Inecuatii exponentiale.

La rezolvarea inecuatiilor exponentiale se utilizeaza urmatoarele afirmatii (a se vedea, de exemplu, [2])

A.1. Daca $a > 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) > g(x),$$

adica semnul inecuatiei nu se schimba.

Similar

$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

A.2. Daca $0 < a < 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) < g(x),$$

adica semnul inecuatiei se schimba in opus.

Similar

$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

A.3. Inecuatia

$$[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)} \tag{1}$$

este echivalenta cu totalitatea de sisteme

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Nota. Daca semnul inecuatiei (1) nu este strict, se mai considera si cazul

$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

unde $D(f)$ ($D(g)$) desemneaza domeniul de definitie al functiei f (g).

A.4. Inecuatia

$$a^{f(x)} < b$$

unde $b \leq 0$, nu are solutii (rezulta din proprietatile functiei exponentiale).

A.5. Inecuatia $a^{f(x)} > b$, unde $b \leq 0$ are solutiile $x \in D(f)$.

A.6. Daca $a > 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > b$$

unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) > \log_a b.$$

Similar

$$a^{f(x)} < b \;\Leftrightarrow\; f(x) < \log_a b.$$

A.7. Daca $0 < a < 1$, inecuatia

$$a^{f(x)} > b$$

unde $b > 0$, este echivalenta cu inecuatia

$$f(x) < \log_a b.$$

Similar

$$a^{f(x)} < b \;\Leftrightarrow\; f(x) > \log_a b.$$

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatiile:

$$\begin{array}{ll}
a)\ 2^{\frac{2}{x^2-1}} > 2^{\frac{1}{x-2}}, & e)\ 2^x < -4, \\
b)\ (0.3)^{|2x-3|} < (0.3)^{|3x+4|}, & f)\ 2^x > -4, \\
c)\ (4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1, & g)\ 5^{x^2-2x+3} < 7, \\
d)\ (x^2-x+1)^x \le 1, & h)\ 2^{\frac{\sqrt{x-3}}{x-8}} > -4.
\end{array}$$

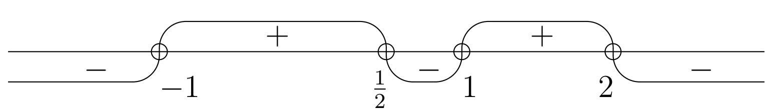
Rezolvare. a) Cum $2 > 1$, se utilizeaza afirmatia **A.1** si se obtine inecuatia

$$\frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2},$$

care se rezolva prin metoda intervalelor (a se vedea [1],[2]), adica

$$\frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x(x-2)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)} > 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-2x}{(x-1)(x+1)(x-2)} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in (-1; \frac{1}{2}) \cup (1; 2).$$



b) Cum $0 < 0.3 < 1$ se utilizeaza afirmatia **A.2** si se obtine inecuatia

$$|2x-3| > |3x+4|,$$

care se rezolva utilizand proprietatile modulului ([1],[2]), si anume $|a| > |b| \;\Leftrightarrow\; (a-b)(a+b) > 0$. Astfel

$$|2x-3| > |3x+4| \;\Leftrightarrow\; \Big((2x-3)-(3x+4)\Big)\Big((2x-3)+(3x+4)\Big) > 0 \;\Leftrightarrow\; (-x-7)(5x+1) > 0.$$

Ultima inecuatie se rezolva cu ajutorul metodei intervalelor si se obtine $x \in (-7; -\frac{1}{5})$.

c) Se utilizeaza afirmatia **A.3** si se obtine

$$(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad (4x^2+2x+1)^{x^2-x} > (4x^2+2x+1)^0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2+2x+1>1, \\ x^2-x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2+2x+1<1, \\ 4x^2+2x+1>0, \\ x^2-x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0, \\ x<-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\frac{1}{2}; 0), \\ x \in \mathbf{R}, \\ x \in (0;1). \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty), \\ x \in \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty).$$

d) Se tine seama de nota la afirmatia **A.3** si se obtine

$$(x^2-2+1)^x \le 1 \;\Leftrightarrow\; (x^2-x+1)^x \le (x^2-x+1)^0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-x+1>1, \\ x \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x+1<1, \\ x^2-x+1>0, \\ x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in D(f) \cap D(g) = \mathbf{R}, \\ x^2-x+1=1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x<1, \\ x=0, \; x=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in (-\infty; 1].$$

e) Conform afirmatiei **A.4** avem $x \in \emptyset$.
f) Se utilizeaza afirmatia **A.5** si se obtine $x \in \mathbf{R}$.
g) Utilizand afirmatia **A.6** se obtine

$$x^2-2x+3 < \log_5 7.$$

Cum $x^2-2x+3 = x^2-2x+1+2 = (x-1)^2+2 \ge 2$, iar $\log_5 7 < \log_5 25 = 2$, rezulta ca aceasta inecuatie nu are solutii.

h) Multimea solutiilor inecuatiei se determina din sistemul (ce reprezinta DVA al inecuatiei):

$$\begin{cases} x-3 \ge 0, \\ x-8 \ne 8. \end{cases}$$

Din ultimul sistem se obtine $x \in [3; 8) \cup (8; +\infty)$.

Mentionam, ca toate procedeele de rezolvare a ecuatiilor exponentiale pot fi aplicate (cu modificarile respective) si in cazul inecuatiilor exponentiale.

Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiile

$a)\ 5^{2x+1} > 5^x + 4,$

$b)\ 5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0,$

$c)\ 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2},$

$d)\ 4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geq 0,$

$e)\ \dfrac{1}{3^x+5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1}-1},$

$f) 3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9.$

Rezolvare. a) Cum $5^{2x+1} = 5 \cdot (5^x)^2$, se noteaza $t = 5^x$ si se obtine inecuatia patrata

$$5t^2 - t - 4 > 0$$

cu solutiile $t < -\dfrac{4}{5}$ sau $t > 1$. Cum $t > 0$ ramane $t > 1$, adica $5^x > 1$, de unde $x > 0$.

b) Se observa ca inecuatia este omogena si impartind la 25^x se obtine inecuatia

$$5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Se noteaza $t = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ si se obtine inecuatia patrata

$$5t^2 - 18t + 9 > 0,$$

de unde deducem $t < \dfrac{3}{5}$ sau $t > 3$. Asadar

$$\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x < \dfrac{3}{5}, \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x > 3. \end{array}\right.$$

Se tine seama ca $0 < \dfrac{3}{5} < 1$ si se obtin solutiile $x > 1$ sau $x < \log_{\frac{3}{5}} 3$. Asadar solutiile inecuatiei formeaza multimea $x \in (-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3) \cup (1; +\infty)$.

c) Se utilizeaza metoda factorului comun si se obtine

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \;\Leftrightarrow\; 2^x \cdot 4 - 2^x \cdot 8 - 2^x \cdot 16 > 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 25 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2^x(4 - 8 - 16) > 5^x(5 - 25) \;\Leftrightarrow\; 2^x \cdot (-20) > 5^x \cdot (-20) \;\Leftrightarrow\; 2^x < 5^x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2^x}{5^x} < 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

d) Se divide inecuatia cu 2^{2x} si se obtine

$$4^{x^2-2x} - 10 \cdot 2^{x^2-2x} + 16 \geq 0,$$

se noteaza $t = 2^{x^2-2x}$ si se rezolva inecuatia patrata

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0,$$

solutiile careia sunt $t \leq 2$ sau $t \geq 8$. Asadar

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x^2-2x} \leq 2, \\ 2^{x^2-2x} \geq 8, \end{array}\right.$$

de unde rezulta

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x \leq 1, \\ x^2 - 2x \geq 3. \end{array}\right.$$

Solutiile primei inecuatii a totalitatii sunt $x \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$, iar a inecuatiei secunde $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Astfel $x \in (-\infty; -1] \cup [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}] \cup [3; +\infty)$.

e) Se noteaza $t = 3^x$ si se utilizeaza metoda intervalelor (se tine seama ca $t + 5 > 0$):

$$\frac{1}{t+5} \leq \frac{1}{3t-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{3t-1-t-5}{3t-1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2(t-3)}{3t-1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; t \in (\frac{1}{3}; 3].$$

Astfel $\frac{1}{3} < 3^x \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 3^{-1} < 3^x \leq 3^1 \;\Leftrightarrow\; x \in (-1; 1]$.

f) Se grupeaza convenabil, si se obtine

$$3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 \;\Leftrightarrow\; (3x - 9) + (12 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 4x \cdot 3^{\sqrt{x}}) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3(x-3) - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}(x-3) \geq 0 \;\Leftrightarrow (x-3)(3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}) \geq 0.$$

Cum $3^{\sqrt{x}} \geq 1$ rezulta $3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} \leq -1$ si astfel se obtine $x - 3 \leq 0$, de unde $x \leq 3$. Se tine seama de DVA al inecuatiei: $x \geq 0$ si se obtine raspunsul $x \in [0; 3]$.

In cele ce urmeaza se enunta cateva exemple de inecuatii exponentiale ce se rezolva prin metode speciale: tinand seama de domeniul de definitie si variatie, de monotonie, continuitate etc. (a se vedea [2]).

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiile:

$a)$ $\sqrt{4 - 2^{x-2}} < \log_2(x-5)$

$b)$ $3^x + 4^x \geq 25$

$c)$ $\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x-2}$

$d)$ $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

$e)$ $3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[4]{x-1}} \geq 2 \cdot 3^{\sqrt[6]{x-1}}$

Rezolvare. a) DVA a inecuatiei se determina rezolvand sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} x - 5 > 0, \\ 4 - 2^{x-2} \geq 0. \end{array}\right.$$

Se obtine

$$\left\{\begin{array}{l} x > 5, \\ x \leq 4, \end{array}\right.$$

adica DVA a inecuatiei este o multime vida si, prin urmare, inecuatia data nu are solutii.

b) Membrul din stanga inecuatiei reprezinta o functie crescatoare (ca suma a doua functii crescatoare). Cum pentru $x < 2$ avem $f(x) < f(2) = 25$, iar pentru $x \geq 2$ avem $f(x) \geq f(2) = 25$, rezulta ca multimea solutiilor inecuatiei este multimea $[2; +\infty)$.

c) Se observa ca expresia $a^b - a^c$ pentru $a > 1$ este de acelasi semn cu expresia $(b - c)$, si de semne contrare, daca $0 < a < 1$, rezulta ca pentru $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ expresia $a^b - a^c$ si $(a-1)(b-c)$ sunt de acelasi semn.

Astfel inecuatia data se scrie

$$\left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x-2} - \left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{x-3x^2} < 0$$

si este echivalenta cu inecuatia

$$\left(\frac{x^4+1}{2x^2} - 1\right)(2x - 2 - x + 3x^2) < 0,$$

sau

$$\begin{cases} (x^4 - 2x^2 + 1)(3x^2 + x - 2) < 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

de unde,

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2(x + 1)(3x - 1) < 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Se rezolva cu ajutorul metodei intervalelor si se obtine

$$x \in (-1; 0) \cup (0; \frac{2}{3}).$$

d) Se observa ca $\sqrt{5} - 2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = (\sqrt{5}+2)^{-1}$ si se obtine inecuatia

$$(x-1)(1 + \frac{1}{x+1}) \geq 0$$

sau

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \geq 0$$

de unde $x \in [-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

e) Se utilizeaza inegalitatea

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

justa pentru orice $a \geq 0,\ b \geq 0$, si se obtine

$$\frac{3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[4]{x-1}}}{2} \geq \sqrt{3^{\sqrt[12]{x-1}} \cdot 3^{\sqrt[4]{x-1}}} = 3^{\frac{\sqrt[12]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{2}} \geq 3^{\sqrt{\sqrt[12]{x-1} \cdot \sqrt[4]{x-1}}} = 3^{\sqrt[6]{x-1}}.$$

Asadar inecuatia se verifica de orice x din DVA, adica $x \in [1; +\infty)$.

Sa se rezolve inecuatiile

1. $8^{5-\frac{x}{3}} > 4.$

2. $\dfrac{(\sqrt{5})^{x-10}}{4^{x-10}} > \dfrac{5\sqrt{5}}{64}.$

3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x} > \left(\dfrac{1}{9}\right)^{16-x}.$

4. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1.$

5. $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leq 5^{x+3} - 3^{x+3}.$

6. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$

7. $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0.$

8. $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leq 3^{x^2+2}.$

9. $4^{\sqrt{9-x^2}} + 2 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}.$

10. $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$

11. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x+1}{x-1}}.$

12. $\dfrac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \geq 1.$

13. $\dfrac{5}{2^{x+2} - 1} > \dfrac{1}{2^x - 1}.$

14. $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \geq 7 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}.$

15. $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \geq 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9.$

16. $(x^2 - x + 1)^{x^2-2{,}5x+1} < 1.$

17. $\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}.$

18. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} \geq 1.$

19. $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}.$

20. $|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3.$

Bibliografie.

1. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.

2. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.