Inecuatii irationale.

Inecuatia ce contine necunoscuta sub semnul radicalului se numeste **inecuatie irationala**.

La rezolvarea inecuatiilor irationale, de regula, este necesar de a ridica la putere ambii membri ai ecuatiei. Astfel de transformari pot aduce la inecuatii neechivalente cu cea initiala si intrucat multimea solutiilor unei inecuatii reprezinta in majoritatea cazurilor o multime infinita, verificarea ei este dificila. Unica metoda ce garanteaza justetea raspunsului consta in faptul, ca in procesul rezolvarii inecuatiilor irationale urmeaza a fi efectuate numai astfel de transformari, ce pastreaza echivalenta lor. In legatura cu aceasta vom aduce afirmatiile respective, care sunt frecvent utilizate la rezolvarea inecuatiilor irationale (in toate afirmatiile n este un numar natural).

A1. Inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

este echivalenta cu totalitatea sistemelor de inecuatii

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Nota. Din afirmatia **A1** rezuta ca inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} > b,$$

pentru $b \geq 0$ este echivalenta cu inecuatia $f(x) > [b]^{2n}$, iar pentu $b < 0$, este echivalenta cu inecuatia $f(x) \geq 0$.

A2. Inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$$

este echivalenta cu sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases}$$

Nota. In particular, daca membrul din dreapta inecuatiei reprezinta un numar b $(g(x) = b)$, din afirmatia **A2** rezulta:

- daca $b > 0$, $\sqrt[2n]{f(x)} < b \;\Leftrightarrow\; 0 \leq f(x) < [b]^{2n}$

- daca $b \leq 0$, inecuatia $\sqrt[2n]{f(x)} < b$ nu are solutii.

A3. Inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$$

este echivalenta cu sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

A4. Inecuatia

$$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 1$$

este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n}, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

A5. Inecuatia

$$\frac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 1$$

este echivalenta cu totalitatea de sisteme de inecuatii

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$$

A6. Inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \geq 0$$

este echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

unde $D(g)$ desemneaza domeniul de definitie a functiei g.

A7. Inecuatia

$$\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) \leq 0$$

este echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

A8. Inecuatiile

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \quad \text{si} \quad f(x) < [g(x)]^{2n+1}$$

sunt echivalente.

A9. Inecuatiile

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \;\; \text{si} \;\; f(x) > [g(x)]^{2n+1}$$

sunt echivalente.

Nota. Daca m este impar, atunci

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^m < [g(x)]^m,$$
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^m > [g(x)]^m,$$

adica la ridicare la putere impara semnul inecuatiei se pastreaza.

Sa analizam cateva exemple.

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatiile:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ \sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3, & g)\ \sqrt{x^2-x-2} > \sqrt{6+5x-x^2}, \\
b)\ \sqrt{x^2-x-90} \geq -1, & h)\ \dfrac{\sqrt{2-x}}{1+x} > 1, \\
c)\ \sqrt[4]{x^2-9x+16} > 2, & i)\ \dfrac{\sqrt{x-3}}{3-|x-6|} < 1, \\
d)\ \sqrt{x^2+4x-5} < 2x+1, & j)\ (x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0, \\
e)\ \sqrt{x^2-5x+4} < 2, & k)\ \dfrac{9-x}{1-x}\sqrt{x^2-8x+7} \geq 0, \\
f)\ \sqrt{x^2-x-2} \leq -2, & l)\ \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} < x+1.
\end{array}
$$

Rezolvare. a) Se aplica afirmatia **A1** (in cazul dat $f(x) = x^2+3x-18$, iar $g(x) = 2x+3$) si se obtine:

$$\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2+3x-18 \geq 0, \\ 2x+3 < 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2+3x-18 > (2x+3)^2, \\ 2x+3 \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, -6], \\ x \in \emptyset, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -6].$$

In adevar, cum

$$x^2+3x-18 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (x+6)(x-3) \geq 0,$$

solutiile primei inecuatii formeaza multimea $x \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$, si cum $x \in (\infty, -\frac{3}{2})$ sunt solutiile celei de a doua inecuatie a sistemului, se obtine ca solutia primului sistem de inecuatii este multimea $x \in (-\infty, -6]$.

Prima inecuatie a sistemului al doilea din totalitate nu are solutii:

$$x^2+3x-18 > (2x+3)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x-18 > 4x^2+12x+9 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3x^2+9x+27 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x+9 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \emptyset$$

si, prin urmare, al doilea sistem este incompatibil.

Asadar, multimea solutiilor inecuatiei initiale este $(-\infty, -6]$.

b) Se observa ca membrul din dreapta inecuatiei este un numar negativ, iar membrul din stanga de indata ce exista (conditia $x^2 - x - 90 \geq 0$) ia valori nenegative. Se tine seama de nota la afirmatia **A1** si solutiile inecuatiei initiale se obtin rezolvand inecuatia

$$x^2 - x - 90 \geq 0,$$

sau

$$(x+9)(x-10) \geq 0,$$

de unde $x \in (-\infty, -9] \cup [10, +\infty)$.

c) Se tine seama de nota la afirmatia **A1**, se ridica ambii membri ai inecuatiei (nenegativi pe DVA) la puterea a patra si se obtine inecuatia echivalenta:

$$x^2 - 9x + 16 > 16,$$

sau

$$x^2 - 9x > 0,$$

cu solutiile $x \in (-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Se utilizeaza afirmatia **A2** (aici $f(x) = x^2 + 4x - 5$ si $g(x) = 2x - 3$) si se obtine:

$$\sqrt{x^2+4x-5} < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x^2+4x-5 \geq 0, \\ x^2+4x-5 < (2x+1)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 1, \end{array} \right. \\ 3x^2+6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \geq 1.$$

e) Se tine seama de nota la afirmatia **A2** si se obtine

$$\sqrt{x^2-5x+4} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4 < 4, \\ x^2-5x+4 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x < 0, \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 4, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0; 1] \cup [4; 5).$$

f) Inecuatia nu are solutii, deoarece membrul din stanga inecuatiei pe DVA reprezinta o expresie valorile careia sunt numere nenegative si, prin urmare, nu poate fi mai mic sau egal cu un numar negativ

g) Se aplica afirmatia **A3** (aici $f(x) = x^2 - x - 2$ si $g(x) = 6 + 5x - x^2$) si se obtine:

$$\sqrt{x^2-x-2} > \sqrt{6+5x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 > 6+5x-x^2, \\ 6+5x-x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4 > 0, \\ x^2-5x-6 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ -1 \leq x \leq 6, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in (4, 6].$$

h) Se utilizeaza afirmatia **A4** si se obtine:

$$\frac{\sqrt{2-x}}{x+1} > 1 \ \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > (x+1)^2, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-1 < 0, \\ x > -1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}, \\ x > -1, \end{cases} \Leftrightarrow \quad -1 < x < \frac{\sqrt{13}-3}{2}.$$

i) Conform afirmatiei **A5** se obtine totalitatea de sisteme de inecuatii:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-|x-6| < 0, \\ x-3 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3-|x-6| > 0, \\ x-3 \geq 0, \\ x-3 < (3-|x-6|)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Rezolvand primul sistem, se obtine:

$$\begin{cases} |x-6| > 3, \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-6 > 3, \\ x-6 < -3, \end{array}\right. \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 9, \\ x < 3, \end{array}\right. \\ x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \ x > 9.$$

Rezolvand al doilea sistem al totalitatii, se obtine:

$$\begin{cases} |x-6| < 3, \\ x \geq 3, \\ x-3 < 9-6|x-6|+x^2-12x+36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x-6 < 3, \\ x \geq 3, \\ x^2-6|x-6|-x+48 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 9, \\ x^2-6|x-6|-x+48 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x^2+6(x-6)-x+48 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x^2-6(x-6)-x+48 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x^2+5x+12 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x^2-7x+84 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 < x \leq 6, \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} 6 < x < 9, \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \ 3 < x < 9.$$

asadar, solutiile inecuatiei initiale sunt:

$$x \in (3; 9) \cup (9; +\infty).$$

j) Se tine seama de afirmatia **A7** si se obtine:

$$(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6+x-x^2=0, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \\ \begin{cases} 6+x-x^2>0, \\ x-1 \leq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3. \end{array}\right. \\ \begin{cases} -2<x<3, \\ x \leq 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in [-2;1] \cup \{3\}.$$

k) Se utilizeaza afirmatia **A6** si se obtine:

$$\frac{9-x}{1-x}\sqrt{x^2-8x+7} \geq 0 \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-8x+7=0, \\ x \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-8x+7>0, \\ \dfrac{9-x}{1-x} \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=7, \end{array}\right. \\ x \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>9, \\ x<1, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>9, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in (-\infty,1) \cup \{7\} \cup [9,+\infty).$$

l) Se ridica ambii membri ai inecuatiei la cub (afirmatia **A9**) si se obtine inecuatia echivalenta:

$$x^3+x^2+x+1<x^3+3x^2+3x+1$$

sau

$$2x^2+2x>0,$$

de unde $x<-1$ sau $x>0$.

In continuare vom ilustra metoda substitutiei.
Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiile:

$a)\; 3\sqrt[6]{x+2}-\sqrt[3]{x+2} \geq 2,$ $\qquad d)\; 5x-17\sqrt{x+5}+31<0,$

$b)\; \dfrac{1}{1-\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+1},$ $\qquad e)\; 18\sqrt{2x-1}-9\sqrt[4]{(2x-1)(x-1)} \geq 2\sqrt{x-1},$

$c)\; \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}-2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}<1,$ $\qquad f)\; \sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1.$

Rezolvare. a) Se noteaza $\sqrt[6]{x+2} = t$ $(t \geq 0)$, atunci $\sqrt[3]{x+2} = t^2$ si inecuatia devine

$$3t - t^2 \geq 2,$$

sau

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0,$$

cu solutiile

$$1 \leq t \leq 2.$$

Revenind la necunoscuta initiala si utlizand notele la afirmatiile **A1** si **A2**, se obtine

$$1 \leq \sqrt[6]{x+2} \leq 2 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x+2 \leq 64 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 62.$$

b) Se noteaza $\sqrt{x+1} = t$, $t \geq 0$ si se utilizeaza metoda intervalelor (a se vedea, de ex. [1], [2]):

$$\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{2t+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2t+1} \leq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2t+1-(1-t)}{(1-t)(2t+1)} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3t}{(1-t)(2t+1)} \leq 0.$$

Cum $t \geq 0$, rezulta $2t+1 \geq 1$ si, prin urmare, ultima inecuatie este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} t = 0, \\ 1 - t < 0, \end{cases}$$

de unde rezulta $t = 0$ si $t > 1$. Se revine la necunoscuta initiala si se obtine:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0, \\ \sqrt{x+1} > 1, \end{array} \right.$$

sau $x = -1$ si $x > 0$. Astfel $x \in \{-1\} \cup (0, +\infty)$.

c) Se observa ca inecuatia contine expresii reciproc inverse. Se noteaza $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = t$, atunci $\sqrt{\dfrac{x-2}{x}} = \dfrac{1}{t}$ si inecuatia devine

$$t - 2\frac{1}{t} < 1.$$

Cum $t > 0$, se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu t si se obtine ecuatia echivalenta

$$t^2 - t - 2 < 0,$$

cu solutiile $-1 < t < 2$. Deoarece $t > 0$, ramane $0 < t < 2$, sau

$$0 < \sqrt{\frac{x}{x-2}} < 2.$$

Ultima inecuatie este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} < 4, \\ \dfrac{x}{x-2} > 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{8-3x}{x-2} < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2. \end{array}\right. \end{cases}, \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{8}{3}, \\ x < 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2, \end{array}\right. \end{cases}$$

de unde $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

d) Inecuatia se scrie (se aduna 25 si se scade 25)

$$5(x+5) - 25 - 17\sqrt{x+5} + 31 < 0.$$

Se noteaza $\sqrt{x+5} = t$, atunci $x+5 = t^2$, si se obtine inecuatia patrata

$$5t^2 - 17t + 6 < 0,$$

de unde

$$\frac{2}{5} < t < 3,$$

sau

$$\frac{2}{5} < \sqrt{x+5} < 3.$$

Cum toti membrii inecuatiei duble sunt pozitivi se ridica la patrat si se obtine inecuatia echivalenta

$$\frac{4}{25} < x+5 < 9,$$

de unde $x \in (-4\frac{21}{25}; 4)$.

e) DVA al inecuatiei este $x \geq 1$. Pe DVA inecuatia este echivalenta cu inecuatia

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{(2x-1)(x-1)}}{\sqrt{2x-1}} \geq \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}}$$

sau

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} - 2\left(\frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}}\right)^2 \geq 0.$$

Se noteaza $\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} = t$, si se obtine inecuatia patrata

$$18 - 9t - 2t^2 \geq 0$$

cu solutiile $-6 \leq t \leq \dfrac{3}{2}$. Cum $t \geq 0$ ecuatia initiala este echivalenta cu urmatoarea

$$0 \leq \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} \leq \frac{3}{2}.$$

Se utilizeaza notele la afirmatia **A1** si **A2** si se obtine:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x-1} \leq \dfrac{81}{16}, \\ x-1 \geq 0, \\ 2x-1 > 0, \end{cases}$$

de unde $x \geq 1$.

f) Se noteaza $\sqrt{x-1} = t$, atunci $x - 1 = t^2$ si $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{1+(1-x)} = \sqrt[3]{1-(x-1)} = \sqrt[3]{1-t^2}$, si inecuatia devine

$$\sqrt[3]{1-t^2} + t > 1,$$

sau

$$\sqrt[3]{1-t^2} > 1 - t.$$

Se ridica la cub si se obtine (afirmatia **A9**) ecuatia echivalenta

$$1 - t^2 > (1-t)^3,$$

sau

$$\begin{aligned} &(1-t)(1+t) - (1-t)^3 > 0, \\ &(1-t)(1+t-(1-t)^2) > 0, \\ &(1-t)(1+t-1+2t-t^2) > 0, \\ &(1-t)t(3-t) > 0. \end{aligned}$$

Cum $t \geq 0$ ramane

$$\begin{cases} (1-t)(3-t) > 0, \\ t \neq 0, \end{cases}$$

de unde rezulta totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} t > 3, \\ \begin{cases} t < 1, \\ t \neq 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} > 3, \\ \begin{cases} \sqrt{x-1} < 1, \\ \sqrt{x-1} \neq 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

de unde

$$\left[\begin{array}{l} x-1 > 9, \\ 0 < x-1 < 1, \end{array} \right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} x > 10, \\ 1 < x < 2. \end{array} \right.$$

adica $x \in (1;2) \cup (10;+\infty)$.

O metoda frecventa de rezolvare a inecuatiilor irationale consta in reducerea lor (cu ajutorul unor transformari ce pastreaza echivalenta inecuatiilor) la inecuatii de tipul celor ce figureaza in afirmatiile **A1-A9**, se aplica afirmatia respectiva si tinand seama de *DVA* al inecuatiei se obtine multimea solutiilor.

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiile

a) $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} < \sqrt{2-x}$,

b) $\dfrac{\sqrt{1+x^3}+x-2}{x-1} \geq x+1$,

c) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$,

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-1)(x+6)} < 51-2x$,

e) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \geq 4$.

Rezolvare. a) *DVA* al inecuatiei $x \in [-\frac{1}{2};2]$ se determina rezolvand sistemul de inecuatii (conditiile de existenta a radicalilor de ordinul doi)

$$\begin{cases} x+4 \geq 0, \\ 2x+1 \geq 0, \\ 2-x \geq 0. \end{cases}$$

Inecuatia se scrie astfel

$$\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+1}.$$

Acum ambii membri ai inecuatiei sunt pozitivi pe *DVA* si ridicand la patrat se obtine inecuatia echivalenta:

$$x+4 < 2-x+2\sqrt{2-x}\sqrt{2x+1}+2x+1,$$

sau

$$1 < 2\sqrt{2-x}\sqrt{2x+1}.$$

Iar ridicand la patrat si tinand seama de *DVA* obtinem

$$\begin{cases} 1 < 4(2-x)(2x+1), \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 8x^2-12x-7 < 0, \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2, \end{cases}$$

de unde

$$\frac{3-\sqrt{23}}{4} < x < \frac{3+\sqrt{23}}{4}.$$

b) Inecuatia se scrie astfel:

$$\frac{\sqrt{1+x^3}+(x-2)}{x-1}-(x+1)\geq 0,$$

sau

$$\frac{\sqrt{1+x^3}+(x-2)-(x^2-1)}{x-1}\geq 0,$$

$$\frac{\sqrt{1+x^3}-(1-x+x^2)}{x-1}\geq 0.$$

Cum $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$ si cum $1-x+x^2>0$ pentu orice $x\in\mathbf{R}$ inecuatia

$$\frac{\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}-(1-x+x^2)}{x-1}\geq 0$$

este echivalenta cu urmatoarea

$$\frac{\sqrt{1-x+x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2})}{x-1}\geq 0.$$

Se divide cu $\sqrt{1-x+x^2}$ (aceasta expresie ia numai valori mai mari ca zero, oricare n-ar fi x, deoarece discriminantul trinomului $1-x+x^2$ este negativ ($\Delta=1-4=-3<0$) iar coeficientul de pe langa x^2 este pozitiv ($a=1$)) si se obtine inecuatia

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2}}{x-1}\geq 0,$$

echivalenta cu totalitatea sistemelor de inecuatii

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2}\geq 0,\\ x-1>0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2}\leq 0,\\ x-1<0,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

sau, tinand seama de afirmatia **A3**,

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1+x\geq 1-x+x^2,\\ 1-x+x^2\geq 0,\\ x>1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}1+x<1-x+x^2,\\ 1+x\geq 0,\\ x<1,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

de unde rezulta

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2-2x\leq 0,\\ x\in\mathbf{R},\\ x>1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x^2-2x\geq 0,\\ x>-1,\\ x<1,\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\leq 2,\\ -1<x\leq 0.\end{array}\right.$$

Asadar, multimea solutiilor inecuatiei initiale este $x \in (-1;0] \cup (1;2]$.

c) DVA al inecuatiei $x \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$ se determina din sistemul de inecuatii:

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} \geq 0, \\ 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0. \end{cases}$$

Inecuatia se scrie astfel

$$\sqrt{\frac{(x-1)}{x}(x+1)} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} > 0$$

sau, utilizand urmatoarea proprietate a radicalilor de ordin par: $\sqrt[2n]{AB} = \sqrt[2n]{|A|} \cdot \sqrt[2n]{|B|}$, $(AB \geq 0)$ se obtine

$$\sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\sqrt{|x+1|} - 1 - \sqrt{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\right) > 0.$$

Ultima inecuatie, tinand seama ca in DVA $x+1 \geq 0$ si $\dfrac{x-1}{x} \geq 0$ si deci $|x+1| = x+1$, $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = \dfrac{x-1}{x}$ este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \neq 0, \end{cases}$$

care se rezolva astfel:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 + \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ x \neq 1, \\ x \in [-1;0) \cup [1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 1 + 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} + \dfrac{x-1}{x}, \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x} > 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}, \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-x+1}{x} - \dfrac{2\sqrt{(x-1)x}}{|x|} > 0 \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1) \pm 2\sqrt{x(x-1)} + 1}{x} > 0, \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{x(x-1)} \pm 1\right)^2}{x} > 0, \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x-1)} - 1 \neq 0, \\ x > 0, \\ x \in [-1;0) \cup (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \neq 1, \\ x \in (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \in (1;+\infty), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

d) Se noteaza $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}=t$, atunci $x-1+2\sqrt{(x-1)(x+6)}+x+6=t^2$, de unde $2\sqrt{(x+1)(x+6)}=t^2-2x-5$ si inecuatia devine

$$t+t^2-5<51$$

sau

$$t^2+t-56<0,$$

cu solutiile $-8<t<7$. Cum $t>0$ (ca suma a doi radicali de ordin par) ramane $t<7$, sau $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}<7$.

Ultima inecuatie se poate rezolva similar exemplului 3a):

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}<7 \ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{x+6}+x+6<49, \\ x-1\geq 0, \\ x+6\geq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x-1}\sqrt{x+6}<22-x, \\ x\geq 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)(x+6)<(22-x)^2, \\ 22-x>0, \\ x\geq 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<10, \\ 1\leq x<22, \end{array}\right. \Leftrightarrow\ 1\leq x<10,$$

sau, astfel se observa ca pentru $x=10$,

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}=7,$$

prin urmare cum functia $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}$ este o functie crescatoare pentru $x\geq 10$ inecuatia nu are solutii. Ramane sa tinem seama de DVA: $x\geq 1$ si sa scriem multimea solutiilor: $x\in[1;10)$.

e) Cum

$$x\pm 4\sqrt{x-4}=x-4\pm 4\sqrt{x-4}+4=\left(\sqrt{x-4}\pm 2\right)^2$$

inecuatia se scrie astfel:

$$\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}\geq 4,$$

sau, tinand seama ca $\sqrt{A^2}=|A|$,

$$|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|\geq 4.$$

Cum $\sqrt{x-4}\geq 0$, rezulta $\sqrt{x-4}+2\geq 2$ si prin urmare $|\sqrt{x-4}+2|=\sqrt{x-4}-2$. Asadar

$$\sqrt{x-4}+2+|\sqrt{x-4}-2|\geq 4$$

sau

$$|\sqrt{x-4}-2|\geq 2-\sqrt{x-4}.$$

Cum $|a|\geq -a$, oricare n-ar fi a, rezulta ca multimea solutiilor inecuatiei date coincide cu DVA, adica $x\geq 4$.

Exercitii recapitulative
Sa se rezolve inecuatiile

1. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1.$

2. $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}.$

3. $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0.$

4. $\sqrt{\dfrac{1-2x}{x-2}}>-1.$

5. $\sqrt{3x-9}>\sqrt{6-x}.$

6. $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leq 0.$

7. $\sqrt{3x-x^2}<4-x.$

8. $\sqrt{2x-x^2}<5-x.$

9. $\sqrt{11-5x}>x-1.$

10. $\sqrt{x^2+7x+12}>6-x.$

11. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+2}\geq 0.$

12. $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geq 1.$

13. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1.$

14. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>\dfrac{1}{2-x}.$

15. $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$

16. $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0.$

17. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6<0.$

18. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$

19. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{1}{x}.$

20. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}.$

Bibliografie

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.