1}{9} - (n+1)\right).$$

Exemplul 16. Sa se arate ca numerele $9, 10, 11$ nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice.

Rezolvare. Fie ca numerele date sunt termeni ai progresiei geometrice cu primul termen b_1 si ratia q. Atunci $9 = b_1q^{k-1}$, $10 = b_1q^{n-1}$ si $11 = b_1q^{m-1}$, de unde rezulta

$$\left(\frac{9}{10}\right) = q^{k-n}, \quad \left(\frac{11}{10}\right) = q^{m-k} \text{ sau } \left(\frac{9}{10}\right)^{m-n} = q^{(k-n)(m-n)}, \quad \left(\frac{11}{10}\right)^{k-n} = q^{(m-n)(k-n)}.$$

Asadar

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{(m-n)} = \left(\frac{11}{10}\right)^{(k-n)}$$

de unde

$$\frac{9^{m-n}}{11^{k-n}} = 10^{m-k}.$$

Cum m, n, k sunt numere naturale diferite, aceasta egalitate nu are loc si, prin urmare, numerele 9, 10, si 11 nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice.

Exemplul 17. Numerele a, b, c, d formeaza o progresie geometrica. Sa se arate ca $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$.

Rezolvare. Se dezvolta membrul din stanga egalitatii

$$A = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2.$$

Se tine seama ca $b^2 = ac$, $c^2 = bd$ si $bc = ad$ (a se vedea (12) si (17)), si se obtine

$$A = a^2 - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2c^2 + d^2 = a^2 - 2bc + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 = (a-d)^2.$$

Exemplul 18. Suma termenilor unei progresii geometrice infinit descrescatoare este egal cu 4, iar suma cuburilor termenilor ei este egala cu 192. Sa se determine termenul de rang 5.

Rezolvare. Fie b_1 si q - primul termen si ratia progresiei geometrice date. Atunci $|q| < 1$ si

$$S = \frac{b_1}{1-q} = 4.$$

Se observa ca cuburile termenilor progresiei initiale la fel formeaza o progresie geometrica infinit descrescatoare cu primul termen b_1^3 si ratia q^3. In adevar, cum $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q, \quad n \in \mathbf{N}$, rezulta $\dfrac{b_{n+1}^3}{b_n^3} = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)^3 = q^3, \quad n \in \mathbf{N}$. Astfel se obtine sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 4, \\ \dfrac{b_1^3}{1-q^3} = 192. \end{cases}$$

Se determina b_1 din prima ecuatie: $\quad b_1 = 4(1-q)$ si se substituie in a doua:

$$\frac{64(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)} = 192$$

de unde ($|q| < 1$) rezulta ecuatia

$$(1-q)^2 = 3(1+q+q^2)$$

sau

$$2q^2 + 5q + 2 = 0$$

cu solutiile $q_1 = -2$ si $q_2 = -\dfrac{1}{2}$. Cum $|q| < 1$ ramane $q = -\dfrac{1}{2}$ si prin urmare $b_1 = 6$. Se utilizeaza formula termenului de rang n si se obtine

$$b_5 = b_1 q^4 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

Exemplul 19. Sa se rezolve ecuatia:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^n x + \ldots}{1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \ldots + (-1)^n \operatorname{tg} x + \ldots} = 1 + \sin 2x, \quad |\operatorname{tg} x| < 1.$$

Rezolvare. Se observa ca in numaratorul membrului din stanga se afla suma termenilor unei progresii geometrice infinit descrescatoare cu primul termen $b_1 = 1$ si ratia $q_1 = \operatorname{tg} x$, iar in numitorul membrului din stanga - suma termenilor unei progresii geometrice infinit descrescatoare cu primul termen 1 si ratia $(-\operatorname{tg} x)$. Cum $|\operatorname{tg} x| < 1$ ecuatia se scrie

$$\frac{\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} x}}{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}} = 1 + \sin 2x$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

Cum $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})}$, iar $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = \left(\sqrt{2}\left(\sin x \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos x \sin \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, ecuatia devine

$$\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2\sin^2(x + \frac{\pi}{4})$$

de unde rezulta totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \\ 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \end{array}\right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} x=\pi k-\dfrac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x=\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Cum $|\operatorname{tg} x|<1$, ramane $x=\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Probleme combinate

Exemplul 20. Sa se determine numerele a, b si c daca se stie ca a, b, c sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice; $a,\ b+2,\ c$ formeaza o progresie aritmetica, iar $a,\ b+2,\ c+9$ formeaza o progresie geometrica.

Rezolvare. Se utilizeaza proprietatile caracteristice ale progresiilor geometrice si aritmetice si se obtine sistemul

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ 2(b+2)=a+c, \\ (b+c)^2=a(c+9), \end{cases}$$

cu solutiile $a=4,\ b=8,\ c=16$ sau $a=\dfrac{4}{25},\ b=-\dfrac{16}{25}$ si $c=\dfrac{64}{25}$.

Exemplul 21. Sa se arate, ca daca numerele pozitive a, b, c sunt respectiv termenii de rang m, n, p atat a unei progresii aritmetice cat si geometrice, atunci $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}=1$.

Rezolvare. Conform conditiilor

$$\begin{array}{l} a=a_1+(m-1)d, \\ b=a_1+(n-1)d, \\ c=a_1+(p-1)d, \end{array} \tag{22}$$

unde a_1 si d desemneaza primul termen si ratia progresiei aritmetice.

Din egalitatile (22) rezulta

$$b-c=(n-p)d, \quad c-a=(p-m)d \;\text{ si }\; a-b=(m-n)d. \tag{23}$$

In acelasi timp

$$a=b_1q^{m-1}, \quad b=b_1q^{n-1}, \quad c=b_1q^{p-1}, \tag{24}$$

unde b_1 si q sunt primul termen si ratia progresiei geometrice.

Se tine seama de egalitatile (23) si (24) si se obtine

$$\begin{aligned} a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b} &= a^{(n-p)d} \cdot b^{(p-m)d} \cdot c^{(m-n)d} = \\ &= \left(b_1q^{m-1}\right)^{(n-p)d} \cdot \left(b_1q^{n-1}\right)^{(p-m)d} \cdot \left(b_1q^{p-1}\right)^{(m-n)d} = \\ &= b_1^{d[(n-p)+(p-m)+(m-n)]} \cdot q^{d[(m-1)(n-p)+(n-1)(p-m)+(p-1)(m-n)]} = \\ &= b_1^0 \cdot q^0 = 1. \end{aligned}$$

Exemplul 22. Sa se determine triunghiurile, lungimile laturilor carora formeaza o progresie geometrica, iar marimile unghiurilor - o progresiei aritmetica.

Rezolvare. Fie α, β, γ - unghiurile interioare ale unui triunghi, opuse laturilor a, b si c. Cum $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ si $\alpha = \beta - d$, $\gamma = \beta + d$ unde d - ratia progresiei aritmetice, se obtine

$$\beta - d + \beta + \beta + d = 180^\circ$$

de unde $\beta = 60^\circ$.

Conform teoremei cosinusurilor

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Cum $b^2 = ac$, si $\cos\beta = \frac{1}{2}$, rezulta

$$ac = a^2 + c^2 - ac$$

de unde $a^2 - 2ac + c^2 = 0$ sau $(a-c)^2 = 0$ si $a = c$.

Astfel se obtine un triughi isoscel ($a = c$) cu unghiul cuprins intre aceste laturi egal cu 60°, adica un triuhgi echilateral.

Exemplul 23. Sirul de numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formeaza o progresie aritmetica, iar sirul $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ - o progresie geometrica. Sa se arate ca pentru orice n natural, $n > 2$

$$a_n < b_n,$$

daca $a_1 \neq a_2$, $a_1 = b_1$ si $a_2 = b_2$.

Rezolvare. Fie d - ratia progresiei aritmetice si q - ratia progresiei geometrice. Cum $a_1 = b_1$ si $a_2 = b_2$ se obtine

$$a_1 + d = a_1 \cdot q,$$

de unde $q = \frac{a_1 + d}{a_1} = 1 + \frac{d}{a_1} > 1$ si $d = a_1(q-1) > 0$. Asadar,

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-1)a_1(q-1) = a_1(1 + (n-1)(q-1))$$
$$b_n = b_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}$$

si urmeaza sa demonstram inegalitatea

$$a_1(1 + (n-1)(q-1)) < a_1 q^{n-1}$$

sau, cum $a_1 > 0$,

$$1 + (n-1)(q-1) < q^{n-1}.$$

Ultima inegalitate rezulta nemijlocit din inegalitatea lui Bernoulli (a se vedea tema "Principiul Inductiei Matematice" sau "Inegalitati").

Altfel, se considera diferenta

$$1+(n-1)(q-1)-q^{n-1} = (1-q)\left[\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)\right] = (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}-(n-1))$$

(s-a tinut seama ca $\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$ reprezinta suma primilor $n-2$ termeni ai progresiei geometrice cu $b'_1 = 1$ si $q' = q$).

Cum $q > 1$ si, prin urmare $q^k > 1,\ k \in \mathbf{N}$, se obtine

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} - (n-1) > 0$$

iar produsul $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}-(n-1)) < 0$. Prin urmare si $1+(n-1)(q-1)-q^{n-1} < 0$, adica $a_n < b_n,\ n > 2$.

Exemplul 24. Sa se determine progresiile ce sunt concomitent si aritmetice si geometrice.

Rezolvare. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ progresiile aritmetica si geometrica. Atunci $2a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+3}$, si $2a_1q^{k+1} = a_1q^k + a_1q^{k+2}$ sau $a_1q^k - 2a_1q^{k+1} + a_1q^{k+2} = 0$, de unde se obtine

$$a_1q^k(1-2q+q^2) = 0, \quad a_1q^k(1-q)^2 = 0.$$

Asadar, daca $a_1q \neq 0$ rezulta $q = 1$, adica progresia reprezinta un sir constant $a_1, a_1, \ldots, a_1, \ldots$ $(d = 0,\ q = 1)$.

Daca $a = 0$, se obtine sirul constant $0, 0, \ldots, 0, \ldots \quad (d = 0,\ q \in \mathbf{R})$, iar daca $q = 0,\ a \neq 0$ solutii nu sunt.

Probleme recapitulative

1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - o progresie aritmetica cu termeni pozitivi. Sa se arate ca

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

2. Sa se arate ca

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \ldots$ sunt termeni nenuli ai unei progresii aritmetice.

3. Sa se determine numerele de trei cifre, divizibile prin 45, cifrele carora formeaza o progresie aritmetica.

4. Sa se rezolve ecuatiile

$$2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + x = 155$$

5. Sa se determine suma tuturor numerelor pare de doua cifre.

6. Sa se afle $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$ daca $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o progresie aritmetica si $a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{16} = 1447$.

7. Sa se determine valorile lui x pentru care numerele $\lg 2,\ \lg(2^x - 1),\ \lg(2^x + 3)$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

8. Sa se arate ca numerele $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$ nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice.

9. Fie $S_n,\ S_{2n},\ S_{3n}$ respectiv sumele primilor $n,\ 2n,\ 3n$ termeni ai aceleiasi progresii geometrice. Sa se arate ca este justa relatia

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

10. Sa se determine patru numere in progresie aritmetica stiind ca suma lor este 48, iar raportul dintre produsul termenilor extremi si produsul la ceilalti doi termeni este $\frac{27}{35}$.

11. Sa se determine o progresie geometrica, continand sapte termeni, daca suma primilor trei termeni este egala cu 26, iar suma ultimilor trei este egala cu 2106.

12. Sa se arate ca numerele $\alpha = \sqrt[n]{a^{x-y}},\ \beta = \sqrt[2n]{a^{z-y}},\ \gamma = \sqrt[n]{a^{z-x}}$ formeaza o progresie geometrica.

13. Sa se determine trei numere, ce formeaza o progresie geometrica, daca suma lor este egala cu 62, iar suma patratelor acestor numere este egala cu 2604.

14. Numerele a_1, a_2, a_3 formeaza o progresie aritmetica, iar patratele lor o progresie geometrica. Sa se determine aceste numere, daca suma lor este egala cu 21.

15. Sa se determine progresia aritmetica, daca suma primilor ei zece termeni este egala cu 300, iar primul termen, termenul de rang doi si termenul de rang cinci formeaza o progresie geometrica.

Referinte

1. P.Cojuhari si altii. Progresii aritmetice si geometrice. Mica biblioteca a elevului. Seria Matematica, informatica. Chisinau, Editura ASRM, 1995.