Тождественные преобразования алгебраических выражений

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, получаемое из постоянных и переменных при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня.

Примеры алгебраических выражений:

$$E = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}; \qquad E(x,y) = \left(\frac{x+\sqrt[3]{2xy^2}-1}{3\sqrt{z-x}-\sqrt{y}}\right)^{\frac{5}{4}};$$

$$E(x,y,z) = \frac{x+y}{xy} - z; \qquad E(x,y) = (x+y)^3 - 3xy(x+y).$$

Определение. Областью допустимых значений (сокращенно *ОДЗ*) алгебраического выражения $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($D(E)$) называется множество всех наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых выражение $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет смысл.

Например, *ОДЗ* выражения $E(x,y) = \dfrac{x+y}{xy} - z$ является $D(E) = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ xy \neq 0\}$, *ОДЗ* выражения $E(x,y) = \sqrt{xy} - 2z$ является множество $\{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbf{R},\ xy \geq 0\}$.

Определение. Алгебраические выражения E_1 и E_2 называются тождественно равными на множестве $M \subset D(E_1) \cap D(E_2)$, если при любых значениях переменных из M соответствующие числовые значения этих выражений равны.

Например, $\sqrt{x^2} = x$ на множестве $[0; +\infty)$, $\sqrt{a^2} = -a$ на множестве $(-\infty; 0]$; $\dfrac{x^2-1}{x+1} = x - 1$ на множестве $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ на множестве $\{(x,y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$.

Определение. Тождественным преобразованием алгебраического выражения на множестве $M \subseteq D(E)$ называется замена этого выражения на тождественно равное ему на множестве M.

Замечание. Отметим, что иногда опускают множество, на котором алгебраические выражения тождественно равны, имея при этом ввиду их тождественное равенство на пересечении областей допустимых значений.

Например,

$$\sqrt{a^2} = |a| \ (M = \mathbf{R}); \quad \frac{a(a+1)}{a} = \frac{a^2-1}{a-1} \ (M = \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}).$$

При выполнении тождественных преобразований оказываются полезными следующие формулы.

I. Формулы сокращенного умножения

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Эти формулы получаются как следствия из более общих формул:

5. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \in \mathbf{N})$;

6. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}) \quad (n \in \mathbf{N})$;

7. (бином Ньютона)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n a^n b^0,$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 0! = 1.$

II. Свойства степеней

Следующие свойства справедливы для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел α и β.

1. $a^0 = 1$;

2. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$;

3. $a^{\alpha-\beta} = \dfrac{a^\alpha}{a^\beta}$;

4. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$;

5. $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$;

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

7. $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$.

Замечание 1. Отметим, что отрицательные числа также можно возводить в некоторые степени (целые и, более общо, рациональные вида $\frac{m}{2n-1}$, где m - целое, n - натуральное).

Замечание 2. $0^\alpha = 0$ для любого $\alpha > 0$.

III. Свойства радикалов

1. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n - \text{ нечетное,} \\ |a|, & \text{если } n - \text{ четное.} \end{cases}$

2. $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}$, если $a \geq 0,\ b \geq 0,\ k \in \mathbf{N}$.

3. $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|}\,\sqrt[2k]{|b|}$, если $ab \geq 0,\ k \in \mathbf{N}$.

4. $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a}\,\sqrt[2k+1]{b}, \quad k \in \mathbf{N}$.

5. $(\sqrt[m]{a})^k = \sqrt[m]{a^k}$, где $a \geq 0$, если m - четно, $a \in \mathbf{R}$, если m - нечетно.

6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0,\ b > 0,\ n$ - четно или $b \neq 0,\ a \in \mathbf{R}$, если n - нечетно.

7. $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}, \quad a \geq 0$.

8. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$, где $a \geq 0$, если m - четно или n четно, $a \in \mathbf{R}$, если $m \cdot n$ - нечетно.

9. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, \quad a \in \mathbf{R}$.

10. $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - cb^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - cb^2}}{2}}$, где $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ и $a^2 \geq b^2 c$.

Пример 1. Определить *ОДЗ* алгебраических выражений:

$$a)\ E(x) = \sqrt[6]{x + x^2 - 2x^3};$$

$$b)\ E(x,y) = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{|x-y|} + \frac{y}{x+y}\right);$$

$$c)\ E(a,b,c,d) = \frac{a}{b+c} + \frac{\sqrt{d}}{b^2 c + c^2 b}.$$

Решение. a) *ОДЗ* данного выражения определяется из неравенства $x + x^2 - 2x^3 \geq 0$, которое решаем при помощи метода интервалов:

$$x + x^2 - 2x^3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(1 + x - 2x^2) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(2x+1)(1-x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [0; 1].$$

Таким образом, $D(E) = (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [0; 1]$.

b) Отметим, что выражение имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0, \\ |x - y| \neq 0, \\ x + y \neq 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $D(E) = \{(x, y) \mid x \neq y,\ x \neq -y\}$.

c) Так как знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, а корень второй степени существует только из неотрицательных выражений, то для определения *ОДЗ* получим систему

$$\begin{cases} b + c \neq 0, \\ b^2c + c^2b \neq 0, \\ d \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c \neq 0, \\ bc(b + c) \neq 0, \\ d \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c \neq 0, \\ b \neq 0, \\ c \neq 0, \\ d \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, *ОДЗ* исходного выражения равна
$\{(a, b, c, d) \mid b + c \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \geq 0\}$.

Пример 2. Определить, являются ли выражения A и B тождественно равными на множестве M:

$$a)\ A = \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab(a - b)}, \quad B = \frac{1}{ab}, \quad M = \{(a, b) \mid a > b > 0\};$$

$$b)\ A = \frac{a - \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2 - 3}}, \quad B = \frac{2a}{a + \sqrt{3}}, \quad M = \{a \mid a > \sqrt{3}\}.$$

Решение. a) Так как $a\sqrt{a} = (\sqrt{a})^3$, $b\sqrt{b} = (\sqrt{b})^3$, $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$ на множестве

M, то, применив формулу сокращенного умножения, получим:

$$A = \left(\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{ab((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2)} =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 - \sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} =$$

$$= \left[(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \frac{1}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})} =$$

$$= |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \cdot \frac{1}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})}.$$

Условие $a > b > 0$ влечет $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, и, следовательно, $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b}$. Отсюда получаем, что $A = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\dfrac{1}{ab(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \dfrac{1}{ab} = B$. Таким образом, выражения A и B тождественно равны на множестве M.

b) Подобно предыдущему примеру

$$A = \frac{a - \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 - 3}} = \frac{a - \sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{(a^2 + 3)^2 - 4a^2 \cdot 3}{4a^2}}} = \frac{(a - \sqrt{3}) \cdot 2|a|}{\sqrt{(a^2 - 3)^2}} =$$

$$= \frac{(a - \sqrt{3}) \cdot 2|a|}{|a^2 - 3|} = \frac{2a}{a + \sqrt{3}} = B.$$

При преобразованиях учитывается, что, если $a > \sqrt{3}$, то $\sqrt{a^2} = a$, и $\sqrt{(a^2 - 3)^2} = |a^2 - 3| = a^2 - 3$.

Пример 3. Упростить выражения:

$$a)\ \frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2};$$

$$b)\ \left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right)\frac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}};$$

$$c)\ \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3};$$

$$d)\ \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)};$$

$$e)\ \frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)}+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)};$$

$$f)\ \frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-x)(y-z)}+\frac{x-y}{(z-x)(z-y)};$$

$$g)\ \frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}.$$

Решение. *ОДЗ* выражения определяется из системы $\begin{cases} b^2-4\geq 0, \\ 2b+2\sqrt{b^2-4}\geq 0, \\ \sqrt{b^2-4}+b+2>0, \end{cases}$ решая которую, получим $b\geq 2$.

Выполним равносильные на *ОДЗ* преобразования:

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{b-2})^2+(\sqrt{b+2})^2+2\sqrt{b-2}\sqrt{b+2}}}{\sqrt{b-2}\sqrt{b+2}+(\sqrt{b+2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})^2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{|\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}|}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{1}{\sqrt{b+2}},$$

так как на *ОДЗ* $\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\geq 2$, следовательно, $|\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}|=\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}$. Таким образом, при $b\geq 2$ исходное выражение равно $\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}$.

b) *ОДЗ* данного выражения является множество $\{(m,n)\mid m\geq 0,\ n\geq 0,\ m\neq n\}$. Обозначив $\sqrt[6]{m}=a$, $\sqrt[6]{n}=b$, получим $\sqrt[3]{m}=a^2$, $\sqrt[3]{m^2}=a^4$, $m=a^6$ и $\sqrt[3]{n}=b^2$, $\sqrt[3]{n^2}=b^4$,

$n = b^6$, выражение принимает вид

$$\left(\frac{a^2b^4 + a^4b^2}{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} - 2b^2 + \frac{a^6 - b^6}{a^4 - b^4}\right)\frac{1}{a+b} =$$

$$= \left(\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2} - 2b^2 + \frac{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\right)\frac{1}{(a+b)} =$$

$$= \frac{a^2b^2 - 2b^2(a^2+b^2) + a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{a+b} =$$

$$= \frac{a^4 - b^4}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{(a^2+b^2)(a-b)(a+b)}{(a^2+b^2)(a+b)} = a - b.$$

Таким образом, исходное выражение на *ОДЗ* тождественно равно $\sqrt[6]{m} - \sqrt[6]{n}$.

c) На *ОДЗ* $= \{(a,b,c) \mid a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ a^2 + c^2 \neq 0\}$ выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3} = \frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc}(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3} =$$

$$= \frac{4\sqrt{bc} + bc + 3}{\sqrt{bc}+3} = \frac{3\sqrt{bc} + 3 + \sqrt{bc} + bc}{\sqrt{bc}+3} = \frac{3(\sqrt{bc}+1) + (1+\sqrt{bc})\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}+3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{bc}+1)(\sqrt{bc}+3)}{\sqrt{bc}+3} = \sqrt{bc} + 1.$$

d) *ОДЗ* данного выражения является множество $\{(a,b,c) \mid a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c\}$. Приводя выражение к общему знаменателю, получим:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = \frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}.$$

Учитывая вид знаменателя, разложим на множители числитель:

$$a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a) = c(a^3-b^3) + ab(b^2-a^2) + c^3(b-a) =$$

$$= (a-b)(c(a^2+ab+b^2) - ab(a+b) - c^3) = (a-b)(c(a^2-c^2) + ab(c-a) + b^2(c-a)) =$$

$$= (b-c)(a-b)(-a^2b - a^2c + c^2(a+b)) = (a-b)(b-c)(b(c^2-a^2) + ac(c-a)) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

Следовательно, на *ОДЗ* исходное выражение тождественно равно $ab + bc + ca$.

f) *ОДЗ* выражения является множество $\{(x,y,z) \mid x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x\}$. Первое слагаемое выражения преобразуем следующим образом:

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)} = \frac{x-z-x+y}{(x-y)(x-z)} = \frac{x-z}{(x-y)(x-z)} - \frac{x-y}{(x-y)(x-z)} = \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z}.$$

Аналогично преобразуются и другие слагаемые:

$$\frac{z-x}{(y-z)(y-x)} = \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x};$$
$$\frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}.$$

Следовательно,

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} =$$
$$= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} =$$
$$= \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.$$

g) *ОДЗ* выражения равна $\mathbf{R} \setminus \{-2;0;3\}$. Учитывая, что выражение содержит $|m|$ и $|m-3|$, рассмотрим три случая:

1. пусть $m \in (-\infty;-2) \cup (-2;0)$; тогда $|m| = -m$, $|m-3| = -(m-3)$, и выражение принимает вид

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{-(m+2)(m-3)m} = \frac{1}{m+2};$$

2. пусть $m \in (0;3)$; тогда $|m| = m$, $|m-3| = -(m-3)$, и выражение принимает вид

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)m} = -\frac{1}{m+2};$$

3. пусть $m \in (3;+\infty)$; тогда $|m| = m$, $|m-3| = m-3$, и выражение принимает вид

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{1}{m+2}.$$

Таким образом,

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+2}, & \text{если } m \in (-\infty;-2) \cup (-2;0) \cup (3;+\infty), \\ -\dfrac{1}{m+2}, & \text{если } m \in (0;3). \end{cases}$$

Пример 4. Разложить на множители:

$$a)\ (x+y)(y+z)(z+x)-xyz;$$

$$b)\ x^3+y^3+z^3-3xyz;$$

$$c)\ x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1;$$

$$d)\ x^5+x+1.$$

Решение. a) Прибавляя и вычитая $z(y+z)(z+x)$, а затем группируя удобным образом, получим:

$$\begin{aligned}
&(x+y)(y+z)(z+x)+z(y+z)(z+x)-z(y+z)(z+x)-xyz=\\
&=(y+z)(z+x)(x+y+z)-z((y+z)(z+x)-xy)=\\
&=(y+z)(z+x)(x+y+z)-z(z^2+yz+zx)=\\
&=(y+z)(z+x)(x+y+z)-z^2(x+y+z)=\\
&=(x+y+z)((y+z)(z+x)-z^2)=(x+y+z)(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

b) Применяется формула суммы кубов и решается подобно предыдущему упражнению

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)(x^2-xy+y^2)+z(z^2-3xy)=\\
&=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)+z(z^2-3xy-x^2+xy-y^2)=\\
&=(x+y+z)(x^2-xy+y^2)+z(z^2-(x+y)^2)=\\
&=(x+y+z)(x^2-xy+y^2+z(z-x-y))=\\
&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).
\end{aligned}$$

c) Применяя формулы сокращенного умножения, получим:

$$\begin{aligned}
&x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^9-1}{x-1}=\frac{(x^3)^3-1^3}{x-1}=\\
&=\frac{(x^3-1)(x^6+x^3+1)}{x-1}=(x^2+x+1)(x^6+x^3+1).
\end{aligned}$$

d) $x^5+x+1=1+x+x^2-x^2+x^5=1+x+x^2-x^2(1-x^3)=(1+x+x^2)-x^2(1-x)(1+x+x^2)=$ $=(1+x+x^2)(1-x^2(1-x))=(1+x+x^2)(1-x^2+x^3).$

Пример 5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$a)\ \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}};\quad b)\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}};\quad c)\ \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Умножая на выражение сопряженное знаменителю, получим:
a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}.$
b) Подобно примеру a) получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{15}-1)}{(2\sqrt{15})^2-1}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{15}-1)}{59}.$$

c) Из формулы (см., например, 4 b)):

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

следует

$$x+y+z=\frac{(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}.$$

На основании последнего соотношения получим

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1^2+(\sqrt[3]{2})^2+(2\sqrt[3]{4})^2-\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{8}}{1^3+(\sqrt[3]{2})^3+(2\sqrt[3]{4})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 2\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{7\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}.$$

Пример 6. Доказать, что приведенные выражения представляют собой целые числа. Вычислить эти числа.

$a)$ $\sqrt{|20\sqrt{7}-53|}-\sqrt{20\sqrt{7}+53};$

$b)$ $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3};$

$c)$ $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}.$

Решение. a) Выделяя полный квадрат под знаком радикала, получим

$$\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{7})^2}=|5-2\sqrt{7}|-|5+2\sqrt{7}|=2\sqrt{7}-5-5-2\sqrt{7}=-10.$$

b) Выделяя полный куб под знаком корня третей степени, получим

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2.$$

c) Учитывая, что

$$
\begin{aligned}
&6 \pm 2\sqrt{5} = 5 \pm 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} \pm 1)^2,\\
&\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{5} - 2} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1,\\
&\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{8 - 2\sqrt{5} - 2} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1,\\
&\sqrt{13 - 4(\sqrt{5} + 1)} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4} = \sqrt{5} - 2,\\
&\sqrt{13 + 4(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{5} + 2,\\
&\sqrt{26 + 6(\sqrt{5} - 2)} = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{5 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 9} = \sqrt{5} + 3,\\
&\sqrt{26 - 6\sqrt{\sqrt{5} + 2}} = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = |\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5},
\end{aligned}
$$

получим, что исходное выражение равно

$$\sqrt{5} + 3 + 3 - \sqrt{5} = 6.$$

Условные тождества.

Пример 7. a) Вычислить $x^2 + y^2 + z^2$, если $x + y + z = 1$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$.

b) Доказать, что равенство $xyz = 1$ влечет

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1.$$

c) Доказать, что если $x + y + z = 0$, то $x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2$.

d) Доказать, что для любых трех последовательных членов геометрической прогрессии выполняется равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3).$$

e) Доказать, что, если $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, и не все числа $x_j,\ j = \overline{1,3}$ и $y_i,\ i = \overline{1,3}$ равны нулю, то

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{2}{3}.$$

Решение. a) Из равенства $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ следует $xy + yz + zx = 0$. Отсюда

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 1^2 - 2 \cdot 0 = 1.$$

b) Заметим, что условие $xyz = 1$ влечет

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{xyz+z+zx} = \frac{1}{z(1+x+xy)} = \frac{xy}{1+x+xy},$$

$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{1}{y(1+z+zx)} = \frac{1}{y\cdot z(1+x+xy)} = \frac{x}{1+x+xy}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

c) Учитывая, что $x + y = -z$, получим

$$2(xy+yz+zx)^2 = 2(xy+z(x+y))^2 = 2(xy-(x+y)^2)^2 =$$

$$= 2(x^2+xy+y^2)^2 = 2(x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3) =$$

$$= x^4+y^4+(y^4+4xy^3+6x^2y^2+4yx^3+x^4) = x^4+y^4+(x+y)^4 =$$

$$= x^4+y^4+(-z)^4 = x^4+y^4+z^4.$$

d) Так как $a_1a_3 = a_2^2$ (характеристическое свойство геометрической прогрессии), следовательно,

$$(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_2(a_1+a_2+a_3).$$

Отсюда получаем:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2 = (a_1+a_2+a_3)^2 - 2a_2(a_1+a_2+a_3) = (a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3).$$

e) Рассмотрим векторы (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и $(1, 1, 1)$. Заметим, что эти векторы попарно ортогональны, так как их скалярные произведения равны нулю. Следовательно, векторы

$$g_1 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right),$$

$$g_2 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \frac{y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\right),$$

$$g_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{R}^3$. Значит, для каждого вектора $x \in \mathbf{R}^3$ справедливо равенство

$$(x, g_1)^2 + (x, g_2)^2 + (x, g_3)^2 = 1.$$

В частности, для $x = e_1 = (1, 0, 0)$ получим

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \frac{1}{3} = 1,$$

откуда и следует искомое равенство.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить *ОДЗ* выражений:

$a)\ y = \sqrt{3x - x^2}.$ *Ответ:* $[0; 3]$.

$b)\ y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$ *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$.

$c)\ y = \dfrac{(b + c)(a + c)}{ab + cd + cb + ad}.$ *Ответ:* $\{(a, b, c) \mid a \neq -c,\ b \neq -d\}$.

2. Определить, являются ли выражения A и B тождественно равными на множестве M, если

$$A = \frac{a - \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a^2 + 3}{2a}^{2} - 3\right)}}, \quad B = \frac{2a}{a + \sqrt{3}}, \quad M = \{a :\ a > \sqrt{3}\}.$$

Ответ: Да.

3. Упростить выражения:

a) $\left(\frac{\sqrt{a+1}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a+1}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a+1}-1}{\sqrt{a+1}+1}-\frac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{a+1}}{a}.$ *Ответ:* $-1.$

b) $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$ *Ответ:* $-\frac{a^4}{a^2+b^2}.$

c) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$ *Ответ:* $\sqrt{x}(x-1).$

d) $\frac{ab}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}.$ *Ответ:* $b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.$

e) $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $a>1;$ $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $-1<a<1.$

f) $\frac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}.$

Ответ: $\frac{1}{a+3}$ при $a>2;$ $\frac{1}{a+2}$ при $a<2,\ a\neq-3,\ a\neq-1.$

g) $\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$ *Ответ:* $0.$

4. Разложить на множители:

a) $x^4+x^2+1.$ *Ответ:* $(x^2+x+1)(x^2-x+1).$

b) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$ *Ответ:* $3(x-y)(y-z)(z-x).$

5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

a) $\frac{9}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}.$ *Ответ:* $\frac{9(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}.$

b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}.$ *Ответ:* $\frac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{2}.$

6. Доказать, что приведенные выражения представляют собой целые числа. Вычислить эти числа.

$$a)\ \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}.$$

Ответ: 1.

$$b)\ \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$$

Ответ: 3.