Ecuatii si inecuatii liniare cu parametru

Definitie. Ecuatia de forma
$$ax + b = 0, \tag{1}$$
unde $a, b \in \mathbf{R}$, x - necunoscuta, se numeste ecuatie liniara (ecuatia de gradul intai).

Exemple de ecuatii liniare:

$$\begin{array}{ll}
a)\ 2x + 6 = 0, & \text{cu } a = 2,\ b = 6; \\
b)\ x - 2 = 0 & \text{cu } a = 1,\ b = -2; \\
c)\ 0 \cdot x + 0 = 0, & \text{cu } a = b = 0; \\
d)\ 0 \cdot x + \dfrac{1}{3} = 0, & \text{cu } a = 0,\ b = \dfrac{1}{3}; \\
e)\ -\dfrac{1}{2}x = 0, & \text{cu } a = -\dfrac{1}{2};\ b = 0.
\end{array}$$

Cum ecuatia (1) este echivalenta cu ecuatia
$$ax = -b$$
rezulta urmatoarea afirmatie.

Afirmatia 1. Daca

1. $a \neq 0$, ecuatia (1) are o solutie unica, $x = -\dfrac{b}{a}$;
2. $a = 0,\ b \neq 0$, ecuatia (1) nu are solutii;
3. $a = 0,\ b = 0$, orice numar real este solutie a ecuatiei (1).

Asadar ecuatiile liniare din exemplul de mai sus se rezolva in modul urmator

a) $x = -\dfrac{6}{2}$, adica $x = -3$; b) $x = 2$; c) orice numar real este solutie a ecuatiei date; d) ecuatia nu are solutii; e) $x = 0$.

Nota 1. Ecuatia
$$ax + b = cx + d,$$
unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, se reduce la ecuatia liniara (1):
$$ax + b = cx + d \ \Leftrightarrow\ (a - c)x + (b - d) = 0,$$
sau
$$ax + b = cx + d \ \Leftrightarrow\ (a - c)x = d - b.$$

Nota 2. Ecuatia
$$(ax + b)(cx + d) = 0$$
unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, se reduce la totalitatea de ecuatii liniare
$$\left[\begin{array}{l} ax + b = 0, \\ cx + d = 0. \end{array}\right.$$

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ \frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4, \qquad c)\ -x + 2 = 2 - x,$$
$$b)\ 2x + 1 = 2x + 3, \qquad d)\ (2x + 4)(3x - 1) = 0.$$

Rezolvare. a) $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4 \ \Leftrightarrow\ \frac{3x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = 4 \ \Leftrightarrow\ \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 4 + 3 \ \Leftrightarrow\ \frac{7}{6}x = 7 \ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ x = 7 : \frac{7}{6} \ \Leftrightarrow\ x = 6.$

b) $2x + 1 = 2x + 3 \ \Leftrightarrow\ 2x - 2x = 3 - 1 \ \Leftrightarrow\ 0 \cdot x = 2$ de unde rezulta ca ecuatia initiala nu are solutii.

c) $-x + 2 = 2 - x \ \Leftrightarrow\ -x + x = 2 - 2 \ \Leftrightarrow\ 0 \cdot x = 0$, de unde rezulta ca orice numar real este solutie a ecuatiei din enunt.

d) $(2x + 4)(3x - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} 2x + 4 = 0, \\ 3x - 1 = 0, \end{array}\right. \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

In continuare vom considera ecuatiile liniare cu **parametru**. Prin parametru (a se vedea tema Ecuatii cu parametru) vom intelege un numar fixat, dar necunoscut. De regula, parametrul se noteaza cu primele litere ale alfabetului latin.

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile

$$a)\ ax = 1; \qquad e)\ \frac{(x-a)(2x+a)}{(x+1)(x-2)} = 0;$$
$$b)\ ax^2 - 1 = x + a; \qquad f)\ \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c;$$
$$c)\ ax + b = cx + d; \qquad g)\ \frac{2}{5x - a} = \frac{3}{ax - 1}.$$
$$d)\ \frac{x - 2x}{x - 4} = 0;$$

Rezolvare. a) Se aplica afirmatia 1 si se obtine:
daca $a \neq 0$, ecuatia are o solutie unica, $x = \frac{1}{a}$;
daca $a = 0$, ecuatia devine $0 \cdot x = 1$ si, prin urmare, nu are solutii.
Raspuns: daca $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $x = \frac{1}{a}$; daca $a = 0$, solutii nu sunt.

b) Se efectueaza transformari elementare si se obtine:

$$a^2x - 1 = x + a \ \Leftrightarrow\ a^2x - x = a + 1 \ \Leftrightarrow\ x(a^2 - 1) = a + 1.$$

Se aplica afirmatia 1 si se obtine:

1. daca $a^2 - 1 \neq 0$, adica $a \neq \pm 1$, $x = \frac{a+1}{a^2-1}$ sau $x = \frac{1}{a-1}$;

2. daca $a = 1$, ecuatia devine $0 \cdot x = 2$ si, prin urmare, nu are solutii;

3. daca $a = -1$, ecuatia devine $0 \cdot x = 0$ si, prin urmare, orice numar real este solutie a acestei ecuatii.

c) Ecuatia se scrie

$$(a-c)x = d-b,$$

de unde rezulta

1. daca $a - c \neq 0$, adica $a \neq c$, ecuatia are solutie unica
$$x = \frac{d-b}{a-c};$$

2. daca $a = c$ si $d - b \neq 0$, ecuatia devine $0 \cdot x = d - b (\neq 0)$ si prin urmare nu are solutii;

3. daca $a = c$ si $d = b$, ecuatia devine $0 \cdot x = 0$ si in asa caz orice numar real este solutie a ecuatiei din enunt.

d) Domeniul valorilor admisibile (concis DVA) al ecuatiei este $x \neq 4$. In DVA ecuatia se rezolva astfel:

$$\frac{x-2a}{x-4} = 0 \;\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2a = 0, \\ x \neq 4 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2a, \\ x \neq 4. \end{array} \right.$$

Asadar, daca $2a \neq 4$, adica $a \neq 2$ ecuatia are o singura solutie: $x = 2a$, iar daca $a = 2$, ecuatia nu are solutii.

e) DVA al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \{-1; 2\}$. Cum $(x-a)(2x+a) = 0$ implica $x_1 = a$ si $x_2 = -\dfrac{a}{2}$ si cum $x \neq -1$ si $x \neq 2$ se obtine:

1. daca $a \neq -1$, $a \neq 2$, $-\dfrac{a}{2} \neq -1$, $-\dfrac{a}{2} \neq 2$, adica $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 2; -4\}$, ecuatia are doua solutii: $x_1 = a$ si $x_2 = -\dfrac{a}{2}$ (se observa ca daca $a = 0$, solutiile coincid, in rest fiind distincte);

2. daca $a = -1$, ecuatia are o singura solutie $x = \dfrac{1}{2}$;

3. daca $a = 2$, ecuatia nu are solutii;

4. daca $a = -4$, ecuatia are o singura solutie $x = -4$.

f) Daca $a = 0$ sau $b = 0$ ecuatia nu are sens. Fie $a \cdot b \neq 0$. Atunci ecuatia este echivalenta cu ecuatia (se aduce la numitor comun)

$$x(b+a) = abc$$

de unde rezulta:

1. daca $b + a \neq 0$, adica $a \neq -b$, ecuatia are o solutie unica, $x = \dfrac{abc}{a+b}$;

2. daca $a=-b$ si $c\neq 0$, ecuatia nu are solutii;

3. daca $a=-b$ si $c=0$, orice numar real este solutie a ecuatiei date.

g) Solutiile ecuatiei urmeaza sa verifice restrictiile $\begin{cases} 5x-a\neq 0, \\ ax-1\neq 0, \end{cases}$ adica $x\neq \dfrac{a}{5}$ si, daca $a\neq 0$, $x\neq \dfrac{1}{a}$. Daca $a=0$, ecuatia devine

$$\frac{2}{5x}=\frac{3}{-1}, \text{ sau } -2=15x,$$

de unde $x=-\dfrac{2}{15}$ si cum $-\dfrac{2}{15}\neq \dfrac{0}{5}$, rezulta ca daca $a=0$ ecuatia are solutia $x=-\dfrac{2}{15}$.

Fie $a\neq 0$. Atunci in DVA ecuatia se scrie

$$2(ax-1)=3(5x-a),$$

de unde

$$(2a-15)x=2-3a$$

si

1. daca $2a-15\neq 0$, adica $a\neq \dfrac{15}{2}$, se obtine $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$;

2. daca $2a-15=0$, adica $a=\dfrac{15}{2}$, ecuatia devine $0\cdot x=-\dfrac{41}{2}$ si prin urmare nu are solutii.

Asadar, pentru $a\in \mathbf{R}\setminus\left\{0;\dfrac{15}{2}\right\}$ urmeaza de verificat restrictiile $x\neq \dfrac{a}{5}$ si $x\neq \dfrac{1}{a}$:

$$x\neq \frac{a}{5} \;\Rightarrow\; \frac{2-3a}{2a-15}\neq \frac{a}{5} \text{ sau } (2a-15)a\neq 5(2-3a)$$

de unde $2a^2\neq 10$ sau $a\neq \pm\sqrt{5}$. Astfel, pentru $a=\pm\sqrt{5}$ ecuatia din enunt nu are solutii. Pentru a doua restrictie se obtine

$$x\neq \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \frac{2-3a}{2a-15}\neq \frac{1}{a} \text{ sau } a(2-3a)\neq (2a-15),$$

de unde $3a^2=15$, adica $a^2\neq 5$, caz deja cercetat.

Asadar, daca $a\in\left\{\frac{15}{2};\pm\sqrt{5}\right\}$ ecuatia nu are solutii, iar daca $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{15}{2};\pm\sqrt{5}\right\}$, ecuatia are o solutie unica

$$x=\frac{2-3a}{2a-15}$$

(se tine seama ca rezultatul obtinut pentru $a=0$ se contine in formula pentru x de mai sus).

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{array}{ll} a)\ |x-a|=2; & c)\ |x-a|+|x-2a|=a; \\ b)\ |x|+|x-a|=0; & d)\ |x-1|+|x-2|=a. \end{array}$$

Rezolvare. a) Se utilizeaza proprietatile modulului si se obtine:

$$|x-a| = 2 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-a=2, \\ x-a=-2, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=a+2, \\ x=a-2. \end{array}\right.$$

Asadar, pentru orice a real ecuatia are doua solutii distincte: $x_1 = a+2$ si $x_2 = a-2$.

b) Cum membrul din stanga ecuatiei este nenegativ (ca suma a doi termeni nenegativi), iar membrul din dreapta este egal cu zero, rezulta sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} x=0, \\ x-a=0, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left\{\begin{array}{l} x=0, \\ x=a. \end{array}\right.$$

Prin urmare, daca $a = 0$, sistemul (deci si ecuatia din enunt) are solutie unica: $x = 0$; iar daca $a \neq 0$ sistemul (si ecuatia enuntata) nu are solutii.

c) Cum $|f(x)| = |-f(x)|$ ecuatia se scrie

$$|x-a| + |2a-x| = a.$$

Se observa ca daca $a < 0$, ecuatia nu are solutii, iar daca a=0 se obtine $|x| = 0$ cu $x = 0$.

Fie $a > 0$. Atunci $a = |a| = |(2a-x)+(x-a)|$ si ecuatia devine

$$|x-a| + |2a-x| = |(2a-x)+(x-a)|$$

echivalenta (a se vedea proprietatile modulului) cu inecuatia

$$(2a-x)(x-a) \geq 0$$

Se tine seama ca $0 < a < 2a$ si se obtin solutiile $x \in [a; 2a]$.

Asadar

pentru $a < 0$, ecuatia nu are solutii;

pentru $a = 0$, ecuatia are o singura solutie, $x = 0$;

pentru $a > 0$, ecuatia are o infinitate de solutii si anume

$$a \leq x \leq 2a.$$

d) Evident, ecuatia are solutii numai pentru $a > 0$. Consideram trei cazuri.

1. fie $x < 1$. Atunci $|x-1| = -(x-1)$, $|x-2| = -(x-2)$ si ecuatia devine

$$-x+1-x+2 = a \;\text{ sau }\; -2x = a-3$$

de unde $x = \dfrac{3-a}{2}$. Cum $x < 1$, rezulta inecuatia

$$\frac{3-a}{2} < 1$$

de unde $a > 1$. Asadar pentru $a > 1$, $x = \dfrac{3-a}{2}$;

2. fie $x \in [1;2]$. Atunci $|x-1| = x-1,\ |x-2| = -(x-2)$ si ecuatia devine

$$x - 1 - x + 2 = a, \quad 0 \cdot x = a - 1.$$

Se tine seama de afirmatia 1 si se obtine:

daca $a = 1$, orice numar din segmentul [1;2] este solutie a ecuatiei din enunt,

daca $a \neq 1$, solutii nu sunt;

3. fie $x > 2$. Atunci $|x-1| = x-1,\ |x-2| = x-2$ si ecuatia devine

$$x - 1 + x - 2 = a$$

de unde $x = \dfrac{a+3}{2}$. Cum $x > 2$ rezulta $\dfrac{a+3}{2} > 2$, adica $a > 1$.

Asadar:

pentru $a > 1$ ecuatia are doua solutii distincte

$$x_1 = \frac{3-a}{2} \quad \text{si} \quad x_2 = \frac{a+3}{2}$$

pentru $a = 1$ orice numar din [1;2] este solutie a ecuatiei

pentru $a < 1$ ecuatia nu are solutii.

Inecuatii liniare

Inecuatiile de forma

$$ax + b > 0,\ ax + b \geq 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \leq 0, \tag{2}$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$, x - variabila se numesc inecuatii liniare (de gradul intai).

Cum toate inecuatiile (2) se rezolva similar, vom aduce numai rezolvarea primei din ele: $ax + b > 0$. Se disting urmatoarele cazuri:

1. $a > 0$, atunci
$$ax + b > 0 \ \Leftrightarrow\ ax > -b \ \Leftrightarrow\ x > -\frac{b}{a}$$
si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei $ax + b > 0$ $(a > 0)$ este multimea $(-\frac{b}{a}; +\infty)$;

2. $a < 0$, atunci
$$ax + b > 0 \ \Leftrightarrow\ ax > -b \ \Leftrightarrow\ x < -\frac{b}{a}$$
si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei $ax + b > 0$ $(a < 0)$ este multimea $(-\infty; -\frac{b}{a})$;

3. $a = 0$, atunci inecuatia devine $0 \cdot x + b > 0$ si pentru $b > 0$ orice numar real este solutie a acestei inecuatii, iar pentru $b \leq 0$ inecuatia nu are solutii.

In continuare vom analiza cateva exemple.

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatiile

$$\begin{array}{ll} a)\ 3x+6>0; & c)\ 2(x+1)+x<3x+1; \\ b)\ -2x+3\geq 0; & d)\ 3x+2\geq 3(x-1)+1. \end{array}$$

Rezolvare. a) $3x+6>0 \ \Leftrightarrow\ 3x>-6 \ \Leftrightarrow\ x>-2$ si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei enuntate este $(-2;+\infty)$.

b) $-2x+3\geq 0 \ \Leftrightarrow\ -2x\geq -3 \ \Leftrightarrow\ x\leq \dfrac{3}{2}$, adica multimea solutiilor inecuatiei initiale este $(-\infty;\frac{3}{2}]$.

c) Se efectueaza operatiile si se reduce la o inecuatie liniara:

$$2(x+1)+x<3x+1 \ \Leftrightarrow\ 2x+2+x<3x+1 \ \Leftrightarrow\ 0\cdot x+1<0.$$

Cum $1<0$ este o inegalitate falsa, inecuatia nu are solutii.

d) Se rezolva similar exemplului c) si se obtine:

$$3x+2\geq 3(x-1)+1 \ \Leftrightarrow\ 3x+2\geq 3x-3+1 \ \Leftrightarrow\ 0\cdot x+4\geq 0,$$

de unde rezulta ca orice numar real este solutie a inecuatiei enuntate.

Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiile

$$\begin{array}{l} a)\ ax\leq 1; \\ b)\ |x-2|>-(a-1)^2; \\ c)\ 3(4a-x)<2ax+3; \\ d)\ abx+b>ax+3; \\ e)\ \dfrac{3x+4}{a^2-1}-\dfrac{2x+1}{a-1}\leq \dfrac{x}{a+1}; \\ f)\ ax+b>cx+d; \\ g)\ x+\dfrac{b(2-x)}{2a}>\dfrac{a(x+2)}{2b}. \end{array}$$

Rezolvare. a) Se considera trei cazuri (in dependenta de semnul lui a) si se obtine:

1. daca $a>0$, $x\leq \dfrac{1}{a}$;
2. daca $a<0$, $x\geq \dfrac{1}{a}$;
3. daca $a=0$, inecuatia devine $0\cdot x\leq 1$ si prin urmare orice numar real este solutie a inecuatiei.

Asadar daca $a > 0,\ x \in (-\infty; \frac{1}{a}]$, daca $a < 0,\ x \in [\frac{1}{a}; +\infty)$ si daca $a = 0,\ x \in \mathbf{R}$.

b) Cum $|x-2| \geq 0$ pentru orice x real si $-(a-1)^2 \leq 0$ pentru orice valoare a parametrului a se obtine: daca $a = 1$, atunci orice x real, diferit de 2 este solutie a inecuatiei, iar daca $a \neq 1$, atunci orice numar real este solutie a inecuatiei. Astfel daca $a = 1,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, daca $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\},\ x \in \mathbf{R}$.

c) Se efectueaza operatiile si se obtine

$$3(4a - x) < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3x < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3 < 2ax + 3x \Leftrightarrow x(2a+3) > 3(4a-1).$$

In continuare se disting urmatoarele cazuri

1. daca $2a + 3 > 0$, adica $a > -\dfrac{3}{2}$
$$x(2a+3) > 3(4a-1) \ \Leftrightarrow\ x > \frac{3(4a-1)}{2a+3};$$
2. daca $2a + 3 < 0$, adica $a < -\dfrac{3}{2}$
$$x(2a+3) > 3(4a-1) \ \Leftrightarrow\ x < \frac{3(4a-1)}{2a+3};$$
3. daca $2a + 3 = 0$, adica $a = -\dfrac{3}{2}$ inecuatia devine
$$0 \cdot x > -21$$
si cum $0 > -21$ este o inegalitate justa, rezulta ca orice numar real este solutie a inecuatiei date.

Prin urmare
daca $a \in (-\frac{3}{2}; +\infty),\ x \in (\frac{3(4a-1)}{2a+3}; +\infty)$;
daca $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}),\ x \in (-\infty; \frac{3(4a-1)}{2a+3})$;
daca $a = -\dfrac{3}{2},\ x \in \mathbf{R}$.
d) $abx + b > ax + 3 \ \Leftrightarrow\ abx - ax > 3 - b \ \Leftrightarrow\ a(b-1) \cdot x > 3 - b$.
In continuare distingem urmatoarele cazuri

1. daca $a(b-1) > 0$, adica $a > 0$ si $b > 1$ sau $a < 0$ si $b < 1$
$$x > \frac{3-b}{a(b-1)}$$
2. daca $a(b-1) < 0$, adica $a > 0$ si $b < 1$ sau $a < 0$ si $b > 1$
$$x < \frac{3-b}{a(b-1)}$$

3. daca $a = 0,\ b \neq 1$ inecuatia devine

$$0 \cdot x > 3 - b$$

si pentru $b > 3$ are solutie orice numar real, iar pentru $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3]$ nu are solutii

4. daca $a \neq 0,\ b = 1$, inecuatia devine

$$0 \cdot x > 2$$

si, evident, nu are solutii.

Asadar:
daca $a > 0$ si $b > 1$ sau $a < 0$ si $b < 1$, $x \in (\frac{3-b}{a(b-1)}; +\infty)$;
daca $a > 0$ si $b < 1$ sau $a < 0$ si $b > 1$, $x \in (-\infty; \frac{3-b}{a(b-1)})$;
daca $a = 0$ si $b \in (3; +\infty),\ x \in \mathbf{R}$;
daca $a = 0$ si $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$ sau $a \neq 0$ si $b = 1$ inecuatia nu are solutii.

e) Se observa ca $a \neq \pm 1$, in caz contrar inecuatia nu are sens. Se aduce la numitor comun si se obtine

$$\frac{3x+4}{a^2-1} - \frac{2x+1}{a-1} \leq \frac{x}{a+1} \Leftrightarrow \frac{3x+4-(2x+1)(a+1)-x(a-1)}{(a-1)(a+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(2-3a)+3-a}{(a-1)(a+1)} \leq 0.$$

In continuare distingem urmatoarele cazuri:

1. fie $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, atunci $(a-1)(a+1) > 0$ si, cum o fractie este negativa cand numaratorul si numitorul sunt de semne contrare, urmeaza a fi rezolvara inecuatia

$$x(2-3a) + 3 - a \leq 0, \text{ sau } x(2-3a) \leq a - 3,$$

de unde

$$\text{pentru } a > 1,\ x \geq \frac{a-3}{2-3a},$$
$$\text{pentru } a < -1,\ x \leq \frac{a-3}{2-3a}$$

2. fie $a \in (-1; 1)$, atunci $(a-1)(a+1) < 0$ si urmeaza a fi rezolvata inecuatia

$$x(2-3a) + 3 - a \geq 0 \text{ sau } x(2-3a) \geq a - 3.$$

Ultima inecuatie se rezolva astfel
daca $a = \dfrac{2}{3}$, orice numar real este solutie a inecuatiei;
daca $a \in (\frac{2}{3}, 1),\ x \leq \frac{a-3}{2-3a}$;
daca $a \in (-1; \frac{2}{3}),\ x \geq \frac{a-3}{2-3a}$.

Prin urmare inecuatia initiala
pentru $a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{2}{3}; 1)$ are solutiile $x \in (-\infty; \frac{a-3}{2-3a}]$;
pentru $a \in (-1; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$ are solutiile $x \in [\frac{a-3}{2-3a}; +\infty)$;
pentru $a = \dfrac{2}{3}$, orice numar real este solutie a inecuatiei.

f) Inecuatia enuntata este echivalenta cu inecuatia

$$(a-c)x > d-b$$

de unde rezulta:

1. daca $a > c$, atunci $a-c>0$ si, prin urmare, $x > \dfrac{d-b}{a-c}$;
2. daca $a < c$, $x < \dfrac{d-b}{a-c}$;
3. daca $a = c$ si $d \geq b$, inecuatia nu are solutii;
4. daca $a = c$ si $d < b$, orice x real este solutie a inecuatiei.

g) Se observa ca $a \neq 0$ si $b \neq 0$. Se aduce la numitor comun si se obtine:

$$x + \frac{b(2-x)}{2a} > \frac{a(x+2)}{2b} \Leftrightarrow \frac{2abx + b^2(2-x) - a^2(x+2)}{2ab} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(b^2-a^2) - x(b-a)^2}{2ab} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2(b^2-a^2) - x(b-a)^2 > 0, \\ ab > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2(b^2-a^2) - x(b-a)^2 < 0, \\ ab < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(b-a)^2 < 2(b^2-a^2), \\ ab > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x(b-a)^2 > 2(b^2-a^2), \\ ab < 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{2(b+a)}{b-a}, \\ ab > 0, \\ a \neq b, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \emptyset, \\ a = b, \end{cases} \\ \begin{cases} x > \dfrac{2(b+a)}{b-a} \\ ab < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Asadar, daca a si b sunt de acelasi semn $(ab > 0)$ si $a \neq b$ multimea solutiilor inecuatiei este $(-\infty; \frac{2(b+a)}{b-a})$; daca a si b sunt de semne opuse $(ab < 0)$, multimea solutiilor este $(\frac{2(b+a)}{b-a}; +\infty)$, iar daca $a = b$ inecuatia nu are solutii.

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiile

$$a)\ |x+a| + |x-2a| < 4a; \qquad c)\ |x+2| > 2;$$
$$b)\ |x+a| < |a|x; \qquad d)\ |x-a| \leq a.$$

Rezolvare. a) Cum membrul din stanga inecuatiei este nenegativ, inecuatia pentru $a \leq 0$ solutii nu are. Se considera $a > 0$ si se considera urmatoarele cazuri

1. fie $x \in (-\infty; -a]$, atunci $|x+a| = -x-a$ si $|x-2a| = 2a-x$ si inecuatia devine

$$-x-a+2a-x < 4a, \quad \text{sau} \quad x > -\frac{3}{2}a.$$

   Cum $a > 0$ intersectia multimilor $(-\infty; -a]$ si $(-\frac{3a}{2}; +\infty)$, si prin urmare multimea solutiilor inecuatiei, este $(-\frac{3a}{2}; -a]$;

2. fie $x \in (-a; 2a]$. Atunci $|x+a| = x+a$, $|x-2a| = 2a-x$ si inecuatia devine

$$x+a+2a-x < 4a \quad \text{sau} \quad 3a < 4a$$

   si, cum $a > 0$, orice numar din intervalul $(-a; 2a]$ este solutie

3. fie $x \in (2a; +\infty)$, atunci $|x+a| = x+a$ si $|x-2a| = x-2a$ si ecuatia devine

$$x+a+x-2a < 4a \quad \text{sau} \quad x < \frac{5}{2}a.$$

   Se tine seama ca $x \geq 2a$ si se obtine $x \in (2a; \frac{5}{2}a)$.

Asadar pentru $a \leq 0$, inecuatia nu are solutii, iar pentru $a > 0$ multimea solutiilor inecuatiei date este $(-\frac{3}{2}a; -a] \cup (-a; 2a] \cup (2a; \frac{5}{2}a)$ sau $(-\frac{3}{2}a; \frac{5}{2}a)$.

b) Se observa ca inecuatia poate avea numai solutii pozitive. Pentru $x > 0$ inecuatia se scrie $|x+a| < |a| \cdot |x|$ si se rezolva utilizand proprietatile modulului

$$|x+a| < |a| \cdot |x| \;\Leftrightarrow\; |x+a| < |ax| \;\Leftrightarrow\; (x+a+ax)(x+a-ax) < 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; [(a+1)x+a][(1-a)x+a] < 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+1)x+a > 0, \\ (1-a)x+a < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (a+1)x+a < 0, \\ (1-a)x+a > 0, \end{cases} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+1)x > -a, \\ (1-a)x < -a, \end{cases} \\ \begin{cases} (a+1)x < -a, \\ (1-a)x > -a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Daca $a > 1$, atunci $a-1 > 0$ si $a+1 > 0$ si primul sistem al totalitatii devine

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{a+1} < x, \\ -\dfrac{a}{1-a} < x, \end{cases}$$

de unde (se tine seama ca $x > 0$) rezulta

$$x > \frac{a}{a-1},$$

iar al doilea sistem devine

$$\begin{cases} x < -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}, \end{cases}$$

si cum $a > 1$ implica $-\dfrac{a}{a+1} < 0$, iar $x > 0$, sistemul nu are solutii.

Daca $a = 1$ primul sistem nu are solutii, iar din al doilea rezulta $x < -\dfrac{1}{2}$ si cum $x > 0$ si in acest caz inecuatia nu are solutii.

Daca $-1 < a < 1$, rezulta $a + 1 > 0$ si $1 - a > 0$ si primul sistem devine

$$\begin{cases} x > -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}, \end{cases} \quad \text{sau} \quad -\frac{a}{a+1} < x < \frac{a}{a-1}$$

de unde tinand seama ca

$$-\frac{a}{a+1} < \frac{a}{a-1} \;\Rightarrow\; -a^2 > a^2$$

se obtine ca primul sistem este incompatibil. Din al doilea sistem se obtine

$$\frac{a}{a-1} < x < \frac{-a}{a+1}$$

de unde tinand seama ca $x > 0$, rezulta sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+1} \geq 0, \\ \dfrac{a}{a-1} < \dfrac{-a}{a+1}, \end{cases}$$

ce se verifica pentru $a < 0$. Asadar pentru $a \in [0; 1)$ inecuatia nu are solutii, iar pentru $a \in (-1; 0)$ solutiile inecuatiei formeaza multimea $(\frac{a}{a-1}; -\frac{a}{a+1})$.

Daca $a = -1$ primul sistem nu are solutii, iar din al doilea se obtine $x > \frac{1}{2}$.

Daca $a < -1$, atunci $a + 1 < 0$ si $1 - a > 0$ si din primul sistem rezulta

$$\begin{cases} x < -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}. \end{cases}$$

Cum $x > 0$ si $a < -1$ avem $-\dfrac{a}{a+1} < 0$ si prin urmare in acest caz inecuatia nu are solutii. Al doilea sistem al totalitatii devine

$$\begin{cases} x > -\dfrac{a}{a+1}, \\ x > -\dfrac{a}{1-a}, \end{cases}$$

si cum $x > 0$, ramane $x > \dfrac{a}{a-1}$.

Asadar

daca $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $x \in (\frac{a}{a-1}; +\infty)$;

daca $a \in [0; 1]$, inecuatia nu are solutii;

daca $a = -1$, $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$.

c) Se utilizeaza proprietatile modulului si se obtine

$$|x+a|>2 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x+a>2, \\ x+a<-2, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>2-a, \\ x<-a-2. \end{array}\right.$$

d) Daca $a<0$ inecuatia nu are solutii (membrul) din stanga este nenegativ). Daca $a=0$ inecuatia are o solutie unica: $x=0$. Daca $a>0$,

$$|x-a|\le a \;\Leftrightarrow\; -a\le x-a\le a \;\Leftrightarrow\; 0\le x\le 2a.$$