Линейные уравнения и неравенства с параметром

Уравнение вида
$$ax + b = 0, \tag{1}$$
где $a, b \in \mathbf{R}$, x - переменная, называется уравнением первой степени (линейным уравнением).

Ниже приведены примеры линейных уравнений:

$$\begin{array}{ll}
a)\ 2x+6=0, & \text{где } a=2,\ b=6; \\
b)\ x-2=0 & \text{где } a=1,\ b=-2; \\
c)\ 0\cdot x+0=0, & \text{где } a=b=0; \\
d)\ 0\cdot x+\dfrac{1}{3}=0, & \text{где } a=0,\ b=\dfrac{1}{3}; \\
e)\ -\dfrac{1}{2}x=0, & \text{где } a=-\dfrac{1}{2};\ b=0.
\end{array}$$

Уравнение (1) равносильно уравнению
$$ax = -b,$$
откуда следует следующее утверждение.

Утверждение 1.

1. Если $a \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение $x = -\dfrac{b}{a}$;
2. Если $a = 0,\ b \neq 0$, то множество решений уравнения (1) пусто;
3. Если $a = 0,\ b = 0$, то любое действительное число является решением уравнения (1).

Таким образом, приведенные выше линейные уравнения решаются следующим образом:

a) $x = -\dfrac{6}{2}$, то есть $x = -3$; b) $x = 2$; c) любое действительное число является решением данного уравнения; d) уравнение не имеет решений; e) $x = 0$.

Замечание 1. Уравнение
$$ax + b = cx + d,$$
где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, сводится к линейному уравнению (1):
$$ax + b = cx + d \ \Leftrightarrow\ (a - c)x + (b - d) = 0,$$
или
$$ax + b = cx + d \ \Leftrightarrow\ (a - c)x = d - b.$$

Замечание 2. Уравнение
$$(ax + b)(cx + d) = 0$$
где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, сводится к совокупности линейных уравнений
$$\left[\begin{array}{l} ax + b = 0, \\ cx + d = 0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить уравнения

$$a)\ \frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4, \qquad c)\ -x + 2 = 2 - x,$$
$$b)\ 2x + 1 = 2x + 3, \qquad d)\ (2x + 4)(3x - 1) = 0.$$

Решение. a) $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{x}{3} + 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x}{2} - 3 - \frac{x}{3} = 4 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 4 + 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{7}{6}x = 7 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; x = 7 : \frac{7}{6} \;\Leftrightarrow\; x = 6.$

b) $2x + 1 = 2x + 3 \;\Leftrightarrow\; 2x - 2x = 3 - 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \cdot x = 2$, откуда следует, что уравнение не имеет решений.

c) $-x+2 = 2-x \;\Leftrightarrow\; -x+x = 2-2 \;\Leftrightarrow\; 0 \cdot x = 0$, следовательно, любое действительное число является решением уравнения.

d) $(2x + 4)(3x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 2x + 4 = 0, \\ 3x - 1 = 0, \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

В дальнейшем будут рассматриваться линейные уравнения с **параметрами**. Под параметром понимается (смотрите тему Уравнения с параметром) фиксированное (но неизвестное) число. Как правило, параметр обозначается первыми буквами латинского алфавита.

Пример 2. Решить уравнения

$$a)\ ax = 1; \qquad e)\ \frac{(x-a)(2x+a)}{(x+1)(x-2)} = 0;$$
$$b)\ a^2x - 1 = x + a; \qquad f)\ \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c;$$
$$c)\ ax + b = cx + d; \qquad g)\ \frac{2}{5x-a} = \frac{3}{ax-1}.$$
$$d)\ \frac{x-2x}{x-4} = 0;$$

Решение. a) Применяя утверждение 1, получим:

при $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение, $x = \frac{1}{a}$;
при $a = 0$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 1$ и, следовательно, оно не имеет решений.

Ответ: если $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то уравнение не имеет решений.

b) После элементарных преобразований получим:

$$a^2x - 1 = x + a \;\Leftrightarrow\; a^2x - x = a + 1 \;\Leftrightarrow\; x(a^2 - 1) = a + 1$$

откуда, применяя утверждение 1, получим:

1. если $a^2-1\neq 0$, то есть $a\neq\pm 1$, то $x=\dfrac{a+1}{a^2-1}$, или $x=\dfrac{1}{a-1}$;
2. если $a=1$, то уравнение примет вид $0\cdot x=2$ и, следовательно, не имеет решений;
3. если $a=-1$, то уравнение примет вид $0\cdot x=0$, и, следовательно, любое действительное число является решением этого уравнения.

c) Перепишем уравнение следующим образом

$$(a-c)x=d-b,$$

откуда следует:

1. если $a-c\neq 0$, то есть $a\neq c$, то уравнение имеет единственное решение
$$x=\frac{d-b}{a-c};$$
2. если $a=c$ и $d-b\neq 0$, то уравнение примет вид $0\cdot x=d-b(\neq 0)$ и, следовательно, оно не имеет решений;
3. если $a=c$ и $d=b$, то уравнение примет вид $0\cdot x=0$, и, следовательно, множество его решений есть $\mathbf{R}$.

d) Область допустимых значений (*ОДЗ*) уравнения есть $x\neq 4$. В *ОДЗ* уравнение решается следующим образом:

$$\frac{x-2a}{x-4}=0\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2a=0, \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a, \\ x\neq 4. \end{cases}$$

Таким образом, если $2a\neq 4$, то есть $a\neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x=2a$, а если $a=2$, то уравнение не имеет решений.

e) *ОДЗ* уравнения есть множество $\mathbf{R}\setminus\{-1;2\}$. Поскольку $(x-a)(2x+a)=0$ влечет $x_1=a$ и $x_2=-\dfrac{a}{2}$, так как $x\neq -1$ и $x\neq 2$, получим:

1. если $a\neq -1,\ a\neq 2,\ -\dfrac{a}{2}\neq -1,\ -\dfrac{a}{2}\neq 2$, то есть $a\in\mathbf{R}\setminus\{-1;2;-4\}$, то уравнение имеет два решения $x_1=a$ и $x_2=-\dfrac{a}{2}$ (если $a=0$, решения совпадают);
2. если $a=-1$, то уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{1}{2}$;
3. если $a=2$, то уравнение не имеет решений;
4. если $a=-4$, то уравнение имеет единственное решение $x=-4$.

f) Если $a=0$ или $b=0$, то уравнение не имеет смысла. Пусть $a\cdot b\neq 0$. Тогда уравнение равносильно следующему

$$x(b+a)=abc,$$

откуда следует:

1. если $b+a\neq 0$, то есть $a\neq -b$, то уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{abc}{a+b}$;
2. если $a=-b$ и $c\neq 0$, то уравнение не имеет решений.
3. если $a=-b$ и $c=0$, то любое действительное число есть решение данного уравнения.

g) *ОДЗ* уравнения определяется из системы $\begin{cases} 5x-a\neq 0, \\ ax-1\neq 0, \end{cases}$, откуда $x\neq\dfrac{a}{5}$ и, если $a\neq 0$, $x\neq\dfrac{1}{a}$. Если $a=0$, то уравнение примет вид

$$\frac{2}{5x}=\frac{3}{-1}, \text{ или } -2=15x,$$

откуда $x=-\dfrac{2}{15}$, и, поскольку $-\dfrac{2}{15}\neq\dfrac{0}{5}$, следует, что если $a=0$, то уравнение имеет решение $x=-\dfrac{2}{15}$.

Пусть $a\neq 0$. Тогда в *ОДЗ* уравнение примет вид

$$2(ax-1)=3(5x-a),$$

откуда

$$(2a-15)x=2-3a$$

и, следовательно,

1. если $2a-15\neq 0$, то есть $a\neq\dfrac{15}{2}$, то получим $x=\dfrac{2-3a}{2a-15}$;
2. если $2a-15=0$, то есть $a=\dfrac{15}{2}$, то уравнение не имеет решений.

Таким образом для $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{0;\dfrac{15}{2}\right\}$ нужно проверить условие $x\neq\dfrac{a}{5}$ и $x\neq\dfrac{1}{a}$:

$$x\neq\frac{a}{5}\ \Rightarrow\ \frac{2-3a}{2a-15}\neq\frac{a}{5} \text{ или } (2a-15)a\neq 5(2-3a)$$

откуда $2a^2\neq 10$, или $a\neq\pm\sqrt{5}$. Таким образом, для $a=\pm\sqrt{5}$ уравнение не имеет решений.

В случае второго ограничения получим

$$x\neq\frac{1}{a}\ \Rightarrow\ \frac{2-3a}{2a-15}\neq\frac{1}{a}, \text{ или } a(2-3a)\neq(2a-15),$$

откуда $3a^2=15$, то есть $a^2\neq 5$ (уже исследованный случай).

Таким образом, если $a\in\left\{\frac{15}{2};\pm\sqrt{5}\right\}$ уравнение не имеет решений, а если $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{15}{2};\pm\sqrt{5}\right\}$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{2-3a}{2a-15}$$

(заметим, что решение полученное в случае $a = 0$ содержится в приведенном выше результате).

Пример 3. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} a)\ |x-a| = 2; & c)\ |x-a| + |x-2a| = a; \\ b)\ |x| + |x-a| = 0; & d)\ |x-1| + |x-2| = a. \end{array}$$

Решение. a) Используя свойство модуля, получим:

$$|x-a| = 2 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x-a = 2, \\ x-a = -2, \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x = a+2, \\ x = a-2. \end{array} \right.$$

Таким образом, для любого действительного a уравнение имеет два различных решения, $x_1 = a+2$ и $x_2 = a-2$.

b) Левая часть уравнения принимает неотрицательные значения (как сумма двух неотрицательных слагаемых), а правая часть равна нулю. Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x-a = 0, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x = a. \end{array} \right.$$

Таким образом, если $a = 0$, то система (а, следовательно, и уравнение) имеет единственное решение $x = 0$, а если $a \neq 0$, то система (и исходное уравнение) решений не имеет.

c) Так как $|f(x)| = |-f(x)|$ уравнение можно переписать следующим образом

$$|x-a| + |2a-x| = a.$$

Очевидно, что если $a < 0$, то уравнение не имеет решений, а если a=0, то получим $|x| = 0$, откуда $x = 0$.

Пусть $a > 0$. Тогда $a = |a| = |(2a-x) + (x-a)|$, и уравнение примет вид

$$|x-a| + |2a-x| = |(2a-x) + (x-a)|.$$

Это уравнение равносильно (см. свойства модуля) неравенству

$$(2a-x)(x-a) \geq 0$$

откуда, учитывая, что $0 < a < 2a$, получим решение $x \in [a; 2a]$.

Таким образом:

если $a < 0$, то уравнение не имеет решений;
если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = 0$;
если $a > 0$, то уравнение имеет бесконечное число решений - любое число $x \in [a; 2a]$.

d) Очевидно, что уравнение имеет решения только при $a > 0$. Рассмотрим три случая:

1. Пусть $x < 1$. Тогда $|x-1| = -(x-1),\ |x-2| = -(x-2)$ и уравнение примет вид
$$-x+1-x+2 = a, \quad \text{или} \quad -2x = a-3,$$
откуда $x = \dfrac{3-a}{2}$. Поскольку $x < 1$, то должно выполняться
$$\frac{3-a}{2} < 1,$$
откуда $a > 1$. Таким образом, если $a > 1$, то $x = \dfrac{3-a}{2}$.

2. Пусть $x \in [1;2]$. Тогда $|x-1| = x-1,\ |x-2| = -(x-2)$ и уравнение примет вид
$$x-1-x+2 = a, \quad 0 \cdot x = a-1.$$
Используя утверждение 1, получим:

   если $a = 1$, то любое действительное число из отрезка [1;2] есть решение исходного уравнения;

   если $a \neq 1$, то решений нет.

3. Пусть $x > 2$. Тогда $|x-1| = x-1,\ |x-2| = x-2$ и уравнение примет вид
$$x-1+x-2 = a,$$
откуда $x = \dfrac{a+3}{2}$. Поскольку $x > 2$, то $\dfrac{a+3}{2} > 2$, то есть $a > 1$.
Таким образом:

   если $a > 1$, то уравнение имеет два различных решения
$$x_1 = \frac{3-a}{2} \ \text{ и } \ x_2 = \frac{a+3}{2};$$
   если $a = 1$, то любое число отрезка [1;2] есть решение уравнения;

   если $a < 1$, то уравнение не имеет решений.

Линейные неравенства

Неравенства вида
$$ax+b > 0,\ ax+b \geq 0,\ ax+b < 0,\ ax+b \leq 0, \tag{2}$$
где $a, b \in \mathbf{R},\ x$ - переменная, называются неравенствами первой степени (линейными неравенствами).

Поскольку все неравенства (2) решаются аналогично, приведем решение лишь первого из них: $ax+b > 0$. Рассмотрим следующие случаи:

1. $a > 0$, тогда
$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$
и, следовательно, множество решений неравенства $ax + b > 0$ $(a > 0)$ есть $(-\frac{b}{a}; +\infty)$;
2. $a < 0$, тогда
$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$
и, следовательно, множество решений неравенства $ax + b > 0$ $(a < 0)$ есть $(-\infty; -\frac{b}{a})$;
3. $a = 0$, тогда неравенство примет вид $0 \cdot x + b > 0$ и для $b > 0$ любое действительное число есть решение неравенства, а при $b \le 0$ неравенство не имеет решений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенства

$$\begin{array}{ll} a)\ 3x + 6 > 0; & c)\ 2(x+1) + x < 3x + 1; \\ b)\ -2x + 3 \ge 0; & d)\ 3x + 2 \ge 3(x-1) + 1. \end{array}$$

Решение. a) $3x+6 > 0 \Leftrightarrow 3x > -6 \Leftrightarrow x > -2$, и, следовательно, множество решений исходного неравенства есть $(-2; +\infty)$.

b) $-2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow -2x \ge -3 \Leftrightarrow x \le \dfrac{3}{2}$, то есть множеством решений исходного неравенства является $(-\infty; \frac{3}{2}]$.

c) После элементарных преобразований получим линейное неравенство
$$2(x+1) + x < 3x + 1 \Leftrightarrow 2x + 2 + x < 3x + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 < 0.$$
Так как $1 < 0$ - ложное числовое неравенство, то исходное неравенство не имеет решений.

d) Решая аналогично примеру c), получим
$$3x + 2 \ge 3(x-1) + 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \ge 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 4 \ge 0,$$
откуда следует, что любое действительное число является решением исходного неравенства.

Пример 2. Решить неравенства

$$a)\ ax \le 1;$$
$$b)\ |x-2| > -(a-1)^2;$$
$$c)\ 3(4a - x) < 2ax + 3;$$
$$d)\ abx + b > ax + 3;$$
$$e)\ \frac{3x+4}{a^2-1} - \frac{2x+1}{a-1} \le \frac{x}{a+1};$$
$$f)\ ax + b > cx + d;$$
$$g)\ x + \frac{b(2-x)}{2a} > \frac{a(x+2)}{2b}.$$

Решение. a) В зависимости от знака a рассмотрим три случая:

1. если $a > 0$, то $x \leq \dfrac{1}{a}$;
2. если $a < 0$, то $x \geq \dfrac{1}{a}$;
3. если $a = 0$, то неравенство примет вид $0 \cdot x \leq 1$ и, следовательно, любое действительное число является решением исходного неравенства.

Таким образом, если $a > 0$, то $x \in (-\infty; \frac{1}{a}]$, если $a < 0$, то $x \in [\frac{1}{a}; +\infty)$, и если $a = 0$, то $x \in \mathbf{R}$.

b) Заметим, что $|x-2| \geq 0$ для любого действительного x и $-(a-1)^2 \leq 0$ для любого значения параметра a. Следовательно, если $a = 1$, то любое действительное число, отличное от 2, является решением неравенства, а если $a \neq 1$, то любое действительное число является решением неравенства.

Ответ: если $a = 1$, то $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, а если $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, то $x \in \mathbf{R}$.

c) После элементарных преобразований получим

$$3(4a - x) < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3x < 2ax + 3 \Leftrightarrow 12a - 3 < 2ax + 3x \Leftrightarrow x(2a+3) > 3(4a-1).$$

Далее рассмотрим три случая:

1. если $2a + 3 > 0$, то есть $a > -\dfrac{3}{2}$, то
$$x(2a+3) > 3(4a-1) \ \Leftrightarrow \ x > \frac{3(4a-1)}{2a+3};$$
2. если $2a + 3 < 0$, то есть $a < -\dfrac{3}{2}$, то
$$x(2a+3) > 3(4a-1) \ \Leftrightarrow \ x < \frac{3(4a-1)}{2a+3};$$
3. если $2a + 3 = 0$, то есть $a = -\dfrac{3}{2}$, то неравенство примет вид
$$0 \cdot x > -21$$
и, так как $0 > -21$ - истинное числовое неравенство, следует, что любое действительное число является решением исходного неравенства.

Следовательно,

если $a \in (-\frac{3}{2}; +\infty)$, то $x \in (\frac{3(4a-1)}{2a+3}; +\infty)$;
если $a \in (-\infty; -\frac{3}{2})$, то $x \in (-\infty; \frac{3(4a-1)}{2a+3})$;
если $a = -\dfrac{3}{2}$, то $x \in \mathbf{R}$.

d) $abx + b > ax + 3 \;\Leftrightarrow\; abx - ax > 3 - b \;\Leftrightarrow\; a(b-1)\cdot x > 3 - b$.
Далее рассмотрим следующие случаи:

1. если $a(b-1) > 0$, то есть $a > 0$ и $b > 1$, или $a < 0$ и $b < 1$, то
$$x > \frac{3-b}{a(b-1)}$$
2. если $a(b-1) < 0$, то есть $a > 0$ и $b < 1$, или $a < 0$ и $b > 1$, то
$$x < \frac{3-b}{a(b-1)}$$
3. если $a = 0,\; b \neq 1$, то неравенство примет вид
$$0 \cdot x > 3 - b,$$
и для $b > 3$ любое число является решением, а если $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3]$, то множество решений неравенства пусто.
4. если $a \neq 0,\; b = 1$, то неравенство примет вид
$$0 \cdot x > 2,$$
и, очевидно, что оно решений не имеет.

Следовательно,

если $a > 0$ и $b > 1$, или $a < 0$ и $b < 1$, то $x \in (\frac{3-b}{a(b-1)}; +\infty)$;
если $a > 0$ и $b < 1$, или $a < 0$ и $b > 1$, то $x \in (-\infty; \frac{3-b}{a(b-1)})$;
если $a = 0$ и $b \in (3; +\infty)$, то $x \in \mathbf{R}$;
если $a = 0$ и $b \in (-\infty; 1) \cup (1; 3)$ или $a \neq 0$ и $b = 1$, то неравенство не имеет решений.

e) Заметим, что $a \neq \pm 1$ (в противном случае неравенство не имеет смысла). Неравенство переписывается следующим образом
$$\frac{3x+4}{a^2-1} - \frac{2x+1}{a-1} \leq \frac{x}{a+1} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x + 4 - (2x+1)(a+1) - x(a-1)}{(a-1)(a+1)} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x(2-3a) + 3 - a}{(a-1)(a+1)} \leq 0.$$
Далее рассмотрим следующие случаи:

1. пусть $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, тогда $(a-1)(a+1) > 0$ и, следовательно, исходное неравенство равносильно следующему
$$x(2-3a) + 3 - a \leq 0, \;\text{ или }\; x(2-3a) \leq a - 3,$$

откуда

$$\text{для } a > 1 \ x \geq \frac{a-3}{2-3a},$$
$$\text{для } a < -1 \ x \leq \frac{a-3}{2-3a}$$

2. пусть $a \in (-1; 1)$, тогда $(a-1)(a+1) < 0$ и, следовательно, исходное неравенство равносильно следующему

$$x(2-3a) + 3 - a \geq 0, \ \text{ или } \ x(2-3a) \geq a - 3.$$

Последнее неравенство решается следующим образом:

если $a = \dfrac{2}{3}$, то $x \in \mathbf{R}$;
если $a \in (\frac{2}{3}, 1)$, то $x \leq \frac{a-3}{2-3a}$;
если $a \in (-1; \frac{2}{3})$, то $x \geq \frac{a-3}{2-3a}$.

Таким образом, исходное неравенство

при $a \in (-\infty; -1) \cup (\frac{2}{3}; 1)$ имеет решения $x \in (-\infty; \frac{a-3}{2-3a}]$;
при $a \in (-1; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$ имеет решения $x \in [\frac{a-3}{2-3a}; +\infty)$;
при $a = \dfrac{2}{3}$ любое действительное число является решением исходного неравенства.

f) Исходное неравенство равносильно следующему

$$(a-c)x > d - b,$$

откуда следует, что

1. если $a > c$, то $a - c > 0$ и, следовательно, $x > \dfrac{d-b}{a-c}$;

2. если $a < c$, то $x < \dfrac{d-b}{a-c}$;

3. если $a = c$ и $d \geq b$, то множество решений неравенства пусто;

4. если $a = c$ и $d < b$, то $x \in \mathbf{R}$.

g) Заметим, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Приведя к общему знаменателю, получим

$$x + \frac{b(2-x)}{2a} > \frac{a(x+2)}{2b} \ \Leftrightarrow\ \frac{2abx + b^2(2-x) - a^2(x+2)}{2ab} > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2(b^2-a^2) - x(b-a)^2}{2ab} > 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2(b^2-a^2) - x(b-a)^2 > 0, \\ ab > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 2(b^2-a^2) - x(b-a)^2 < 0, \\ ab < 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x(b-a)^2 < 2(b^2-a^2), \\ ab > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x(b-a)^2 > 2(b^2-a^2), \\ ab < 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x < \dfrac{2(b+a)}{b-a}, \\ ab > 0, \\ a \neq b, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in \emptyset, \\ a = b, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{2(b+a)}{b-a} \\ ab < 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Таким образом, если a и b одиннакого знака ($ab > 0$) и $a \neq b$, то множество решений неравенства есть $(-\infty; \frac{2(b+a)}{b-a})$; если a и b - противоположных знаков ($ab < 0$), то множество решений есть $(\frac{2(b+a)}{b-a}; +\infty)$, а если $a = b$, то неравенство не имеет решений.

Пример 3. Решить неравенства

$a)$ $|x+a| + |x-2a| < 4a$; $\qquad$ $c)$ $|x+a| > 2$;

$b)$ $|x+a| < |a|x$; $\qquad$ $d)$ $|x-a| \leq a$.

Решение. а) Заметим, что при $a \leq 0$ неравенство решений не имеет. Пусть $a > 0$. Рассмотрим три случая:

1. пусть $x \in (-\infty; -a]$, тогда $|x+a| = -x-a$ и $|x-2a| = 2a-x$, и неравенство примет вид
$$-x - a + 2a - x < 4a, \ \text{ или } \ x > -\frac{3}{2}a,$$
поскольку $a > 0$, пересечением множеств $(-\infty; -a]$ и $(-\frac{3a}{2}; +\infty)$ (а, следовательно, и множеством решений неравенства) явяется множество $(-\frac{3a}{2}; -a]$;

2. пусть $x \in (-a; 2a]$, тогда $|x+a| = x+a$, и $|x-2a| = 2a-x$, и неравенство примет вид
$$x + a + 2a - x < 4a, \ \text{ или } \ 3a < 4a,$$
и, поскольку $a > 0$, любое число из интервала $(-a; 2a]$ есть решение неравенства;

3. пусть $x \in (2a; +\infty)$, тогда $|x+a| = x+a$ и $|x-2a| = x-2a$, и неравенство примет вид
$$x + a + x - 2a < 4a, \ \text{ или } \ x < \frac{5}{2}a.$$

Учитывая условие $x \geq 2a$, получим $x \in (2a; \frac{5}{2}a)$.

Таким образом, если $a \leq 0$, то неравенство не имеет решений, а если $a > 0$, то множество решений неравенства есть $(-\frac{3}{2}a; -a] \cup (-a; 2a] \cup (2a; \frac{5}{2}a)$ или $(-\frac{3}{2}a; \frac{5}{2}a)$.

b) Заметим, что неравенство может иметь лишь положительные решения. Для $x > 0$ неравенство переписывается $|x+a| < |a| \cdot |x|$ и решается, используя свойства модуля:

$$|x+a| < |a| \cdot |x| \;\Leftrightarrow\; |x+a| < |ax| \;\Leftrightarrow\; (x+a+ax)(x+a-ax) < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; [(a+1)x+a][(1-a)x+a] < 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (a+1)x+a > 0, \\ (1-a)x+a < 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (a+1)x+a < 0, \\ (1-a)x+a > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (a+1)x > -a, \\ (1-a)x < -a, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (a+1)x < -a, \\ (1-a)x > -a. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Если $a > 1$, тогда $a-1 > 0$ и $a+1 > 0$, и первая система совокупности примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{a}{a+1} < x, \\ -\dfrac{a}{1-a} < x, \end{array}\right.$$

откуда (учитывая, что $x > 0$) получим

$$x > \frac{a}{a-1},$$

а вторая система совокупности примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} x < -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}, \end{array}\right.$$

и, так как $a > 1$ влечет $-\dfrac{a}{a+1} < 0$, а $x > 0$, система не имеет решений.

Если $a = 1$, то первая система совокупности не имеет решений, а из второй получим $x < -\dfrac{1}{2}$, и, так как $x > 0$, то и в этом случае исходное неравенство не имеет решений.

Если $-1 < a < 1$, то $a+1 > 0$ и $1-a > 0$, и первая система совокупности примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} x > -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad -\frac{a}{a+1} < x < \frac{a}{a-1}$$

откуда, заметив, что

$$-\frac{a}{a+1} < \frac{a}{a-1} \;\Rightarrow\; -a^2 > a^2$$

получим, что первая система совокупности несовместна. Из второй системы получим

$$\frac{a}{a-1} < x < \frac{-a}{a+1}$$

и, учитывая, что $x > 0$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+1} \geq 0, \\ \dfrac{a}{a-1} < \dfrac{-a}{a+1}, \end{cases}$$

откуда $a < 0$. Таким образом, если $a \in [0;1)$, то неравенство не имеет решений, а если $a \in (-1;0)$, то множество решений неравенства есть $(\frac{a}{a-1}; -\frac{a}{a+1})$.

Если $a = -1$, то первая система совокупности несовместна, а из второй получим $x > \frac{1}{2}$.

Если $a < -1$, то $a+1 < 0$ и $1-a > 0$, и из первой системы следует

$$\begin{cases} x < -\dfrac{a}{a+1}, \\ x < -\dfrac{a}{1-a}. \end{cases}$$

Так как $a < -1$ влечет $-\dfrac{a}{a+1} < 0$, а $x > 0$, то в этом случае исходное неравенство не имеет решений. Вторая система совокупности примет вид

$$\begin{cases} x > -\dfrac{a}{a+1}, \\ x > -\dfrac{a}{1-a}, \end{cases}$$

и, поскольку $x > 0$, получим $x > \dfrac{a}{a-1}$.

Таким образом,

если $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, то $x \in (\frac{a}{a-1};+\infty)$;
если $a \in [0;1]$, то неравенство не имеет решений;
если $a = -1$, то $x \in (\frac{1}{2};+\infty)$.

c) Используя свойство модуля, получим

$$|x+a| > 2 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x+a > 2, \\ x+a < -2, \end{array} \right. \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2-a, \\ x < -a-2. \end{array} \right.$$

d) Если $a < 0$, то неравенство не имеет решений (левая часть неравенства неотрицательна). Если $a = 0$, то неравенство имеет единственное решение: $x = 0$. Если $a > 0$, то

$$|x-a| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x-a \leq a \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 2a.$$