

Ecuatii logaritmice.

Ecuatia ce contine necunoscuta sub semnul logaritmului sau (si) in baza lui se numeste **ecuatie logaritmica**.

Cea mai simpla ecuatie logaritmica este ecuatia de tipul

$$\log_a x = b. \quad (1)$$

Afirmatia 1. Daca $a > 0$, $a \neq 1$, ecuatia (1) pentru orice numar real b are o solutie unica, $x = a^b$.

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a) \log_2 x = 3, \quad b) \log_3 x = -1, \quad c) \log_{\frac{1}{3}} x = 0.$$

Rezolvare. Se utilizeaza afirmatia 1 si se obtine

$$a) x = 2^3 \text{ sau } x = 8; \quad b) x = 3^{-1} \text{ sau } x = \frac{1}{3}; \quad c) x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \text{ sau } x = 1.$$

In continuare vom utiliza frecvent urmatoarele proprietati ale logaritmului:

P1. Identitatea logaritmica de baza

$$a^{\log_a b} = b,$$

unde $a > 0$, $a \neq 1$ si $b > 0$.

P2. Logaritmul unui produs de factori pozitivi este egal cu suma logaritmilor factorilor:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2 \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 > 0, N_2 > 0).$$

Nota. Daca $N_1 \cdot N_2 > 0$, atunci proprietatea **P2** se scrie

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 \cdot N_2 > 0).$$

P3. Logarimtul raportului a doua numere pozitive este egal cu diferenta logaritmilor deam-partitului si impartitorului:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2 \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 > 0, N_2 > 0).$$

Nota. Daca $\frac{N_1}{N_2} > 0$ (echivalent cu $N_1 N_2 > 0$) atunci proprietatea **P3** se scrie

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_a |N_2| \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 N_2 > 0).$$

P4. Logaritmul puterii unui numar pozitiv este egal cu produsul dintre exponentul puterii si logaritmul acestui numar

$$\log_a N^k = k \log_a N \quad (a > 0, a \neq 1, N > 0).$$

Nota. Daca k este par ($k=2s$) are loc urmatoarea formula

$$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N| \quad (a > 0, a \neq 1, N \neq 0).$$

P5. Formula de trecere de la o baza la alta:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, N > 0),$$

in caz particular $N = b$, se obtine

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1). \quad (2)$$

Din proprietatile de mai sus rezulta formulele

$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c} \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0), \quad (3)$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0), \quad (4)$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0) \quad (5)$$

si daca in (5) c este par ($c = 2n$) are loc relatia

$$\log_{a^{2n}} b = \frac{1}{2n} \log_{|a|} b \quad (b > 0, a \neq 0, |a| \neq 1). \quad (6)$$

Vom enumera si proprietatile de baza ale functiei logaritmice $f(x) = \log_a x$:

1. Domeniul de definitie al functiei logaritmice este multimea numerelor reale pozitive.
2. Domeniul de valori al functiei logaritmice este multimea numerelor reale.
3. Pentru $a > 1$ functia logaritmica este strict crescatoare ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$), iar pentru $0 < a < 1$, este strict descrescatoare ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$).
4. $\log_a 1 = 0$ si $\log_a a = 1$ ($a > 0, a \neq 1$).
5. Daca $a > 1$ atunci functia logaritmica primește valori negative pentru $x \in (0; 1)$ si valori pozitive pentru $x \in (1; +\infty)$, iar daca $0 < a < 1$, functia logaritmica ia valori pozitive pentru $x \in (0; 1)$ si valori negative pentru $x \in (1; +\infty)$.
6. Daca $a > 1$ functia logaritmica este concava, iar pentru $a \in (0; 1)$ functia logaritmica este convexa.

Urmatoarele afirmatii (a se vedea, [1]) sunt utile la rezolvarea ecuatiilor logaritmice:

Afirmatia 1. Ecuatia $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) este echivalenta cu unul din sistemele (evident, se alege acel sistem, inecuatia caruia se rezolva mai simplu)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

⁰ Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician <http://math.ournet.md>

Afirmatia 2. Ecuatia $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu unul din sistemele

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Tinem sa mentionam ca in procesul rezolvarii ecuatiilor logaritmice adesea se aplica transformari ce modifica domeniul de valori admisibile (*DVA*) al ecuatiei initiale. Prin urmare pot aparea solutii "straine" sau pot fi pierdute unele solutii. De exemplu ecuatiile

$$f(x) = g(x) \text{ si } \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

sau

$$\log_a [f(x) \cdot g(x)] = b \text{ si } \log_a f(x) + \log_a g(x) = b$$

in general nu sunt echivalente (*DVA* al ecuatiilor din dreapta este mai ingust).

Prin urmare la rezolvarea ecuatiilor logaritmice este util de folosit in *DVA* transformari echivalente. In caz contrar verificarea solutiilor este parte componenta a rezolvarii. In plus, se tine seama de transformarile ce pot aduce la pierderea solutiilor.

In continuare vom considera cele mai frecvente metode de rezolvare a ecuatiilor logaritmice.

I. Utilizarea definitiei logaritmului

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile:

$$\begin{array}{ll} a) \log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3, & c) \log_{(x-2)} 9 = 2, \\ b) \log_3 \frac{x-3}{x+3} = 1, & d) \log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2. \end{array}$$

Rezolvare. a) Logaritm a numarului pozitiv b in baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) se numeste exponentul puterii, la care trebuie ridicat a ca sa obtinem b . Asadar $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ si, prin urmare,

$$5 + 3\log_2(x - 3) = 2^3$$

sau

$$3\log_2(x - 3) = 8 - 5, \quad \log_2(x - 3) = 1.$$

Iar utilizand definitia, se obtine

$$x - 3 = 2^1, \quad x = 5.$$

Verificarea este parte componenta a rezolvarii acestei ecuatii:

$$\log_2(5 + 3\log_2(5 - 3)) = \log_2(5 + 3\log_2 2) = \log_2(5 + 3) = \log_2 8 = 3.$$

Se obtine $3 = 3$ si prin urmare $x = 5$ este solutie a acestei ecuatii.

⁰ Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician <http://math.ournet.md>

b) Similar exemplului a) se obtine ecuatie

$$\frac{x-3}{x+3} = 3.$$

Se reduce la rezolvarea ecuatiei liniare $x - 3 = 3(x + 3)$ de unde rezulta $x = -6$. Se efectueaza verificarea si se obtine ca $x = -6$ este solutia ecuatiei initiale.

c) Similar exemplului a) se obtine ecuatie

$$(x-2)^2 = 9.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatie patrata $x^2 - 4x - 5 = 0$ cu solutiile $x_1 = -1$ si $x_2 = 5$. Dupa verificare ramane doar $x = 5$.

d) Se aplica definitia logaritmului si se obtine ecuatie

$$(2x^2 - 8x + 15) = (2x + 1)^2$$

sau, dupa transformari elementare,

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

de unde $x_1 = -7$ si $x_2 = 1$. Dupa verificare ramane $x = 1$.

II. Utilizarea proprietatilor logaritmului

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

a) $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24),$

b) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2},$

c) $\log_2 x + \log_3 x = 1,$

d) $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0,$

e) $16^{\log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5.$

Rezolvare. a) DVA al ecuatiei $x \in (0; +\infty)$ se determina rezolvand sistemul (conditia de existenta a logaritmilor ce sunt prezenti in ecuatie)

$$\begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+24 > 0. \end{cases}$$

Se aplica proprietatea **P2** si afirmatia 1 si se obtine

$$\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x(x+3) = \log_3(x+24), \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3) = x+24, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = -6, \\ x_2 = 4, \\ x > 0, \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow x = 4. \end{cases}$$

b) Se utilizeaza proprietatea **P3** si se obtine o consecinta a ecuatiei initiale

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2},$$

apoi, conform definitiei logaritmice, se obtine ecuatie algebrica

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

sau

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5),$$

de unde

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

si $x_1 = -1$ si $x = 3$. Dupa verificare ramane $x = -1$.

c) *DVA* : $x \in (0; +\infty)$. Se utilizeaza proprietatea **P5** si se obtine ecuatie

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1$$

sau $\log_2 x \left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right) = 1$, $\log_2 x(1 + \log_3 2) = 1$, de unde $\log_2 x = \frac{1}{1 + \log_3 2}$ sau $\log_2 x = \frac{1}{\log_3 6}$, sau $\log_2 x = \log_6 3$. Asadar, $x = 2^{\log_6 3}$.

d) *DVA* al ecuatiei se obtine rezolvand sistemul $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ (x - 4)^2 \neq 0, \end{cases}$ si este $x \in (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

Se aplica proprietatea **P4** (se tine seama de nota la ea si se obtine ecuatie echivalenta

$$2\log_3(x - 2) + 2\log_3|x - 4| = 0$$

sau $\log_3(x - 2) + \log_3|x - 4| = 0$

Se utilizeaza proprietatea **P2** si pe *DVA* se obtine ecuatie echivalenta

$$\log_3(x - 2)|x - 4| = 0 \quad (x - 2)|x - 4| = 1.$$

Cum in *DVA* $x - 2 = |x - 2|$ ecuatie se scrie

$$|x - 2||x - 4| = 1 \quad \text{sau} \quad |x^2 - 6x + 8| = 1$$

ultima ecuatie fiind echivalenta (a se vedea proprietatile modului) cu totalitatea de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 1, \\ x^2 - 6x + 8 = -1, \end{cases}$$

de unde, rezolvand ecuatiile patrate, se obtine $x_1 = 3$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$ si $x_3 = 3 - \sqrt{2} \notin DVA$. Asadar solutiile ecuatiei initiale sunt $x_1 = 3$ si $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.

e) Cum

$$16^{\log_4(1-2x)} = 4^{2\log_4(1-2x)} = \left[4^{\log_4(1-2x)}\right]^2$$

se aplica proprietatea **P1** si se obtine ca in DVA ($x \in (-\infty; -1)$) ecuatia este echivalenta cu

$$(1 - 2x)^2 = 5x^2 - 5$$

sau

$$x^2 + 4x - 6 = 0,$$

de unde rezulta $x_1 = -2 - \sqrt{10}$ si $x_2 = -2 + \sqrt{10}$. Ultima valoare a lui x nu intra in DVA , ramane unica solutie $x = -2 - \sqrt{10}$.

III. Metoda substitutiei

In unele cazuri ecuatia logaritmica poate fi reduca la o ecuatie algebrica relativ la o necunoscuta noua. De exemplu, ecuatia $F(\log_a x) = 0$, unde $F(x)$ este o functie algebrica rationala, prin intermediul substitutiei $\log_a x = t$ se reduce la o ecuatie algebrica in raport cu t , $R(t) = 0$.

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile:

$$\begin{array}{ll} a) \lg^2 x - 3 \lg x + 2 = 0, & c) \lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14, \\ b) \log_2^2(x-1)^2 - 3 \log_2(x-1) - 1 = 0, & d) 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}. \end{array}$$

Rezolvare. a) DVA al ecuatiei este $x \in (0; +\infty)$. Se noteaza $\lg x = t$, atunci $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

cu solutiile $t_1 = 1$ si $t_2 = 2$. Se revine la necunoscuta initiala si se rezolva totalitatea de ecuatii logaritmice

$$\begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{cases}$$

de unde $x_1 = 10$ si $x_2 = 100$. Ambele solutii sunt din DVA .

b) DVA al ecuatiei este multimea $(1; +\infty)$. Cum $\log_2^2(x-1)^2 = [\log_2(x-1)]^2 = (2 \log_2 |x-1|)^2 = (2 \log_2(x-1))^2 = 4[\log_2(x-1)]^2$, prin substitutia $t = \log_2(x-1)$ se obtine ecuatia patrata

$$4t^2 - 3t - 1 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -\frac{1}{4}$ si $t_2 = 1$. Se revine la necunoscuta initiala si se obtine:

$$\begin{cases} \log_2(x-1) = -\frac{1}{4}, \\ \log_2(x-1) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2^{-\frac{1}{4}}, \\ x-1 = 2^1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \\ x = 3. \end{cases}$$

c) DVA al ecuatiei este multimea $(0; +\infty)$. Cum

$$\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + \lg x)^2 = (2 + \lg x)^2,$$

$$\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2,$$

cu ajutorul substitutiei $t = \lg x$ ecuatia se reduce la ecuatia patrata

$$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 + t = 14$$

sau

$$2t^2 + 7t - 9 = 0$$

cu solutie $t_1 = -\frac{9}{2}$ si $t_2 = 1$. Se revine la variabila initiala si se obtine $x_1 = 10^{-\frac{9}{2}}$ si $x_2 = 10$.

d) *DVA* al ecuatiei este $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Cum $x^{\lg 5} = x^{\frac{\lg x \cdot 5}{\lg x \cdot 10}} = (x^{\lg x \cdot 5})^{\frac{1}{\lg x \cdot 10}} = 5^{\frac{1}{\lg x \cdot 10}} = 5^{\lg x}$, ecuatia devine $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ sau $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, de unde $5^{\lg x} = 25$ sau $5^{\lg x} = 5^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

IV. Ecuatii ce contin expresii de tipul $f(x)^{\log_a g(x)}$

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a) (x + 2)^{\log_2(x+2)} = 4(x + 2), \quad b) 5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10.$$

Rezolvare. a) *DVA* al ecuatiei se determina din sistemul $\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1, \end{cases}$ si se obtine $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. In *DVA* ambii membri ai ecuatiei sunt pozitivi, prin urmare, logaritmand ambii membri ai ecuatiei, de exemplu in baza 2, se obtine ecuatia echivalenta

$$\log_2(x + 2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4 \cdot (x + 2))$$

sau, utilizand proprietatile **P4** si **P2**,

$$\log_2(x + 2) \cdot \log_2(x + 2) = \log_2 4 + \log_2(x + 2).$$

Se noteaza $\log_2(x + 2) = t$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - t - 2 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -1$ si $t_2 = 2$. Asadar,

$$\begin{cases} \log_2(x + 2) = -1, \\ \log_2(x + 2) = 2, \end{cases}$$

de unde $\begin{cases} x + 2 = \frac{1}{2}, \\ x + 2 = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ x_2 = 2. \end{cases}$ Ambele solutii sunt din *DVA*.

b) *DVA* al ecuatiei $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Cum (a se vedea proprietatea **P5** si formula (2))

$$5^{\log_2 x} = 5^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2}} = (5^{\log_5 x})^{\frac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5},$$

ecuatia devine

$$x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10 \text{ sau } x^{\log_2 5} = 5.$$

Se logaritmeaza ambii membri ai ecuatiei in baza 2 si se obtine

$$\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5$$

sau $\log_2 x = 1$, de unde $x = 2$.

V. Unele metode speciale

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatiile

- a) $2^x = 9 - \log_3 x$;
- b) $x \log_3^2(x-1) + 4(x-1) \log_3(x-1) - 16 = 0$;
- c) $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 2x - x^2$;
- d) $\log_5(x+2) = 4 - x$;
- e) $\sqrt{\log_2(2x^2) \log_4(16x)} = \log_4 x^3$;
- f) $|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1|$;
- g) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \log_{x-1}(x+1) = 3$;
- h) $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

Rezolvare. a) Se observa ca $x = 3$ este solutie a acestei ecuatii: $2^3 = 9 - \log_3 3$, $8 = 9 - 1$, $8 = 8$. Alte solutii ecuatiei nu are. In adevar, membrul din stanga ecuatiei reprezinta o functie strict crescatoare, iar cel din dreapta - o functie strict descrescatoare si, prin urmare, graficele acestor functii pot avea cel mult un punct comun. Cum $x = 3$ este solutie, rezulta ca altele nu sunt.

b) *DVA* al ecuatiei $x \in (1; +\infty)$. Se noteaza $\log_3(x-1) = t$ si se obtine o ecuatie patrata in t

$$xt^2 + 4(x-1)t - 16 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuatii este $\Delta = [4(x-1)]^2 + 4x \cdot 16 = 16x^2 + 32x + 16 = 16(x+1)^2$, iar radacinile

$$t_1 = \frac{-4(x-1) - 4(x+1)}{2x} = -4 \quad \text{si} \quad t_2 = \frac{-4(x-1) + 4(x+1)}{2x} = \frac{4}{x}.$$

Astfel se obtine totalitatea

$$\begin{cases} \log_3(x-1) = -4, \\ \log_3(x-1) = \frac{4}{x}. \end{cases}$$

Din prima ecuatie a totalitatii rezulta $x_1 = 1\frac{1}{81}$, iar a doua se rezolva similar exemplului precedent: se observa ca $x = 4$ este solutie a ecuatiei si se arata ca altele nu sunt. In adevar, membrul din stanga ecuatiei $\log_3(x-1) = \frac{4}{x}$ reprezinta o functie strict crescatoare pe *DVA*, iar membrul din dreapta in *DVA* este o functie strict descrescatoare, si prin urmare, graficele lor pot avea cel mult un punct comun. Asadar ultima ecuatie are solutia unica $x = 4$, iar ecuatie initiala solutiile $x_1 = 1\frac{1}{81}$ si $x = 4$.

c) *DVA* al ecuatiei se determina din sistemul $\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ x > 0, \end{cases}$ de unde rezulta $x \in (0; +\infty)$.

Se aplica proprietatea **P3** si se obtine ecuatie echivalenta

$$\log_2 \frac{x^2 + 1}{x} = 2x - x^2.$$

Cum $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$ pentru $x > 0$ iar semnul egalitatii se obtine doar pentru $x = 1$, rezulta ca membrul din stanga, $\log_2 \frac{x^2+1}{x} \geq 1$. In același timp membrul din dreapta ecuatiei are valoarea maxima 1 pentru $x = 1$ (varful parabolei $y = 2x - x^2$ se afla in punctul (1;1)).

Astfel ecuatia are solutii numai in cazul cand
$$\begin{cases} \log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2, \\ 2x - x^2 = 2, \end{cases} \quad \text{adica } x = 1.$$

d) Se rezolva similar exemplului a) si se obtine $x = 3$.

e) Se utilizeaza teorema **A1** din **ecuatii irrationale** si se obtine

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_2(2x^2) \log_4(16x)} = \log_4 x^3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x^2) \log_4(16x) = (\log_4 x^3)^2, \\ \log_4 x^3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_4 16 + \log_4 x) = \left(\frac{3}{2} \log_2 x\right)^2, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2 \log_2 x)(2 + \frac{1}{2} \log_2 x) = \frac{9}{4} \log_2^2 x, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} \log_2^2 x - \frac{9}{2} \log_2 x - 2 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ 5t^2 - 18t - 8 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ \begin{bmatrix} t_1 = -\frac{2}{5}, \\ t_2 = 4, \end{bmatrix} \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ \log_2 x = 4, \end{bmatrix} \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \\ x = 16, \end{bmatrix} \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 16. \end{aligned}$$

f) Se utilizeaza proprietatea **P3**, **P2** si proprietatile modulului (a se vedea, de exemplu [2]) si se obtine

$$\begin{aligned} |\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1| &\Leftrightarrow \left| \log_2 \frac{3x-1}{3} \right| = \left| \log_2 \frac{5-2x}{2} \right| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} - \log_2 \frac{5-2x}{x} \right) \cdot \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} + \log_2 \frac{5-2x}{2} \right) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \log_2 \left(\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{2}{5-2x} \right) = 0, \\ \log_2 \left(\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{5-2x}{2} \right) = 0, \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 2(3x-1) = 3(5-2x), \\ (3x-1)(5-2x) = 6, \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x = \frac{17}{12}, \\ x = 1, x = \frac{11}{6}, \end{bmatrix} \\ \frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}, \end{cases} &\Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6} \right\}. \end{aligned}$$

g) Se determina *DVA* al ecuatiei

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^3-9x+8 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x^3-x-8x+8 > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ (x-1)(x^2+x-8) > 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x^2+x-8 > 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \\ x > \frac{-1+\sqrt{33}}{2}, \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{33}-1}{2}. \end{aligned}$$

Se aplica proprietatea **P5** si se obtine (pe *DVA*)

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8) \cdot \frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} = 3$$

sau

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8) = \log_{x+1}(x-1)^3,$$

de unde rezulta

$$(x-1)(x^2+x-8) = (x-1)^3,$$

sau

$$\begin{cases} x = 1, \\ x^2+x-8 = x^2-2x+1, \end{cases}$$

de unde $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Cum $x = 1$ nu verifica *DVA* si $3 > \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ ramane numai $x = 3$.

h) Cum functia $f(x) = 6x - x^2 - 5$ isi atinge maximul 4 pentru $x = 3$, rezulta

$$\log_2(6x - x^2 - 5) \leq 2.$$

Membrul din dreapta ecuatiei $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2$ si, prin urmare 2 este valoarea minima (se atinge pentru $x = 3$). Astfel ecuatia are solutii doar cand concomitent $\log_2(6x - x^2 - 5) = 2$ si $x^2 - 6x + 11 = 2$ adica $x = 3$.

Inecuatii logaritmice.

Inecuatia ce contine necunoscuta sub semnul logaritmului se numeste **logaritmica**.

In procesul rezolvarii inecuatilor logaritmice se aplica frecvent urmatoarele afirmatii referitor echivalenta ecuatiilor si se tine seama de proprietatea de monotonie a functiei logaritmice (a se vedea de exemplu [1]).

Afirmatia 1. Daca $a > 1$, inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Afirmatia 2. Daca $0 < a < 1$, inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Afirmatia 3. Inecuatia $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu totalitatea sistemelor de inecuatii:

$$\left[\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \\ 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \right.$$

Mentionam, ca in inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ in locul semnului $>$ poate sa figureze unul din semnele $\geq$, $<$, $\leq$. In asa caz afirmatiile 1-3 se modifica respectiv.

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatile

$$\begin{aligned} a) \log_3(x^2 - x) &\geq \log_3(x + 8); & d) \log_{\frac{x+2}{x-3}}(5 - x) &> \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4 - x); \\ b) \log_{0,2}(5 - x) &> \log_{0,2} \frac{2}{x - 2}; & e) \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) &< 1. \\ c) \log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) &> 0; \end{aligned}$$

Rezolvare. a) Se aplica afirmatia 1 si se obtine

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - x) &\geq \log_3(x + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq x + 8, \\ x + 8 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 4, \end{cases} \\ x > -8, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty). \end{aligned}$$

b) Baza logaritmului din inecuatie este un numar intre zero si unu, se aplica afirmatia 2 si se obtine

$$\begin{aligned} \log_{0,2}(5 - x) &> \log_{0,2} \frac{2}{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x < \frac{2}{x - 2}, \\ 5 - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5 - x)(x - 2) - 2}{x - 2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x - x^2 - 12}{x - 2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-3)(x-4)}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x > 4, \end{cases} \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 4 < x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 3) \cup (4; 5).$$

c) Se scrie $0 = \log_2 1$ si se aplica afirmatia 1

$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > \log_2 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > 1.$$

Se scrie $1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ si se aplica afirmatia 2 si se rezolva sistemul obtinut

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8 x < \frac{1}{3}, \\ \log_8 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 8^{\frac{1}{3}}, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

d) Se aplica afirmatia 3 si se obtine

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \frac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x < 4-x, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (3; 4), \\ x \in \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; 4).$$

Rezolvarea primului sistem al totalitatii

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x, \\ 4-x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-3} - 1 > 0, \\ 5 > 4, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x-3} > 0, \\ x \in \mathbf{R}, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Rezolvarea ultimului sistem al totalitatii

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+2}{x-3}, \\ \frac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x, \\ 5-x < 4-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ x > 3, \end{cases} \\ \frac{5}{x-3} < 0, \\ x < 5, \\ 5 < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -2, \\ x > 3, \end{cases} \\ x < 3, \\ x < 5, \\ x \in \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

e) Se scrie $1 = \log_{2x} 2x$, se aplica afirmatia 3 si se tine seama ca semnul $>$ este inlocuit cu $<$.

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x} 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \\ 2x > 0, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1; 2) \cup (3; 6), \\ x \in (0; \frac{1}{2}), \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (1; 2) \cup (3; 6).$$

Rezolvarea primului sistem al totalitatii

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \begin{cases} x < 2, \\ x > 3, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ 1 < x < 6, \\ \begin{cases} x < 2, \\ x > 3, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (3; 6).$$

Rezolvarea ultimului sistem al totalitatii

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 6, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{2}).$$

Inecuatia de tipul $F(\log_a x) > 0$, se reduce prin intermediul substitutiei $t = \log_a x$ la inecuatia algebrica $F(t) > 0$. Se rezolva inecuatia $F(t) > 0$, iar apoi se rezolva ecuatiile logaritmice simple ce se obtin. Bineanteles aceeasi se refera si la inecuatii similare ce se obtin din cea precedenta, inlocuind in locul semnului $>$ unul din semnele $<$, $\leq$, $\geq$.

Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiiile

$$a) \log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0;$$

$$b) \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1.$$

Rezolvare. a) Se noteaza $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ si se rezolva inecuatia patrata $t^2 + t - 2 \geq 0$, de unde rezulta $t \leq -2$ sau $t \geq 1$. Asadar se obtine totalitatea, ce se rezolva astfel:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 0 < x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{2}] \cup [4; +\infty).$$

b) Se noteaza $t = \lg x$ si se obtine inecuatia rationala

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1$$

ce se rezolva utilizand metoda intervalelor (a se vedea de exemplu [1], [2])

$$\begin{aligned} \frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1 &\Leftrightarrow \frac{1 + t + 2(5 - t) - (5 - t)(1 + t)}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 6}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 2)(t - 3)}{(5 - t)(t + 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ 2 < t < 3, \\ t > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Se revine la variabila initiala si se obtine

$$\begin{cases} \lg x < -1, \\ 2 < \lg x < 3, \\ \lg x > 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{10}, \\ 100 < x < 1000, \\ x > 10^5, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{10}) \cup (100; 1000) \cup (10^5; +\infty).$$

In cazul inecuatilor logaritmice ce nu au forma celor din afirmatiile 1-3, se determina *DVA* si prin transformari ce pastreaza echivalenta se reduc la inecuatii ce se rezolva cu ajutorul echivalentelor 1-3.

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiiile

$$\begin{array}{ll} a) \lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4; & c) \frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2}; \\ b) \log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leq \frac{5}{2}; & d) \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}. \end{array}$$

Rezolvare. a) *DVA* al inecuatiei este multimea $(5; +\infty)$. Se aplica proprietatea **P2** si se obtine inecuata

$$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4.$$

Se utilizeaza afirmatia 1 si se obtine sistemul

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) < 4, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Se rezolva sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \begin{cases} x < 2, \\ x > 5, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 6, \\ \begin{cases} x < 2, \\ x > 5, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (5; 6).$$

Se tine seama de *DVA* si ramane $x \in (5; 6)$.

b) *DVA* al inecuatiei se determina din sistemul

$$\begin{cases} 3x > 0, \\ 9x > 0, \\ 9x \neq 1, \\ 3x^2 > 0, \\ 3x^2 \neq 1, \\ 9x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \frac{1}{9}, \\ x \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty).$$

Se trec toti logaritmi in baza 3

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x} + \frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Se aplica proprietatea **P2** si se obtine

$$\frac{1 + \log_3 x}{2 + \log_3 x} + \frac{2 + 2 \log_3 x}{1 + 2 \log_3 x} \leq \frac{5}{2}.$$

Se noteaza $\log_3 x = t$ si se rezolva ecuatia rationala obtinuta prin metoda intervalelor.

$$\begin{aligned} \frac{1+t}{2+t} + \frac{2+2t}{1+2t} - \frac{5}{2} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{2(1+t)(1+2t) + 2(2+2t)(2+t) - 5(2+t)(1+2t)}{2(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 7t}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup [0; +\infty). \end{aligned}$$

Asadar, revenind la variabila initiala se obtine totalitatea de inecuatii logaritmice simple

$$\begin{cases} \log_3 x \leq -\frac{7}{2}, \\ -2 < \log_3 x < -\frac{1}{2}, \\ \log_3 x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3^7}}, \\ \frac{1}{9} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Se tine seama de *DVA* si se obtine multimea solutiilor inecuatiei initiale

$$x \in (0; \frac{1}{27\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty).$$

c) *DVA* al inecuatiei se obtine rezolvand sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{4x+5} - 1 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \geq -\frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

Cum $\log_2(\sqrt{4x+5} + 11) = \log_2(1 + (\sqrt{4x+5} + 10)) > \log_2 1 = 0$ inecuatia este echivalenta cu inecuatia

$$2\log_2(\sqrt{4x+5} - 1) > \log_2(\sqrt{4x+5} + 11)$$

de unde rezulta

$$(\sqrt{4x+5} - 1)^2 > \sqrt{4x+5} + 11.$$

Se efectueaza substitutia $t = \sqrt{4x+5}$, $t \geq 0$ si se obtine inecuatia patrata

$$(t-1)^2 > t+11,$$

sau

$$t^2 - 3t - 10 > 0,$$

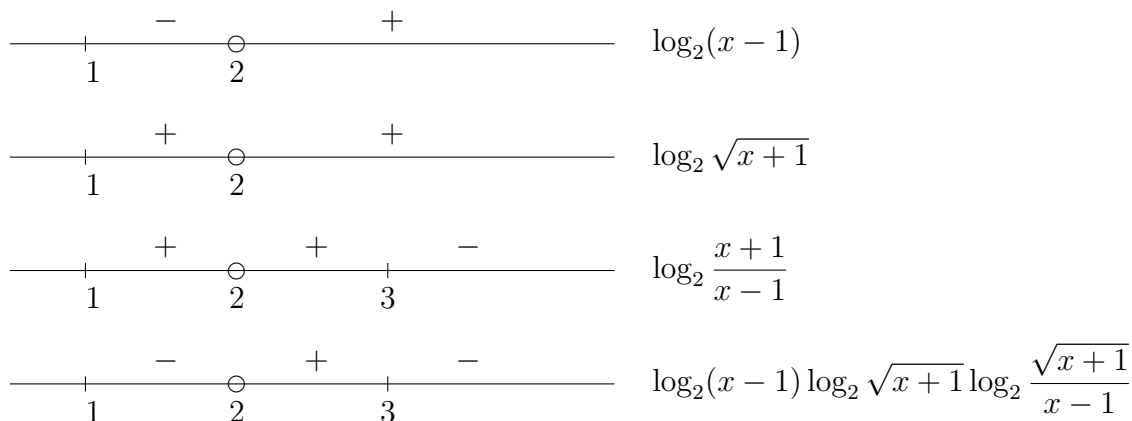
de unde $t < -2$ sau $t > 5$. Cum $t \geq 0$, ramane $t > 5$ sau $\sqrt{4x+5} > 5 \Leftrightarrow x > 5$.

Se tine seama de *DVA* si se obtine raspunsul $x \in (5; +\infty)$.

d) Se utilizeaza metoda intervalelor generalizata: (*DVA* $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}} &\Leftrightarrow \frac{\log_2 \sqrt{x+1} - \log_2(x-1)}{\log_2(x-1) \log_2 \sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1) \log_2 \sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \cdot \log_2(x-1) \log_2 \sqrt{x+1} < 0. \end{aligned}$$

Cum in DVA $\log_2(x-1) > 0$ pentru $x > 2$ si $\log_2(x-1) < 0$ pentru $1 < x < 2$,
 $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$ pentru orice x din DVA , $\log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} > 0$ pentru $x \in (1;2) \cup (2;3)$ si
 $\log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} < 0$ pentru $x > 3$



se obtine $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$.

Pentru consolidarea deprinderilor de rezolvare a ecuatiilor si inecuatilor logaritmice se recomanda a consulta de exemplu problemarele [3-5].

Bibliografie

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.
2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.
3. C.Cosnita, F.Turtoiu. Probleme de algebra. Editura Tehnica. Bucuresti, 1989.
4. E.D.Kulanin i dr. 3000 concursnih zadaci po matematiche. Airis Rolif. Moscova, 1997(rus.)
5. F.P. Iaremciuc, P. Rudcenco. Algebra i ălementarnĭe funcĭii. Kiev, Naucova Dumca, 1987. (rus.)