

Арифметические и геометрические прогрессии

Арифметическая прогрессия

Определение 1. Числовая последовательность $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ называется арифметической прогрессией, если существует действительное число d (называемое разностью прогрессии), такое, что

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (\forall n \in \mathbf{N}), \quad (1)$$

то есть, каждый член последовательности (начиная со второго) равен предыдущему плюс одно и то же число (разность прогрессии).

Пример 1. Проверить, являются ли данные последовательности арифметическими прогрессиями

$$a) \ a_n = 2n - 1; \quad b) \ 3, 6, 9, \dots, 3k \dots; \quad c) \ a_n = \frac{1}{n}.$$

Решение. а) Разность $a_{n+1} - a_n$ является постоянным числом для любого $n \in \mathbf{N}$

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2,$$

следовательно, последовательность, заданная общим членом $a_n = 2n - 1$, является арифметической прогрессией с разностью 2:

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$$

б) Аналогично решению примера а), получим

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 3n = 3 \quad (\forall n \in \mathbf{N}),$$

и, следовательно, данная последовательность является арифметической прогрессией с разностью 3.

с) Выпишем первые три члена последовательности $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$ и заметим, что $a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} \neq a_3 - a_2 = -\frac{1}{6}$, то есть, данная последовательность не образует арифметическую прогрессию.

Иначе, рассматривая разность $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n}$, заметим, что она зависит от n (не является постоянным числом) и, следовательно, данная последовательность не является арифметической прогрессией.

Свойства арифметической прогрессии

Доказательства приведенных ниже свойств можно найти, например, в [1].

P1. Общий член арифметической прогрессии a_n определяется по формуле

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (2)$$

где a_1 - первый член прогрессии, d - ее разность.

P2. (Характеристическое свойство арифметической прогрессии). n -ый член арифметической прогрессии является средним арифметическим равноудаленных от него членов прогрессии:

$$a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (3)$$

Замечание. Из свойства **P2** следуют необходимые и достаточные условия:

а) три числа a, b, c (в указанной очередности) образуют арифметическую прогрессию, если

$$2b = a + c, \quad (4)$$

б) три числа a, b, c (независимо от очередности) образуют арифметическую прогрессию, если

$$(2b - a - c)(2c - a - b)(2a - b - c) = 0. \quad (5)$$

P3. Если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - арифметическая прогрессия и $k+n = m+p$ ($k, n, m, p \in \mathbb{N}$), то

$$a_k + a_n = a_m + a_p. \quad (6)$$

P4. Сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (7)$$

или, учитывая (2),

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \quad (8)$$

Определение 2. Арифметическая прогрессия называется возрастающей (убывающей) если ее разность - положительное (отрицательное) число. Если разность прогрессии равна нулю, имеем постоянную последовательность.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Определить арифметическую прогрессию, если $a_3 = 2$ и $a_5 = -2$.

Решение. Используя формулу общего члена арифметической прогрессии, получим систему

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d, \\ a_5 = a_1 + 4d, \end{cases}$$

или, учитывая условия примера,

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 2, \\ a_1 + 4d = -2, \end{cases}$$

откуда находим первый член арифметической прогрессии $a_1 = 6$ и ее разность $d = -2$.

Пример 3. Определить число x , если числа $a - x, x, b$ (a, b даны) в указанной последовательности образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получим линейное уравнение

$$2x = a - x + b,$$

откуда $x = \frac{a+b}{3}$.

Пример 4. Определить арифметическую прогрессию, сумма первых n членов которой определяется по формуле

$$S_n = 3n^2 + 6n \quad (n \geq 1).$$

Решение. Поскольку сумма первых $(n-1)$ членов прогрессии равна

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 + 6(n-1) = 3n^2 - 3, \quad (n \geq 2)$$

и $S_n - S_{n-1} = a_n$, следует, что

$$a_n = 3n^2 + 6n - 3n^2 + 3 = 6n + 3.$$

Последовательно подставляя в формулу n -ого члена $n = 1, 2, 3, \dots$, получим $a_1 = 9$, $a_2 = 15$, $a_3 = 21, \dots$

Пример 5. Определить сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$, если

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

Решение. Заметим, что $4 + 16 = 8 + 12$ и, следовательно, (см. (6)) $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12}$. Учитывая, что сумма этих членов равна 224, найдем, что $a_4 + a_{16} = 112$.

Поскольку (см. (7)) $S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19$ и $a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = 112$ ($1+19=4+16$), то

$$S_{19} = \frac{112}{2} \cdot 19 = 1054.$$

Пример 6. При каких значениях параметра a существуют такие значения переменной x , чтобы числа

$$5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad \frac{a}{2}, \quad 25^x + 25^{-x}$$

являлись последовательными членами арифметической прогрессии?

Решение. Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, получим уравнение

$$a = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}.$$

Заметим, что при $a \leq 0$ уравнение не имеет решений (правая часть, как сумма положительных чисел, есть положительное число).

Поскольку $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$), уравнение примет вид

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} + 5 \left(5^x + \frac{1}{5^x} \right) = a.$$

Обозначим $5^x + \frac{1}{5^x} = t$, $t \geq 2$ (сумма двух взаимно обратных положительных чисел). Тогда

$$5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}} = \left(5^x + \frac{1}{5^x} \right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

и уравнение примет вид

$$t^2 + 5t - (a + 2) = 0.$$

Положительный корень этого уравнения должен быть больше или равен 2 (данное уравнение имеет два различных противоположных по знаку корня, поскольку при $a > 0$ имеем $-(a + 2) < 0$ и коэффициент при t^2 положителен), для чего достаточно, чтобы

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} < 2, \\ f(2) \leq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{5}{2} < 2, \\ 4 + 10 - (a + 2) \leq 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a \geq 12.$$

Пример 7. Определить сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Первым четным трехзначным числом, делящимся на 3, является 102. Поскольку четное число, делящееся на 3, делится и на 6, получим прогрессию

$$102, 108, 114, \dots, 996,$$

где $a_1 = 102$, $d = 6$ и последний ее член $a_x = 996$ ($x \in \mathbf{N}$).

Поскольку $a_x = a_1 + (x - 1)d$ или

$$102 + (x - 1) \cdot 6 = 996,$$

находим $x = 150$. Тогда, используя формулу (7), получим

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 74850.$$

Пример 8. Пусть S_n , S_m и S_p - соответственно суммы первых n , m и p членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots$. Показать, что

$$\frac{S_n}{n}(m - p) + \frac{S_m}{m}(p - n) + \frac{S_p}{p}(n - m) = 0. \quad (9)$$

Решение. Используем формулу (8), тогда равенство (9) примет вид

$$\frac{2a_1 + (n - 1)d}{2}(m - p) + \frac{2a_1 + (m - 1)d}{2}(p - n) + \frac{2a_1 + (p - 1)d}{2}(n - m) = 0$$

или

$$2a_1[m - p + p - n + n - m] + [(n - 1)(m - p) + (m - 1)(p - n) + (p - 1)(n - m)]d = 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & (n - 1)(m - p) + (m - 1)(p - n) + (p - 1)(n - m) = \\ & = nm - np - m + p + mp - mn - p + n + pn - pm - n + m = 0, \end{aligned}$$

получим:

$$2a_1 \cdot 0 + 0 \cdot d = 0, \text{ то есть, } 0 = 0,$$

и, следовательно, равенство доказано.

Пример 9. Определить числа, являющиеся одновременно членами арифметической прогрессии, $2, 5, 8, \dots, 332$ и $7, 12, 17, \dots, 157$.

Решение. Пусть b - n -ый член первой прогрессии, следовательно, $b = 2 + (n - 1) \cdot 3$ и, в то же время, b является m -ым членом во второй прогрессии, то есть, $b = 7 + (m - 1) \cdot 5$. Таким образом, получим уравнение

$$2 + (n - 1) \cdot 3 = 7 + (m - 1) \cdot 5$$

или

$$3(n - 1) = 5m$$

откуда, учитывая, что m, n - натуральные числа, получим $n = 5k + 1$ и $m = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, то есть, члены $a_6, a_{11}, a_{16}, \dots, a_{5k+1}$ первой прогрессии совпадают с членами $c_3, c_6, c_9, \dots, c_{3k}$ второй прогрессии. Таким образом, числа 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137 и 152 входят в обе прогрессии.

Пример 10. Сумма трех положительных чисел равна $\frac{\pi}{2}$. Найти произведение $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma$ если известно, что $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получим

$$2 \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma.$$

Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ влечет $\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$, используя формулу приведения $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \operatorname{tg} x$, получим

$$2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta,$$

используя формулу тангенса двойного угла, имеем

$$2 \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}$$

откуда

$$2 \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}.$$

Учитывая, что α, β и γ - положительные числа, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \neq 1$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$, $\operatorname{tg} \gamma \neq 0$), получим

$$2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma,$$

откуда следует, что $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3}$ и, следовательно, $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma = 3$.

Пример 11. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Определить p и q , если известно, что q, x_1, p, x_2 (в данной очередности) образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии и теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} 2x_1 = q + p, \\ 2p = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q, \end{cases}$$

решения которой

$$\begin{cases} q = -4, \\ x_1 = -2, \\ p = 0, \\ x_2 = 2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} q = 0, \\ x_1 = 0, \\ p = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

По условию, арифметическая прогрессия - возрастающая и, следовательно, квадратное уравнение, удовлетворяющее условиям задачи, есть $x^2 - 4 = 0$ ($p = 0, q = -4$).

Пример 12. Определить первые три члена убывающей арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -24$ и $a_1a_3a_5 = 640$.

Решение. Используя свойство **Р3**, находим $a_3 = -8$, затем получим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = -16, \\ a_1a_5 = -80, \end{cases}$$

решения которой $a'_1 = -20, a'_5 = 4$ и $a''_1 = 4, a''_5 = -20$. Поскольку прогрессия - убывающая ($d < 0$), остается $a_1 = 4$ и $a_5 = -20$. Используя свойство **Р3**, получим $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{4 + (-8)}{2} = -2$. Таким образом, первыми тремя членами данной прогрессии являются 4, -2 и -8.

Геометрическая прогрессия

Определение 3. Числовая последовательность $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ называется геометрической прогрессией, если существует действительное число q , называемое знаменателем прогрессии, такое, что

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (\forall n \in \mathbf{N}), \quad (10)$$

то есть, каждый член последовательности (начиная со второго) равен предыдущему, умноженному на одно и то же число (знаменатель прогрессии).

Следующие последовательности являются геометрическими прогрессиями:

$$\begin{array}{ll} 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots & \text{здесь } b_1 = 2 \text{ и } q = 2, \\ 3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}, \dots & \text{здесь } b_1 = 3 \text{ и } q = -\frac{1}{3}, \\ a, a, a, \dots & \text{здесь } b_1 = a \text{ и } q = 1, \\ a, 0, 0, \dots & \text{здесь } b_1 = a \text{ и } q = 0 \end{array}$$

Заметим, что, если один из членов геометрической прогрессии равен нулю, то тогда либо $b_1 = 0$, либо $q = 0$.

Свойства геометрической прогрессии

P5. Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbf{N}). \quad (11)$$

P6. (Характеристическое свойство геометрической прогрессии). Квадрат n -го члена геометрической прогрессии равен произведению равноудаленных от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k} \quad (n \geq 2, k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (12)$$

В частном случае, для трех последовательных членов геометрической прогрессии

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}. \quad (13)$$

Замечание. Формулы (12), (13) можно записать и следующим образом:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}, \quad (14)$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad (15)$$

то есть, модуль n -го члена геометрической прогрессии есть среднее геометрическое равноудаленных от него членов. В случае прогрессии с положительными членами n -ый член является средним геометрическим равноудаленных от него членов

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (b_i > 0, i = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

P7. Если $k + n = m + p$ ($k, n, m, p \in \mathbf{N}$), тогда

$$b_k \cdot b_n = b_m \cdot b_p, \quad (17)$$

где b_k, b_n, b_m, b_p - члены геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots$.

P8. Числа a, b, c (не обязательно в указанной очередности) образуют геометрическую прогрессию, если и только если удовлетворяют равенству

$$(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab) = 0, \quad (18)$$

а числа a, b, c (в указанной очередности) образуют геометрическую прогрессию, если и только если

$$b^2 = ac.$$

P9. Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии определяется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad (19)$$

где b_1 - первый член прогрессии, q - её знаменатель, b_n - n -ый член прогрессии.

Если $q = 1$, то

$$S_n = b_1 \cdot n. \quad (20)$$

P10. Сумма S всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$) определяется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \quad (21)$$

Доказательства свойств **P5-P10** можно найти, например, в [1].

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 13. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение. Пусть b_1, b_2 и b_3 - первые три члена данной прогрессии. Тогда из условия $b_1 b_2 b_3 = 1728$ следует (см. (12)) $b_2^3 = 1728$ и $b_2 = 12$. Следовательно,

$$\begin{cases} b_1 b_3 = 144, \\ b_1 + b_3 = 51. \end{cases}$$

Решения данной системы (см. обратную теорему Виета) являются также корнями квадратного уравнения

$$z^2 - 51z + 144 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим $z_1 = 3$ и $z_2 = 48$, то есть, $b_1 = 3$, $b_3 = 48$ или $b_1 = 48$, $b_3 = 3$. Поскольку $b_1 = 3$, $b_2 = 12$ или $b_1 = 48$ и $b_2 = 12$, получим $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$.

Таким образом, решениями задачи будут $b_1 = 3$ и $q = 4$ или $b_1 = 48$ и $q = \frac{1}{4}$.

Пример 14. В геометрической прогрессии с положительными членами $(m + n)$ -ый член равен p , а $(m - n)$ -ый член ($m > n$) равен s . Найти члены порядка m и n .

Решение. Поскольку (см. (11))

$$b_{m-n} \cdot b_{m+n} = b_m^2,$$

то $b_m^2 = ps$, и, поскольку $b_m > 0$, получим $b_m = \sqrt{ps}$.

Согласно условиям и формуле (10), получим

$$\begin{cases} b_1 q^{m+n-1} = p, \\ b_1 q^{m-n-1} = s, \end{cases}$$

откуда $q^{2n} = \frac{p}{s}$ и, следовательно, $q = \sqrt[2n]{\frac{p}{s}}$. Поскольку

$$b_1 q^{m+n-1} = b_1 q^{n-1} \cdot q^m = b_n \cdot q^m = p,$$

следует, что

$$b_n = \frac{p}{q^m} = \frac{p}{\sqrt[2n]{\left(\frac{p}{s}\right)^m}} = p \cdot \sqrt[2n]{\left(\frac{s}{p}\right)^m}.$$

Пример 15. Вычислить сумму

$$S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777 \dots 77}_{n \text{ цифр}}.$$

Решение. Имеем

$$S_n = 7(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ цифр}}),$$

$$9S_n = 7(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 99}_{n \text{ цифр}})$$

или

$$\frac{9}{7}S_n = (10 - 1) + (100 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1),$$

откуда

$$\frac{9}{7}S_n = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n.$$

Заметим, что в скобках - сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 10$ и знаменателем $q = 10$. Используя формулу (19), получим

$$\frac{9}{7}S_n = \frac{10 - 10^{n+1}}{1 - 10} - n,$$

откуда

$$S_n = \frac{7}{9} \left(\frac{10 - 10^{n+1} + 9n}{-9} \right) = \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{9} \right) = \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - (n+1) \right).$$

Пример 16. Доказать, что числа 9, 10 и 11 не могут являться членами одной геометрической прогрессии.

Решение. Пусть данные числа являются членами геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q . Тогда $9 = b_1 q^{k-1}$, $10 = b_1 q^{n-1}$ и $11 = b_1 q^{m-1}$, откуда следует

$$\left(\frac{9}{10} \right) = q^{k-n}, \quad \left(\frac{11}{10} \right) = q^{m-k} \quad \text{или} \quad \left(\frac{9}{10} \right)^{m-n} = q^{(k-n)(m-n)}, \quad \left(\frac{11}{10} \right)^{k-n} = q^{(m-n)(k-n)}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{9}{10} \right)^{(m-n)} = \left(\frac{11}{10} \right)^{(k-n)},$$

откуда

$$\frac{9^{m-n}}{11^{k-n}} = 10^{m-k}.$$

Поскольку m, n, k - различные натуральные числа, данное равенство ложно, и, следовательно, 9, 10 и 11 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

Пример 17. Числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Показать, что $(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$A = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2.$$

Так как $b^2 = ac$, $c^2 = bd$ и $bc = ad$ (см. (12) и (17)), то

$$A = a^2 - 2b^2 + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2c^2 + d^2 = a^2 - 2bc + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 = (a - d)^2.$$

Пример 18. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма их кубов равна 192. Найти пятый член последовательности.

Решение. Пусть b_1 и q - соответственно первый член и знаменатель данной геометрической прогрессии. Тогда $|q| < 1$ и

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = 4.$$

Заметим, что кубы членов исходной прогрессии образуют, в свою очередь, бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 . Действительно, поскольку $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, $n \in \mathbf{N}$, то $\frac{b_{n+1}^3}{b_n^3} = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^3 = q^3$, $n \in \mathbf{N}$. Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 4, \\ \frac{b_1^3}{1 - q^3} = 192. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $b_1 = 4(1 - q)$ и подставляем во второе уравнение системы:

$$\frac{64(1 - q)^3}{(1 - q)(1 + q + q^2)} = 192,$$

откуда (поскольку $|q| < 1$) следует уравнение

$$(1 - q)^2 = 3(1 + q + q^2)$$

или

$$2q^2 + 5q + 2 = 0,$$

решения которого $q_1 = -2$ и $q_2 = -\frac{1}{2}$. Поскольку $|q| < 1$, остается $q = -\frac{1}{2}$ и, следовательно, $b_1 = 6$. Используя формулу n -го члена геометрической прогрессии, получим

$$b_5 = b_1 q^4 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

Пример 19. Решить уравнения

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^n x + \dots}{1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \dots + (-1)^n \operatorname{tg} x + \dots} = 1 + \sin 2x, \quad |\operatorname{tg} x| < 1.$$

Решение. Заметим, что числитель левой части уравнения представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q_1 = \operatorname{tg} x$, а знаменатель левой части - сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $(-\operatorname{tg} x)$. Поскольку $|\operatorname{tg} x| < 1$, уравнение переписывается следующим образом:

$$\frac{\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}}{\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}} = 1 + \sin 2x$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

Поскольку $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})}$, а

$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = \left(\sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, уравнение примет вид

$$\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2 \sin^2(x + \frac{\pi}{4}),$$

откуда следует совокупность

$$\begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0, \\ 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \\ \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \pi k - \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbf{Z}, \\ x = \pi n, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Поскольку $|\operatorname{tg} x| < 1$, остается $x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Смешанные задачи

Пример 20. Определить числа a, b и c , если известно, что a, b, c - три последовательных члена геометрической прогрессии; $a, b + 2, c$ образуют арифметическую прогрессию, а числа $a, b + 2, c + 9$ - геометрическую прогрессию.

Решения. Используя характеристические свойства геометрической и арифметической прогрессии, получим следующую систему:

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2(b+2) = a+c, \\ (b+c)^2 = a(c+9), \end{cases}$$

откуда $a = 4$, $b = 8$, $c = 16$ или $a = \frac{4}{25}$, $b = -\frac{16}{25}$ и $c = \frac{64}{25}$.

Пример 21. Доказать, что если положительные числа a, b и c являются соответственно членами m, n и p -го порядка арифметической прогрессии $a_1, a_2, \dots$ и геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots$, то $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$.

Решение. Согласно условиям

$$\begin{aligned} a &= a_1 + (m-1)d, \\ b &= a_1 + (n-1)d, \\ c &= a_1 + (p-1)d, \end{aligned} \tag{22}$$

где a_1 и d - соответственно первый член и разность арифметической прогрессии.

Из равенства (22) следует

$$b - c = (n - p)d, \quad c - a = (p - m)d \quad \text{и} \quad a - b = (m - n)d. \tag{23}$$

В то же время

$$a = b_1 q^{m-1}, \quad b = b_1 q^{n-1}, \quad c = b_1 q^{p-1}, \tag{24}$$

где b_1 и q - соответственно первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

Используя (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} &= a^{(n-p)d} \cdot b^{(p-m)d} \cdot c^{(m-n)d} = \\ &= (b_1 q^{m-1})^{(n-p)d} \cdot (b_1 q^{n-1})^{(p-m)d} \cdot (b_1 q^{p-1})^{(m-n)d} = \\ &= b_1^{d[(n-p)+(p-m)+(m-n)]} \cdot q^{d[(m-1)(n-p)+(n-1)(p-m)+(p-1)(m-n)]} = \\ &= b_1^0 \cdot q^0 = 1. \end{aligned}$$

Пример 22. Определить треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию, а величины внутренних углов - арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть α, β, γ - внутренние углы треугольника, противоположные сторонам a, b и c . Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ и $\alpha = \beta - d$, $\gamma = \beta + d$, где d - разность арифметической прогрессии, получим

$$\beta - d + \beta + \beta + d = 180^\circ,$$

откуда $\beta = 60^\circ$.

Согласно теореме косинусов,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Поскольку $b^2 = ac$ и $\cos \beta = \frac{1}{2}$, то

$$ac = a^2 + c^2 - ac,$$

откуда $a^2 - 2ac + c^2 = 0$ или $(a - c)^2 = 0$ и $a = c$.

Следовательно, получим равнобедренный треугольник ($a = c$) с углом при вершине в 60° , то есть, равносторонний треугольник.

Пример 23. Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образует арифметическую прогрессию, а последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ - геометрическую прогрессию. Доказать, что для любого натурального n , $n > 2$

$$a_n < b_n,$$

если $a_1 \neq a_2$, $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Решение. Пусть d - разность арифметической прогрессии, q - знаменатель геометрической прогрессии. Поскольку $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, получим

$$a_1 + d = a_1 \cdot q,$$

откуда $q = \frac{a_1 + d}{a_1} = 1 + \frac{d}{a_1} > 1$ и $d = a_1(q - 1) > 0$. Следовательно,

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = a_1 + (n - 1)a_1(q - 1) = a_1(1 + (n - 1)(q - 1))$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1}$$

и необходимо доказать неравенство

$$a_1(1 + (n - 1)(q - 1)) < a_1 q^{n-1}$$

или, так как $a_1 > 0$,

$$1 + (n - 1)(q - 1) < q^{n-1}.$$

Последнее неравенство непосредственно следует из неравенства Бернулли (см. "Принцип математической индукции" или "Неравенства").

Другой способ. Рассмотрим разность

$$1 + (n - 1)(q - 1) - q^{n-1} = (1 - q) \left[\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} - (n - 1) \right] = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} - (n - 1))$$

(было учтено, что $\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$ есть сумма первых $n - 2$ членов геометрической прогрессии с $b'_1 = 1$ и $q' = q$).

Поскольку $q > 1$, $q^k > 1$, $k \in \mathbf{N}$, получаем

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} - (n - 1) > 0$$

а произведение $(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} - (n - 1)) < 0$. Следовательно, и $1 + (n - 1)(q - 1) - q^{n-1} < 0$, то есть, $a_n < b_n$, $n > 2$.

Пример 24. Определить те прогрессии, которые одновременно являются и арифметическими и геометрическими.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - арифметическая и геометрическая прогрессия. Тогда $2a_{k+2} = a_{k+1} + a_{k+3}$, или $2a_1q^{k+1} = a_1q^k + a_1q^{k+2}$, или $a_1q^k - 2a_1q^{k+1} + a_1q^{k+2} = 0$, откуда получим:

$$a_1q^k(1 - 2q + q^2) = 0, \quad a_1q^k(1 - q)^2 = 0.$$

Следовательно, если $a_1q \neq 0$, то $q = 1$, и искомая прогрессия представляет собой постоянную последовательность $a_1, a_1, \dots, a_1, \dots$ ($d = 0, q = 1$).

Если $a = 0$, получим $0, 0, \dots, 0, \dots$ ($d = 0, q \in \mathbf{R}$), а если $q = 0, a \neq 0$ - решений нет.

Упражнения

1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - арифметическая прогрессия с положительными членами. Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{d}.$$

2. Показать, что

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots$ - ненулевые члены арифметической прогрессии.

3. Определить трехзначные числа, делящиеся на 45, цифры которых образуют арифметическую прогрессию.
4. Решить уравнение

$$2 + 5 + 8 + 11 + \dots + x = 155$$

5. Определить сумму всех двузначных четных чисел.
6. Найти $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$, если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - арифметическая прогрессия и $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{16} = 1447$.
7. Определить те значения x , при которых число $\lg 2, \lg(2^x - 1), \lg(2^x + 3)$ образуют арифметическую прогрессию.
8. Показать, что числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.
9. Пусть $S_n, S_{2n},$ и S_{3n} - соответственно суммы первых $n, 2n$ и $3n$ членов геометрической прогрессии. Доказать равенство

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

10. Определить четыре числа, образующих арифметическую прогрессию, сумма которых, равна 48, а отношение произведения крайних членов к произведению оставшихся равно $\frac{27}{35}$.

11. Определить геометрическую прогрессию, состоящую из семи членов, если известно, что сумма первых трех ее членов равна 26, а сумма последних трех равна 2106.
12. Доказать, что числа $\alpha = \sqrt[n]{a^{x-y}}$, $\beta = \sqrt[2n]{a^{z-y}}$, $\gamma = \sqrt[n]{a^{z-x}}$ образуют геометрическую прогрессию.
13. Определить три числа, образующих геометрическую прогрессию, если их сумма равна 62, а сумма их квадратов равна 2604.
14. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а их квадраты - геометрическую прогрессию. Определить эти числа, если известно, что их сумма равна 21.
15. Определить арифметическую прогрессию, если сумма ее первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый члены этой прогрессии образуют геометрическую прогрессию.

Литература

1. P.Cojuhari si altii. Progresii aritmetice si geometrice. Mica biblioteca a elevului. Seria Matematica, informatica. Chisinau, Editura ASRM, 1995.