

I. Ecuatii irrationale

Ecuatia ce contine necunoscuta sub semnul radicalului se numeste **ecuatie irationala**. Drept exemplu de ecuatii irrationale pot servi

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2} - \sqrt{3x-17} &= 1, & \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 &= 0, \\ \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+2} &= \sqrt{3-2x}, & \sqrt{x^2-3x+4} &= 2.\end{aligned}$$

Mentionam, ca radacinile radicalului de ordin par ce figureaza in ecuatiile irrationale se considera **aritmetice**, astfel valoarea radicalului de ordin par poate fi doar nenegativa si radicalul de ordin par exista daca si numai daca expresia de sub radical este nenegativa.

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{aligned}a) \sqrt{x^2-6x+7} &= -1, & d) \sqrt{\frac{4-x}{x}} + \sqrt{\frac{x-4}{x+1}} &= 2 - \sqrt{x^2-12}, \\ b) \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} &= 0, & e) \sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} &= 1 + \sqrt{4-x}, \\ c) \sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} &= 3, & f) (4x^2-9)\sqrt{x-1} &= 0.\end{aligned}$$

Rezolvare. a) Se observa ca membrul din dreapta ecuatiei este negativ, pe cind cel din stinga, fiind un radical de ordinul doi, poate primi doar valori nenegative. Asadar ecuatia nu are solutii.

b) Cum suma a doua expresii, valorile carora sunt numere negative, este egal cu zero, rezulta ca ambele expresii concomitent sunt egale cu zero. Asadar, ecuatia este echivalenta cu sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x+2=0, \end{cases}$$

care este incompatibil. Prin urmare, ecuatia nu are solutii.

c) Domeniul valorilor admisibile (concis *DVA*) al ecuatiei se determina din sistemul (expresiile ce se contin sub semnul radicalului de ordinul doi urmeaza a fi nenegative)

$$\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-5 \geq 0. \end{cases}$$

Evident sistemul nu are solutii, si, prin urmare, ecuatia enuntata la fel nu are solutie.

d) *DVA* al ecuatiei $x=4$ se determina rezolvind sistemul

$$\begin{cases} \frac{4-x}{x} \geq 0, \\ \frac{x-4}{x+1} \geq 0, \\ x^2-12 \geq 0. \end{cases}$$

Cum $x = 4$ este unica valoare admisibila a ecuatiei, ramine de verificat, daca ea este sau ba solutie a ecuatiei. Introducind in ecuatie $x = 4$ se obtine egalitatea numerica justa $0 = 0$ si, prin urmare, $x = 4$ este unica solutie a ecuatiei date.

e) DVA al ecuatiei $x \in [2; 4]$ se determina din sistemul de inecuatii

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x + 7 \geq 0, \\ 4 - x \geq 0. \end{cases}$$

Se observa ca in DVA are loc inegalitatea $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} \geq 3$, si cum $1 + \sqrt{4-x} \leq 1 + \sqrt{2} < 3$, rezulta ca ecuatie initiala nu are solutii.

f) Ecuatie se rezolva astfel

$$(4x^2 - 9)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4x^2 - 9 = 0, \\ \sqrt{x-1} = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ x = \frac{3}{2}, \\ x = 1, \\ x \geq 1, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Una din metodele standard de rezolvare a ecuatiilor irrationale consta in rationalizarea ei, adica in eliberarea succesiva de radicali pe calea ridicarii la o anumita putere a ambelor parti ale ecuatiei. Tinem sa mentionam (a se vedea [1]), ca daca n este un numar natural impar, ecuatiile $f(x) = g(x)$ si $(f(x))^n = (g(x))^n$ sunt echivalente, iar daca n este un numar natural par, ecuatie $(f(x))^n = (g(x))^n$ este o consecinta a ecuatiei $f(x) = g(x)$ (adica la ridicarea la putere para pot apare solutii straine), si, prin urmare, este necesara verificarea solutiilor obtinute.

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{aligned} a) \sqrt[3]{5x+27} &= x+3, & c) \sqrt{x^2-9x+25} &= 2x-13, \\ b) \sqrt[3]{x} &= \sqrt{x-4}, & d) \sqrt{3-x} + \sqrt{6+x} &= 3. \end{aligned}$$

Rezolvare. a) Ambii membri ai ecuatiei se ridica la puterea a treia si se obtine ecuatie echivalenta

$$5x + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27,$$

sau

$$x^3 + 9x^2 + 22x = 0,$$

de unde rezulta totalitatea

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + 9x + 21 = 0. \end{cases}$$

Cum ultima ecuatie nu are solutii ($\Delta = 9^2 - 4 \cdot 21 < 0$), rezulta ca $x = 0$ este unica solutie a ecuatiei initiale.

b) Se ridică ambii membri ai ecuației la puterea a șasea (cel mai mic multiplu comun al ordenelor radicalilor (2 și 3) din ecuație) și se obține

$$x^2 = (x - 4)^3$$

sau

$$x^3 - 13x^2 + 48x - 64 = 0,$$

de unde, grupând convenabil,

$$(x^3 - 8x^2) - (5x^2 - 40x) + (8x - 64) = 0,$$

se obține

$$x^2(x - 8) - 5x(x - 8) + 8(x - 8) = 0,$$

sau

$$(x - 8)(x^2 - 5x + 8) = 0.$$

Astfel se obține totalitatea

$$\begin{cases} x - 8 = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0, \end{cases}$$

cu soluția $x = 8$. Introducând $x = 8$ în ecuația din enunț se obține egalitatea numerică justă $2=2$ și, prin urmare, $x = 8$ este soluție a ecuației enunțate.

c) Se ridică la pătrat și se obține ecuația pătrată

$$x^2 - 9x + 25 = 4x^2 - 52x + 169,$$

sau

$$3x^2 - 43x + 144 = 0,$$

cu soluțiile $x_1 = 9$ și $x_2 = \frac{16}{3}$. Se efectuează verificarea și rămâne $x = 9$.

d) Se izolează un radical

$$\sqrt{6 + x} = 3 - \sqrt{3 - x},$$

și se ridică la pătrat

$$6 + x = 9 - 6\sqrt{3 - x} + 3 - x,$$

iar se izolează un radical

$$6\sqrt{3 - x} = 6 - 2x,$$

sau

$$3\sqrt{3 - x} = 3 - x,$$

și ridicând iar la pătrat se obține ecuația

$$9(3 - x) = (3 - x)^2,$$

cu soluțiile $x = 3$ și $x = -6$. Prin verificare se constată că atât $x = 3$ cât și $x = -6$ verifică ecuația inițială.

Adesea este comoda si utila afirmatia (a se vedea [2]):

A1. Ecuatia $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) = [g(x)]^{2n}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Tinem sa mentionam ca conditia $f(x) \geq 0$ este in aceasta situatie in plus, deoarece acei x_0 ce verifica ecuatia in conditiile sistemului verifica, si restrictia $f(x_0) \geq 0$.

Nota. Din afirmatia **A1** rezulta ca ecuatiile $\sqrt[n]{f(x)} = b$ ($b \geq 0$) si $f(x) = [b]^{2n}$ sunt echivalente.

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$a) \sqrt{x^2 - 9x + 25} = 2x - 13, \quad b) \sqrt{10 - x} = x + 2.$$

Rezolvare. a) Se utilizeaza afirmatia **A1** (a se compara rezolvarea cu cea din exemplul 2d)) si se obtine sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 25 = (2x - 13)^2, \\ 2x - 13 \geq 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 3x^2 - 43x + 144 = 0, \\ x \geq \frac{13}{2}, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = \frac{16}{3}, \\ x_2 = 9, \end{bmatrix} \\ x \geq \frac{13}{2}, \end{cases}$$

de unde $x = 9$.

b) Se utilizeaza afirmatia **A1** si se obtine

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - x} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x = (x + 2)^2, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = -6, \\ x_2 = 1, \end{bmatrix} \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Mentionam ca in procesul rezolvarii unei ecuatii irrationale cu ajutorul DVA se tine seama de DVA pe tot parcursul rezolvarii ecuatiei.

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile

$$a) \sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} = 1, \quad c) \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$$

$$b) \sqrt{\frac{20 + x}{x}} + \sqrt{\frac{20 - x}{x}} = \sqrt{6}, \quad d) \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{11 - x}.$$

Rezolvare. a) *DVA* al ecuatiei este $x \in [\frac{5}{3}; 4]$. Ecuatia initiala este echivalenta cu ecuatia

$$\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{4-x}$$

Cum ambii membri ai acestei ecuatiei in *DVA* sunt nenegativi, ridicind la patrat se obtine ecuatia echivalenta

$$3x - 5 = 1 + 2\sqrt{4-x} + 4 - x,$$

sau

$$2x - 5 = \sqrt{4-x}.$$

Utilizind afirmatia **A1** si tinind seama de *DVA* se obtine

$$\begin{aligned} 2x - 5 = \sqrt{4-x} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)^2 = 4-x, \\ x \geq \frac{5}{2}, \\ x \in [\frac{5}{3}; 4], \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 19x + 21 = 0, \\ x \in [\frac{5}{2}; 4], \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = \frac{7}{4}, \\ x_2 = 3, \\ x \in [\frac{5}{2}; 4], \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

b) *DVA* al ecuatiei este $x \in (0; 20]$. Cum ambii membri sunt nenegativi, ridicand la patrat obtinem ecuatia echivalenta

$$\frac{20+x}{x} + 2\sqrt{\frac{20+x}{x}}\sqrt{\frac{20-x}{x}} + \frac{20-x}{x} = 6$$

sau, tinand seama ca $x \in (0; 20]$, si prin urmare $2\sqrt{\frac{20+x}{x}}\sqrt{\frac{20-x}{x}} = 2\frac{\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}}{x}$, se obtine ecuatia

$$20 + x + 2\sqrt{20+x}\sqrt{20-x} + 20 - x = 6x,$$

de unde

$$\sqrt{20+x}\sqrt{20-x} = 3x - 20.$$

Ultima ecuatie in *DVA* este echivalenta cu sistemul

$$\begin{cases} (20+x)(20-x) = (3x-20)^2, \\ 3x-20 \geq 0, \\ x \in (0; 20] \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 10x^2 - 120x = 0, \\ x \in [\frac{20}{3}; 20] \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 12, \\ x \in [\frac{20}{3}; 20] \end{bmatrix} \end{cases}$$

de unde $x = 12$.

c) DVA al ecuatiei $x \in (-\infty; -4] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$ se obtine rezolvand sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 8 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0. \end{cases}$$

Se tine seama, ca daca $AB \geq 0$, atunci $\sqrt{AB} = \sqrt{|A|} \cdot \sqrt{|B|}$ si se obtine

$$\sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}\sqrt{|x-2|}$$

sau

$$\sqrt{|x-2|} \cdot [\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} - \sqrt{|x-3|}] = 0,$$

de unde

$$\begin{cases} \sqrt{|x-2|} = 0, \\ \sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}. \end{cases}$$

Din prima ecuatie a totalitatii rezulta $x = 2$.

La rezolvarea ecuatiei ramase, se tine seama de DVA si se considera urmatoarele doua cazuri:

I. daca $x \in (-\infty; -4]$, atunci ecuatie devine

$$\sqrt{-1-x} + \sqrt{-x-4} = \sqrt{3-x}.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatie echivalenta

$$-1-x + 2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} - x - 4 = 3-x$$

sau

$$2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} = 8+x.$$

Se utilizeaza afirmatia **A1** si se obtine

$$\begin{cases} 4(1+x)(x+4) = (6+x)^2, \\ x \geq -8 \end{cases}$$

sau, dupa transformari elementare

$$\begin{cases} 3x^2 + 8x - 20 = 0, \\ x \geq -8. \end{cases}$$

Se tine seama ca $x \in [-8; -4]$ si se obtine solutia

$$x = -\frac{-2 - 2\sqrt{37}}{3}.$$

II. daca $x \in [3; +\infty)$ se obtine ecuatie

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x-3}$$

Cum $x + 4 > x - 3$, avem $\sqrt{x+4} > \sqrt{x-3}$ si tinind seama ca $\sqrt{x-1} \geq 2$, rezulta ca ecuatia data nu are solutii pentru $x \geq 3$.

Asadar solutiile ecuatiei din enunt sunt $x = 2$ si $x = -\frac{-2 - 2\sqrt{37}}{3}$.

d) *DVA* al ecuatiei $x \in [1; 11]$ se determina rezolvand sistemul (conditiile de existenta a radicalilor de ordin par)

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \\ 11 - x \geq 0. \end{cases}$$

Ambii membri ai ecuatiei sunt nenegativi si ridicand la patrat se obtine ecuatia echivalenta

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} = 10 - 3x,$$

care la randul sau este echivalenta cu sistemul (a se vedea afirmatia **A1**)

$$\begin{cases} 4(x-1)(x+2) = (10-3x)^2, \\ 10-3x \geq 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 5x^2 - 64x + 108 = 0, \\ x \leq \frac{10}{3}, \end{cases}$$

cu solutia $x_1 = 2$, ce verifica si *DVA* initial.

Ecuatiile de tipul

$$(F(\sqrt[n]{f(x)})) = 0$$

prin intermediul substitutiei $\sqrt[n]{f(x)} = t$, se reduc de regula, la ecuatii algebrice.

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatiiile

$$\begin{array}{ll} a) 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} = 18, & c) 1 + \frac{15}{\sqrt{2x+1}} = 2\sqrt{2x+1}, \\ b) \sqrt[3]{\frac{x+4}{5x+7}} + \sqrt[3]{\frac{5x+7}{x+4}} = \frac{13}{6}, & d) x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}. \end{array}$$

Rezolvare. a) Se noteaza $\sqrt[6]{x} = t$ ($t \geq 0$), atunci $\sqrt[3]{x} = t^2$ si ecuatia devine

$$2t^2 + 5t - 18 = 0.$$

Rezolvand aceasta ecuatie patratica, se obtine $t_1 = -\frac{9}{2}$ si $t_2 = 2$. Cum $t \geq 0$ ramane $t = 2$ sau $\sqrt[6]{x} = 2$ cu $x = 2^6$ sau $x = 64$.

b) *DVA* al ecuatiei este $\mathbf{R} \setminus \{-4; -\frac{7}{5}\}$. Se observa ca in ecuatia figureaza expresii reciproc inverse. Se noteaza $\sqrt[3]{\frac{x+4}{5x+7}} = t$, atunci $\sqrt[3]{\frac{5x+7}{x+4}} = \frac{1}{t}$ si ecuatia devine

$$t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6},$$

sau, dupa transformari elementare in DVA,

$$6t^2 - 13t + 6 = 0.$$

Se rezolva ecuatia patratica si se obtine $t_1 = \frac{2}{3}$ si $t_2 = \frac{3}{2}$. Asadar

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{x+4}{5x+7}} = \frac{2}{3}, \\ \sqrt[3]{\frac{x+4}{5x+7}} = \frac{3}{2}, \end{array} \right.$$

sau, ridicand la puterea a treia

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x+4}{5x+7} = \frac{8}{27}, \\ \frac{x+4}{5x+7} = \frac{27}{8}, \end{array} \right.$$

de unde

$$\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\frac{157}{127}. \end{array} \right.$$

c) Se noteaza $\sqrt{2x+1} = t$, $t > 0$ si ecuatia devine

$$t + \frac{15}{t} = 2t$$

sau

$$2t^2 - t - 15 = 0,$$

de unde $t_1 = -\frac{5}{2}$ (nu verifica conditia $t > 0$) si $t = 3$. Asadar

$$\sqrt{2x+1} = 3$$

de unde tinand seama de nota la afirmatia **A1** se obtine $2x+1 = 9$ si $x = 4$.

d) Se noteaza $\sqrt{x^2+5x+28} = t$, $t \geq 0$, atunci $x^2+5x+28 = t^2$ sau $x^2+5x = t^2 - 28$ si ecuatia devine

$$t^2 - 28 + 4 = 5t$$

sau

$$t^2 - 5t - 24 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -3$ si $t_2 = 8$.

Cum $t \geq 0$ ramine $t = 8$ sau

$$\sqrt{x^2+5x+28} = 8.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta

$$x^2 + 5x + 28 = 64,$$

sau

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

cu solutiile $x = -9$ si $x = 4$.

In unele cazuri ecuatia irationala se rationalizeaza, prin multiplicarea ambilor membri ai ecuatiei cu o expresie, ce nu primeste valoarea zero.

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatia

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} - \sqrt{3x^2 - x - 1} = 1$$

Rezolvare. Se multiplica ambii membri ai ecuatiei cu expresia

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} \neq 0,$$

(conjugata expresie din ecuatie) si, dupa reducerea termenilor asemenea, se obtine ecuatia

$$7 = \sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1}$$

echivalenta cu cea enuntata, deoarece ecuatia

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} = 0$$

nu are solutii reale.

Adunand membru cu membru ecuatiile

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} - \sqrt{3x^2 - x - 1} = 1,$$

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} = 7,$$

se obtine ecuatia

$$2\sqrt{3x^2 - x + 6} = 8,$$

sau

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} = 4.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia echivalenta (a se vedea nota la afirmatia **A1**)

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

cu solutiile $x_1 = -\frac{5}{3}$ si $x_2 = 2$.

Se efectueaza verificarea si se obtine ca atat $x = -\frac{5}{3}$ cat si $x = 2$ sunt solutii ale ecuatiei enuntate.

Nota. Ecuatia data poate fi rezolvata si utilizind substitutia $t = 3x^2 - x + 6$, atunci $3x^2 - x - 1 = 3x^2 - x + 6 - 7 = t - 7$ si ecuatia devine

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - 7} = 1$$

si se rezolva similar exemplului 2d).

Ecuatiile ce urmeaza se rezolva prin metoda evidentierii unui patrat complet sub semnul radicalului.

Exemplul 7. Sa se rezolve ecuatiile

$$a) \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 5,$$

$$b) \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = x - 1.$$

Rezolvare. a) Se observa ca $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, se tine seama ca $\sqrt{A^2} = |A|$ si se obtine ecuatie

$$|x - 2| + |x + 3| = 5.$$

Cum $|x - 2| = |2 - x|$, $(2 - x) + (x + 3) = 5$ si astfel

$$|2 - x| + |x + 3| = |(2 - x) + (x + 3)|$$

utilizind proprietatile modulului (a se vedea [1]) se obtine

$$(2 - x)(x + 3) \geq 0,$$

de unde multimea solutiilor ecuatiei date este

$$x \in [-3; 2].$$

b) Se evidentiaza sub fiecare radical un patrat perfect

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1 - 2 \cdot 2\sqrt{x - 1} + 4} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 2)^2} = |\sqrt{x - 1} - 2|,$$

$$\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1 - 2 \cdot 3\sqrt{x - 1} + 9} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 3)^2} = |\sqrt{x - 1} - 3|.$$

Se noteaza $\sqrt{x - 1} = t$, $t \geq 0$ si ecuatie devine

$$|t - 2| + t - 3 = t^2$$

echivalenta cu totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2, \\ -t + 2 - t + 3 = t^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 < t \leq 3, \\ t - 2 - t + 3 = t^2, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} t > 3, \\ t - 2 + t - 3 = t^2, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2, \\ t = -1 \pm \sqrt{6}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 < t \leq 3, \\ t = \pm 1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} t > 3, \\ t \in \emptyset, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

de unde $t = \sqrt{6} - 1$. Asadar $\sqrt{(x-1)} = \sqrt{6} - 1$ sau $x = 8 - 2\sqrt{6}$.

In continuare se prezinta unele metode speciale de rezolvare a ecuatiilor irrationale.

Exemplul 8. Sa se rezolve ecuatiile

- a) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{3x-5} = 4,$
- b) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2},$
- c) $\frac{(4-x)\sqrt{4-x} + (x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}} = 2,$
- d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{(x-2)(x+2)} = 6 - 2x,$
- e) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6,$
- f) $\sqrt[4]{x+7} - \sqrt[4]{x-9} = 2,$
- g) $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} + \sqrt{2x+15} = 2x,$
- h) $3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x},$
- i) $\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{x+3} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$

Rezolvare. a) Se verifica usor ca $x = 2$ este solutie a ecuatiei date. Alte solutii ecuatiei nu are, deoarece membrul din stinga ca suma a doua functii strict crescatoare in $[\frac{5}{3}; +\infty]$, este o functie strict crescatoare, iar membrul din dreapta este o constanta, si, prin urmare, graficele acestor functii pot avea cel mult un punct de intersectie. Asadar $x = 2$ este unica solutie a ecuatiei.

b) Se ridica ambii membri ai ecuatiei la cub, utilizand formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$x + 3x - 2 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2}) = x - 2 \quad (1)$$

sau, tinand seama ca $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2}$ (ecuatie enuntata),

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{x-2} = x. \quad (2)$$

Se ridica iar la cub si se obtine

$$x(3x-2)(x-2) = -x^3$$

sau

$$x \left[(3x-2)(x-2) + x^2 \right] = 0,$$

de unde rezulta totalitatea de ecuatii

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Se efectueaza verificarea (este necesara deoarece ecuatiile (1) si (2) in general nu sunt echivalente) si se obtine unica solutie a ecuatiei enuntate $x = 0$.

c) *DVA* al ecuatiei este $x \in [2; 4]$. Se noteaza $\sqrt{4-x} = u$, $\sqrt{x-2} = v$, atunci

$$\begin{cases} u + x = u^2, \\ x - 2 = v^2, \end{cases}$$

de unde $u^2 + v^2 = 2$.

In u si v ecuatiile devin

$$\frac{u^3 + v^3}{u + v} = 2$$

sau

$$\frac{(u + v)(u^2 - uv + v^2)}{u + v} = 2$$

si cum $u + v \neq 0$, rezulta

$$u^2 - uv + v^2 = 2.$$

Rezolvand sistemul

$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 2, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

se obtine

$$\begin{cases} uv = 0, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

Deoarece $u \geq 0$, $v \geq 0$, ramane $u_1 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ si $u_2 = \sqrt{2}$, $v_2 = 0$ de unde rezulta $x_1 = 2$ si $x_2 = 4$.

d) *DVA* al ecuatiei este $x \in [2; 3]$.

Se utilizeaza substitutia $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = t$, $t > 0$. Atunci $t^2 = x - 2 + x + 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$ sau $2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = t^2 - 2x$ si ecuatiile devin

$$t + t^2 = 6$$

de unde $t_1 = -3$ (nu verifica conditia $t > 0$) si $t = 2$. Asadar

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 2.$$

Se rezolva similar exemplului 8a) si se obtine $x = 2$.

e) *DVA* al ecuatiei este $x \in [1; 3]$. Partea dreapta a ecuatiei se scrie $x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2$ si in *DVA* primeste valoarea minima 2 pentru $x = 2$, iar partea din stanga ecuatiei obtine valoarea maxima 2 pentru $x = 2$ (se arata, de exemplu, cu ajutorul calculului diferential). Asadar, unica solutie a ecuatiei este $x = 2$.

f) Se noteaza $\sqrt[4]{x+7} = u$, $\sqrt[4]{x-9} = v$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ si tinand seama de ecuatia din enunt, se obtine sistemul

$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 16, \\ u - v = 2, \end{cases}$$

care se rezolva in felul urmatoar: din a doua ecuatie a sistemului rezulta $u = 2 + v$, se inlocuieste in prima si se obtine ecuatia in v

$$(2 + v)^4 - v^4 = 16,$$

sau

$$16 + 32v + 24v^2 + 8v^3 + v^4 - v^4 = 16,$$

de unde rezulta totalitatea

$$\begin{cases} v = 0, \\ v^2 + 3v + 4 = 0, \end{cases}$$

cu solutia $v = 0$. Atunci $u = 2$ si rezolvand sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+7} = 2, \\ \sqrt[4]{x-9} = 0, \end{cases}$$

se obtine $x = 9$.

g) Se observa ca $x = 0$ nu verifica ecuatia data. Se impart ambii membri ai ecuatiei la x si se obtine ecuatia

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} + \frac{\sqrt{2x+15}}{x} = 2.$$

Cum $a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = 1$ (rezulta din inegalitatea dintre media aritmetica si media geometrica) avem

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} = 1$$

de unde, utilizand afirmatia **A1** se obtine sistemul

$$\begin{cases} 2x + 15 = x^2, \\ x > 0, \end{cases}$$

cu solutia $x = 5$. Se efectueaza verificarea si se obtine ca $x = 5$ este solutia ecuatiei din enunt.

h) Cum membrul din stanga ecuatiei este pozitiv rezulta ca membrul din dreapta la fel este pozitiv, si astfel *DVA* al ecuatiei este $x \in [5; +\infty)$. In *DVA* membrul din stanga reprezinta o functie strict crescatoare, iar cel din dreapta o functie strict descrescatoare, prin urmare ecuatia poate avea cel mult o radacina. Verificand cea mai mica valoare posibila $x = 5$ se convinge ca ambii membri primesc aceeasi valoare. Asadar $x = 5$ este unica solutie a ecuatiei

i) *DVA* al ecuatiei $x \in [-3; -1] \cup (0; +\infty)$.

Ecuatia se scrie

$$\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x+3}$$

⁰ Copyright©1999 ONG TCV Scoala Virtuala a Tanarului Matematician <http://math.ournet.md>

se ridica la patrat si se obtine ecuati echivalenta

$$2\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, iar $\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \geq 0$, rezulta sistemul

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2, \\ \begin{cases} x(x+1) = 0, \\ 1 + \frac{1}{x^2} = 0, \end{cases} \end{cases}$$

cu solutiile $x = \pm 1$. Se efectueaza verificarea si ramane $x = -1$.

Exemple recapitulative Sa se rezolve ecuatiile

1. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{6x+1},$
2. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+1},$
3. $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12},$
4. $\sqrt{x^3-x^2+4} + \sqrt{x^3-x^2+1} = 3,$
5. $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{4x^2-32x+64} = 9,$
6. $x^2 - 2x + 4 - 3\sqrt{2x^2-4x+5} = -1,$
7. $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2+1}} = x + 1,$
8. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1,$
9. $\sqrt{3x-2} - \frac{x^2-2x+4}{\sqrt{3x-2}} = x-3,$
10. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} = 3x-6 + 2\sqrt{2x^2-3x-9},$
11. $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1,$
12. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3},$
13. $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4,$
14. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4,$

15. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 = 0,$
16. $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7,$
17. $\sqrt[4]{47 - 2x} + \sqrt[4]{35 + 2x} = 4,$
18. $(4x^2 - 9)\sqrt{x + 1} = 0,$
19. $(x - 3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7},$
20. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11.$

Bibliografie

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.
2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.