II. Тригонометрические неравенства

Основной способ решения тригонометрических неравенств состоит в их сведении к неравенствам вида

$$\sin x \vee a, \quad \cos x \vee a, \quad \operatorname{tg} x \vee a, \quad \operatorname{ctg} x \vee a, \tag{1}$$

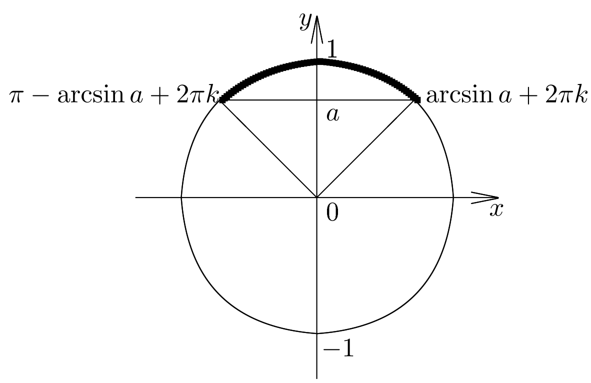
где $a \in \mathbf{R}$, символ " $\vee$ " означает знак сравнения и заменяет любой из знаков " $>$ ", " $\geq$ ", " $<$ ", " $\leq$ " и использовании следующих утверждений.

Утверждение 1. Множество решений неравенства

$$\sin x > a \tag{2}$$

есть

1. $\mathbf{R}$, если $a < -1$;
2. $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k)$, если $-1 \leq a < 1$;
3. Пустое множество, если $a \geq 1$.

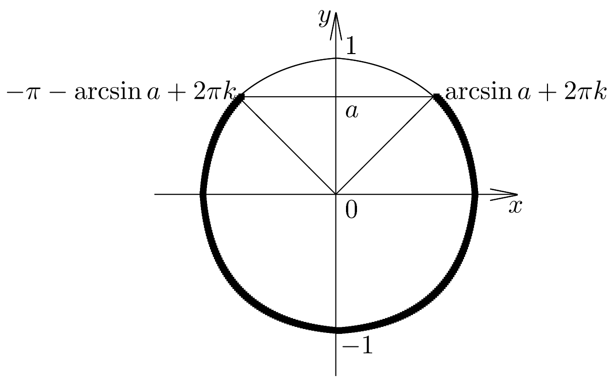


Утверждение 2. Множество решений неравенства

$$\sin x < a \tag{3}$$

есть

1. $\mathbf{R}$, если $a > 1$;
2. $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k)$, если $-1 < a \leq 1$;
3. Пустое множество, если $a \leq -1$.

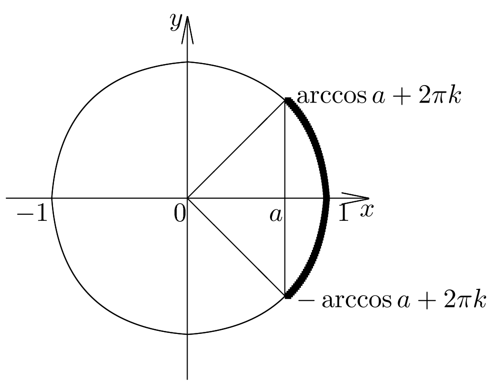


Утверждение 3. Множество решений неравенства

$$\cos x > a \tag{4}$$

есть

1. $\mathbf{R}$, если $a < -1$;
2. $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (2\pi k - \arccos a; 2\pi k + \arccos a)$, если $-1 \le a < 1$;
3. Пустое множество, если $a \ge 1$.

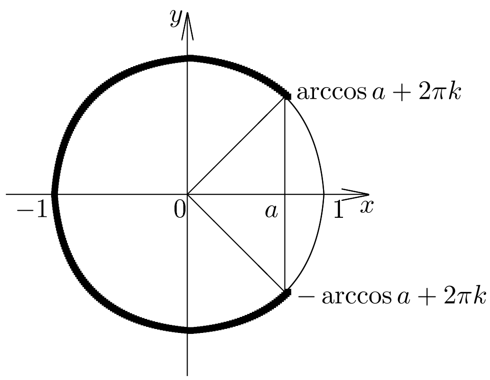


Утверждение 4. Множество решений неравенства

$$\cos x < a \tag{5}$$

есть

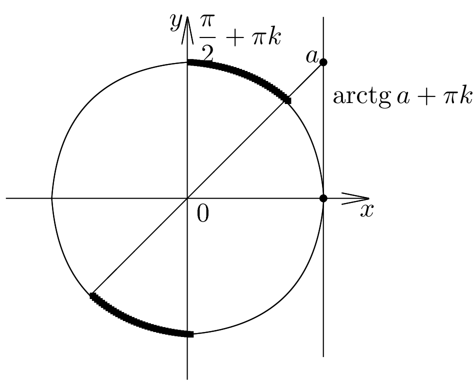
1. $\mathbf{R}$, если $a > 1$;
2. $\bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} (2\pi k + \arccos a; 2\pi(k+1) - \arccos a)$, если $-1 < a \le 1$;
3. Пустое множество, если $a \le -1$.



Утверждение 5. Множество решений неравенства

$$\operatorname{tg} x > a \tag{6}$$

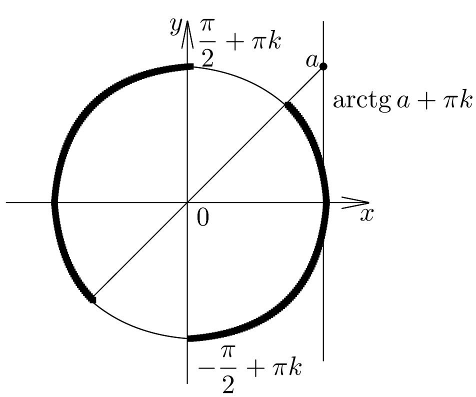
есть $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(\operatorname{arctg} a+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k)$.



Утверждение 6. Множество решений неравенства

$$\operatorname{tg} x < a \tag{7}$$

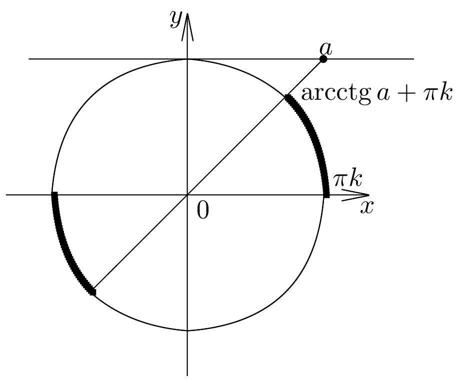
есть $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\operatorname{arctg} a+\pi k)$.



Утверждение 7. Множество решений неравенства

$$\operatorname{ctg} x > a \tag{8}$$

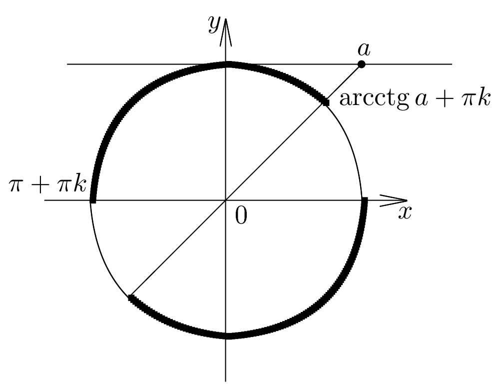
есть $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k)$.



Утверждение 8. Множество решений неравенства

$$\operatorname{ctg} x < a \tag{9}$$

есть $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi k; \pi(k+1))$



Замечания. 1. Если знак неравенства (2)-(9) нестрогий, то во множестве решений неравенства включается также и множество решений соответствующего уравнения.

2. Утверждения (1)-(8) легко доказать используя графики и свойства соответствующих тригонометрических функций.

Упражнение 1. Решить неравенства

1) $\sin 2x < \dfrac{1}{2}$;

2) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \le \sqrt{2}$;

3) $\cos^2 x \ge \dfrac{1}{4}$;

4) $-2 \le \operatorname{tg} x < 1$;

5) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$;

6) $\sin^4 x + \cos^4 x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 2 \le 0$;

8) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x > \sqrt{2}$;

9) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \ge 2$;

10) $4\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) < \sin 6x$;

11) $\sin x \sin 3x \ge \sin 5x \sin 7x$;

12) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

Решение. 1) Обозначив $2x = t$, получим неравенство $\sin t < \dfrac{1}{2}$ которое, согласно утверждению 2, имеет решения

$$2\pi k - \pi - \arcsin\frac{1}{2} < t < \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда, учитывая что $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, получим

$$2\pi k - \pi - \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

или

$$2\pi k - \frac{7\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

или

$$\pi k - \frac{7\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства есть

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\pi k - \frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12} + \pi k\right).$$

2) Используя нечетность функции синус, получим

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Обозначив $t = x - \dfrac{\pi}{4}$, получим неравенство

$$\sin t \ge -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

решения которого (см. утверждение 1 и замечание 1) есть

$$2\pi k + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le t \le \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда, учитывая что $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$, получим

$$2\pi k - \frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

или

$$2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3) Поскольку $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, неравенство примет вид $\frac{1+\cos 2x}{2} \ge \frac{1}{4}$ или $\cos 2x \ge -\frac{1}{2}$. Используя утверждение 3 получим

$$2\pi k - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \le 2x \le \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, следует

$$2\pi k - \frac{2\pi}{3} \le 2x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

откуда

$$\pi k - \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Данное неравенство можно решить и иначе.

$$\cos^2 x \ge \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; |\cos x| \ge \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \cos x \ge \frac{1}{2}, \\ \cos x \le -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\pi n - \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ 2\pi m + \frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \pi k - \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

4) Используя утверждения 5 и 6, получим

$$-2 \le \operatorname{tg} x < 1 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \ge -2, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \pi m - \operatorname{arctg} 2 < x < \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \pi k - \operatorname{arctg} 2 \le x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

5) Обозначим $t = \sin x$ и получим квадратное неравенство

$$2t^2 - 5t + 2 > 0$$

решение которого есть

$$\left[\begin{array}{l} t < \dfrac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Отсюда следует совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \sin x > 2, \\ \sin x < \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности решений не имеет, а из второго получим

$$2\pi k - \frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

6) Поскольку

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4},$$

неравенство примет вид

$$1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

или $\cos 4x \geq 2\sqrt{3} - 3$. Так как $|2\sqrt{3} - 3| \leq 1$, используя утверждение 3, получим

$$2\pi k - \arccos(2\sqrt{3} - 3) < 4x < \arccos(2\sqrt{3} - 3) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

или

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{1}{4}\arccos(2\sqrt{3} - 3) < x < \frac{1}{4}\arccos(2\sqrt{3} - 3) + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

7) Положив $t = \operatorname{ctg} x$, получим квадратное неравенство

$$t^2 - t - 2 \leq 0$$

решение которого $-1 \leq t \leq 2$, откуда $-1 \leq \operatorname{ctg} x \leq 2$. Последнее неравенство решаем используя утверждения 7 и 8

$$-1 \leq \operatorname{ctg} x \leq 2 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x \leq 2, \\ \operatorname{ctg} x \geq -1, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \pi k + \operatorname{arcctg} 2 \leq x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \\ \pi m < x \leq \dfrac{3\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \pi k + \operatorname{arcctg} 2 \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

8) Используя метод вспомогательного угла, получим

$$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x>\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x>\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}>\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\pi k+\frac{\pi}{4}<2x-\frac{\pi}{3}<\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\pi k+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}<2x<\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi k+\frac{7\pi}{24}<x<\frac{13\pi}{24}+\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}.$$

9) Сделаем подстановку $\operatorname{tg} x=t$ и решим неравенство используя метод интервалов

$$\frac{2t}{1+t}+\frac{1}{t}\geq 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{2t^2+1+t-2t(1+t)}{t(t+1)}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-t}{t(t+1)}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 0<t\leq 1,\\ t<-1. \end{array}\right.$$

Таким образом пролучена совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 0<\operatorname{tg} x\leq 1,\\ \operatorname{tg} x<-1, \end{array}\right.$$

которое решается используя утверждения 5 и 6

$$\left[\begin{array}{l} 0<\operatorname{tg} x\leq 1,\\ \operatorname{tg} x<-1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x\leq 1,\\ \operatorname{tg} x>0, \end{array}\right.\\ -\dfrac{\pi}{2}+\pi m<x<-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \quad m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow$$

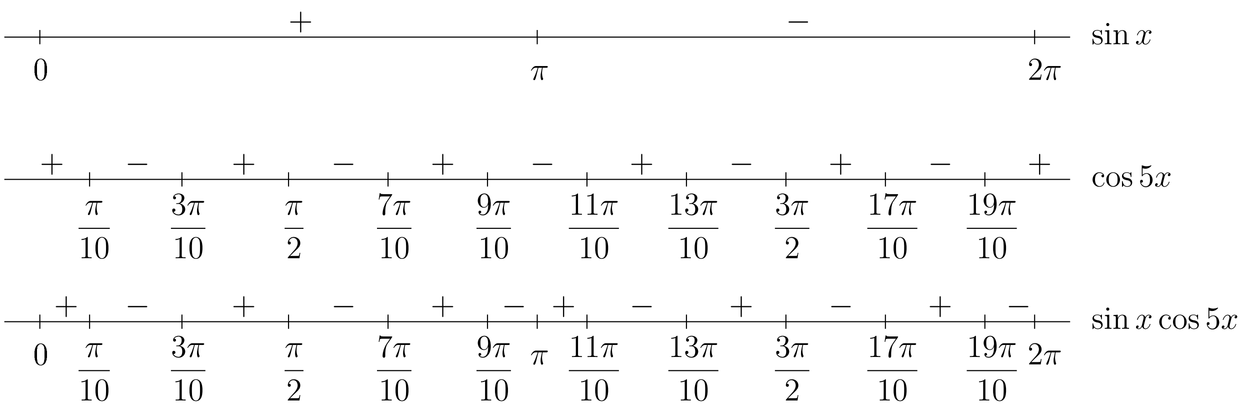
$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \pi n<x\leq\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z},\\ -\dfrac{\pi}{2}+\pi m<x<-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \quad m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

10) Используя формулы синуса и косинуса двойного аргумента получим

$$4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)<\sin 10x \;\Leftrightarrow\; 2\sin 2x\cdot\cos 2x<\sin 6x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sin 4x<\sin 6x \;\Leftrightarrow\; \sin 6x-\sin 4x>0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin x\cos 5x>0.$$

Учитывая что 2π есть один из периодов функции $f(x)=\sin x\cos 5x$ и используя обобщенный метод интервалов для интервала длины 2π, получим



Таким образом, множество решений данного неравенства есть обьединение множеств:

$$\left(2\pi k; \frac{\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{10} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{7\pi}{10} + 2\pi k; \frac{9\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup$$

$$\cup \left(2\pi k + \pi; \frac{11\pi}{10} + 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k + \frac{13\pi}{10}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{17\pi}{10} + 2\pi k; \frac{19\pi}{10} + 2\pi k\right).$$

11) $\sin x \sin 3x \geq \sin 2x \sin 4x \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \geq \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x) \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ -\cos 4x \geq -\cos 6x \ \Leftrightarrow\ \cos 6x - \cos 4x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ -2\sin x \sin 5x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ \sin x \sin 5x \leq 0.$
Решая последнее неравенство и аналогично предыдущему примеру получим

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{2\pi}{5}n; \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}n\right].$$

12) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0 \ \Leftrightarrow\ (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x > 0 \ \Leftrightarrow\ 2\sin 2x \cos x + \sin 2x > 0 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \sin 2x(2\cos x + 1) > 0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin 2x > 0, \\ \cos x > -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \sin 2x < 0, \\ \cos x < -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ 2\pi m + \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\pi m < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \\ 2\pi m - \dfrac{2\pi}{3} < x < -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}, \\ 2\pi m + \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства

1. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 > 0.$
2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq 2.$
3. $\sin 2x < \cos x.$
4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \geq 0.$
5. $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 > 0.$
6. $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\sin x - 1} < 0.$
7. $2 \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \leq 0.$
8. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) < -\sqrt{3}.$
9. $2 \sin^2 x + 9 \cos x - 6 \geq 0.$
10. $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} \geq 0.$
11. $4 \sin x \cos x - \sqrt{2} < 2(\sqrt{2} \cos x - \sin x).$
12. $\cos 2x + \sin x \geq 0.$