Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b. \tag{1}$$

Утверждение 1. Если $a > 0,\ a \neq 1$, уравнение (1) при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$.

Пример 1. Решить уравнения:

$$a)\ \log_2 x = 3, \qquad b)\ \log_3 x = -1, \qquad c)\ \log_{\frac{1}{3}} x = 0.$$

Решение. Используя утверждение 1, получим

a) $x = 2^3$ или $x = 8$; b) $x = 3^{-1}$ или $x = \dfrac{1}{3}$; c) $x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0$ или $x = 1$.

Приведем основные свойства логарифма.

P1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

где $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$.

P2. Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2 \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0).$$

Замечание. Если $N_1 \cdot N_2 > 0$, тогда свойство P_2 примет вид

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 \cdot N_2 > 0).$$

P3. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2 \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0).$$

Замечание. Если $\frac{N_1}{N_2} > 0$, (что равносильно $N_1 N_2 > 0$) тогда свойство **P3** примет вид

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_a |N_2| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 N_2 > 0).$$

P4. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

$$\log_a N^k = k \log_a N \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0).$$

Замечание. Если k - четное число (k=2s), то

$$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N \neq 0).$$

P5. Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0);$$

в частности, если $N = b$, получим

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1). \tag{2}$$

Используя свойства **P4** и **P5**, легко получить следующие свойства

$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c}\log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), \tag{3}$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), \tag{4}$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0) \tag{5}$$

и, если в (5) c - четное число ($c = 2n$), имеет место

$$\log_{a^{2n}} b = \frac{1}{2n}\log_{|a|} b \qquad (b > 0,\ a \neq 0,\ |a| \neq 1). \tag{6}$$

Перечислим и основные свойства логарифмической функции $f(x) = \log_a x$:

1. Область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел.

2. Область значений логарифмической функции - множество действительных чисел.

3. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0 < a < 1$ - строго убывает ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$).

4. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1 \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

5. Если $a > 1$, то логарифмическая функция отрицательна при $x \in (0; 1)$ и положительна при $x \in (1; +\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $x \in (0; 1)$ и отрицательна при $x \in (1; +\infty)$.

6. Если $a > 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если $a \in (0; 1)$ - выпукла вниз.

Следующие утверждения (см., например, [1]) используются при решении логарифмических уравнений.

Утверждение 1. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ равносильно одной из систем (очевидно, выбирается та система, неравенство которой решается проще)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Нужно подчеркнуть, что в процессе решения логарифмических уравнений часто используются преобразования, которые изменяют область допустимых значений (*ОДЗ*) исходного уравнения. Следовательно, могут появиться "чужие" решения или могут быть потеряны решения. Например, уравнения

$$f(x) = g(x) \;\text{ и }\; \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

или

$$\log_a[f(x) \cdot g(x)] = b \;\text{ и }\; \log_a f(x) + \log_a g(x) = b,$$

вообще говоря, неравносильны (*ОДЗ* уравнений справа уже).

Следовательно, при решении логарифмических уравнений полезно использовать равносильные преобразования. В противном случае, проверка полученных решений является составной частью решения. Более того, необходимо учитывать и преобразования, которые могут привести к потере корней.

Приведем основные способы решения логарифмических уранений.

I. Использование определения логарифма

Пример 2. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} a)\ \log_2(5 + 3\log_2(x-3)) = 3, & c)\ \log_{(x-2)} 9 = 2, \\ b)\ \log_3 \dfrac{x-3}{x+3} = 1, & d)\ \log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2. \end{array}$$

Решение. а) Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b. Таким образом, $\log_a b = c \;\Leftrightarrow\; b = a^c$ и, следовательно,

$$5 + 3\log_2(x-3) = 2^3$$

или

$$3\log_2(x-3) = 8 - 5, \qquad \log_2(x-3) = 1.$$

Опять используя определение, получим

$$x - 3 = 2^1, \quad x = 5.$$

Проверка полученного корня является неотъемлемой частью решения этого уравнения:

$$\log_2(5 + 3\log_2(5-3)) = \log_2(5 + 3\log_2 2) = \log_2(5+3) = \log_2 8 = 3.$$

Получим истинное равенство $3 = 3$ и, следовательно, $x = 5$ есть решение исходного уравнения.

b) Аналогично примеру a), получим уравнение

$$\frac{x-3}{x+3} = 3,$$

откуда следует линейное уравнение $x-3 = 3(x+3)$ с решением $x = -6$. Сделаем проверку и убедимся, что $x = -6$ является корнем исходного уравнения.

c) Аналогично примеру a), получим уравнение

$$(x-2)^2 = 9.$$

Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ с решениями $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$. После проверки остается лишь $x = 5$.

d) Используя определение логарифма, получим уравнение

$$(2x^2 - 8x + 15) = (2x+1)^2$$

или, после элементарных преобразований,

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

откуда $x_1 = -7$ и $x_2 = 1$. После проверки остается $x = 1$.

II. Использование свойств логарифма

Пример 3. Решить уравнения

$$\begin{aligned}
&a)\ \log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24),\\
&b)\ \log_4(x^2-4x+1) - \log_4(x^2-6x+5) = -\frac{1}{2},\\
&c)\ \log_2 x + \log_3 x = 1,\\
&d)\ 2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0,\\
&e)\ 16^{\log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5.
\end{aligned}$$

Решение. a) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$, которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения)

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 24 > 0. \end{cases}$$

Используя свойство **P2** и утверждение 1, получим

$$\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_3 x(x+3) = \log_3(x+24), \\ x > 0, \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x+3) = x+24, \\ x > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x-24 = 0, \\ x > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 4, \end{array} \right. \\ x > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 4.$$

b) Используя свойство **P3**, получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{2},$$

откуда, используя определение логарифма, получим

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

или

$$x^2-4x+1 = \frac{1}{2}(x^2-6x+5),$$

откуда получаем уравнение

$$x^2-2x-3 = 0$$

с решениями $x_1 = -1$ и $x = 3$. После проверки остается лишь $x = -1$.

c) *ОДЗ* уравнения: $x \in (0;+\infty)$. Используя свойство **P5**, получим уравнение

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1,$$

$\log_2 x \left(1 + \dfrac{1}{\log_2 3}\right) = 1,$

$$\log_2 x(1+\log_3 2) = 1,$$

откуда $\log_2 x = \dfrac{1}{1+\log_3 2}$, или $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_3 6}$, или $\log_2 x = \log_6 3$. Следовательно, $x = 2^{\log_6 3}$.

d) *ОДЗ* уравнения - множество $(2;4) \cup (4;+\infty)$ определяется из системы неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} x-2 > 0, \\ (x-4)^2 \neq 0. \end{array} \right.$$

Используя свойство **P4** (учитывая замечание), получим равносильное уравнение

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0$$

или $\log_3(x-2) + \log_3|x-4| = 0$.

Используя свойство **P2**, получим равносильное уравнение

$$\log_3(x-2)|x-4| = 0, \qquad (x-2)|x-4| = 1.$$

Поскольку в *ОДЗ* $x-2 = |x-2|$ уравнение можно записать следующим образом

$$|x-2||x-4| = 1 \quad \text{или} \quad |x^2-6x+8| = 1,$$

последнее уравнение (см. свойства модуля) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=1, \\ x^2-6x+8=-1, \end{array}\right.$$

откуда получим: $x_1 = 3$, $x_2 = 3+\sqrt{2}$ и $x_3 = 3-\sqrt{2} \notin$ *ОДЗ*. Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x_1 = 3$ и $x_2 = 3+\sqrt{2}$.

e) Поскольку

$$16^{\log_4(1-2x)} = 4^{2\log_4(1-2x)} = \left[4^{\log_4(1-2x)}\right]^2,$$

используя свойство **P1**, получим, что в *ОДЗ* ($x \in (-\infty; -1)$) уравнение равносильно уравнению

$$(1-2x)^2 = 5x^2 - 5$$

или

$$x^2 + 4x - 6 = 0,$$

откуда следует: $x_1 = -2-\sqrt{10}$ и $x_2 = -2+\sqrt{10}$. Последнее значение x не входит в *ОДЗ*, остается единственное решение $x = -2-\sqrt{10}$.

III. Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравнение можно свести к алгебрическому уравнению относительно новой переменной. Например, уравнение $F(\log_a x) = 0$, где $F(x)$ - алгебраическая рациональная функция, посредством подстановки $\log_a x = t$ сводится к алгебраическому уравнению относительно t: $R(t) = 0$.

Пример 4. Решить уравнения

$$\begin{array}{ll} a)\ \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0, & c)\ \lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14, \\ b)\ \log_2^2(x-1)^2 - 3\log_2(x-1) - 1 = 0, & d)\ 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}. \end{array}$$

Решение. a) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в *ОДЗ*.

b) *ОДЗ* уравнения - множество $(1; +\infty)$. Поскольку $\log_2^2(x-1)^2 = [\log_2(x-1)^2]^2 = (2\log_2|x-1|)^2 = (2\log_2(x-1))^2 = 4[\log_2(x-1)]^2$, подстановкой $t = \log_2(x-1)$ получим квадратное уравнение

$$4t^2 - 3t - 1 = 0,$$

решениями которого являются $t_1 = -\frac{1}{4}$ и $t_2 = 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = -\dfrac{1}{4}, \\ \log_2(x-1) = 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 2^{-\frac{1}{4}}, \\ x-1 = 2^1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

c) *ОДЗ* уравнения - множество $(0; +\infty)$. Так как

$$\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + \lg x)^2 = (2 + \lg x)^2,$$

$$\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2,$$

подстановкой $t = \lg x$ сведем исходное уравнение к квадратному уравнению

$$(2+t)^2 + (1+t)^2 + t = 14$$

или

$$2t^2 + 7t - 9 = 0,$$

откуда $t_1 = -\frac{9}{2}$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $x_1 = 10^{-\frac{9}{2}}$ и $x_2 = 10$.

d) *ОДЗ* уравнения - множество $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Поскольку $x^{\lg 5} = x^{\frac{\log_x 5}{\log_x 10}} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\lg x}$, уравнение примет вид $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ или $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, откуда $5^{\lg x} = 25$ или $5^{\lg x} = 5^2 \;\Leftrightarrow\; \lg x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 100$.

IV. Уравнения, содержащие выражения вида $f(x)^{\log_a g(x)}$

Пример 5. Решить уравнения

$$a)\ (x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2), \qquad b)\ 5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10.$$

Решение. а) *ОДЗ* уравнения определяется из системы $\left\{\begin{array}{l} x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1. \end{array}\right.$ Получим множество $x \in (-2;-1) \cup (-1;+\infty)$. В *ОДЗ* обе части уравнения положительны, поэтому, логарифмируя обе части уравнения (например, по основанию 2), получим равносильное уравнение

$$\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4 \cdot (x+2))$$

или, используя свойства **P4** и **P2**,

$$\log_2(x+2) \cdot \log_2(x+2) = \log_2 4 + \log_2(x+2).$$

Обозначив $\log_2(x+2) = t$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

решениями которого являются $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) = -1, \\ \log_2(x+2) = 2, \end{array}\right.$$

откуда $\left[\begin{array}{l} x+2=\dfrac{1}{2}, \\ x+2=4, \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{3}{2}, \\ x_2=2. \end{array}\right.$ Оба корня входят в *ОДЗ*.

b) *ОДЗ* уравнения - множество $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Поскольку (см. свойство **P5** и формулу (2))

$$5^{\log_2 x} = 5^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2}} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\frac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5},$$

уравнение примет вид

$$x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10 \quad \text{или} \quad x^{\log_2 5} = 5.$$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, получим

$$\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5$$

или $\log_2 x = 1$, откуда $x = 2$.

V. Некоторые специальные методы

Пример 6. Решить уравнения

a) $2^x = 9 - \log_3 x;$

b) $x\log_3^2(x-1) + 4(x-1)\log_3(x-1) - 16 = 0;$

c) $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 2x - x^2;$

d) $\log_5(x+2) = 4 - x;$

e) $\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3;$

f) $|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1|;$

g) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x+1) = 3;$

h) $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11.$

Решение. a) Заметим, что $x = 3$ есть корень данного уравнения: $2^3 = 9 - \log_3 3$, $8 = 9 - 1$, $8 = 8$. Других решений уравнение не имеет, так как левая часть уравнения представляет строго возрастающую функцию, а правая часть - строго убывающую функцию. Графики таких функций имеют не более одной точки пересечения и, следовательно, поскольку $x = 3$ является решением, следует, что других решений нет.

b) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in (1;+\infty)$. Обозначив $\log_3(x-1) = t$, получим квадратное уравнение относительно t

$$xt^2 + 4(x-1)t - 16 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $\Delta = [4(x-1)]^2 + 4x \cdot 16 = 16x^2 + 32x + 16 = 16(x+1)^2$, а корни

$$t_1 = \frac{-4(x-1) - 4(x+1)}{2x} = -4 \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{-4(x-1) + 4(x+1)}{2x} = \frac{4}{x}.$$

Таким образом, получена совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x-1) = -4, \\ \log_3(x-1) = \dfrac{4}{x}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получим $x_1 = 1\frac{1}{81}$, а второе уравнение решается аналогично предыдущему примеру: заметив, что $x = 4$ есть корень уравнения, доказывается, что других корней нет.

Следовательно, корнями исходного уравнения являются $x_1 = 1\frac{1}{81}$ и $x = 4$.

c) *ОДЗ* уравнения определяется из системы $\begin{cases} x^2+1>0, \\ x>0, \end{cases}$ откуда следует $x \in (0; +\infty)$. Используя свойство **P3**, получим равносильное уравнение

$$\log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2x - x^2.$$

Поскольку $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$, а знак равенства достигается лишь при $x = 1$, то левая часть уравнения $\log_2 \dfrac{x^2+1}{x} \geq 1$. В то же время правая часть уравнения принимает максимальное значение 1 при $x = 1$ (вершина параболы $y = 2x - x^2$ находится в точке $(1; 1)$). Следовательно, уравнение имеет решения только если $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2+1}{x} = 2, \\ 2x - x^2 = 2, \end{cases}$ откуда $x = 1$.

d) Решая аналогично примеру a), получим $x = 3$.

e) Используя утверждение **A1** (**иррациональные уравнения**), получим

$$\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x^2)\log_4(16x) = \left(\log_4 x^3\right)^2, \\ \log_4 x^3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_4 16 + \log_4 x) = \left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2\log_2 x)(2 + \frac{1}{2}\log_2 x) = \frac{9}{4}\log_2^2 x, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2 x - 2 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ 5t^2 - 18t - 8 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{2}{5}, \\ t_2 = 4, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ \log_2 x = 4, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \\ x = 16, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

f) Используя свойства **P2**, **P3** и свойства модуля (см., например, [2]), получим

$$|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1| \Leftrightarrow |\log_2 \frac{3x-1}{3}| = |\log_2 \frac{5-2x}{2}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} - \log_2 \frac{5-2x}{x}\right) \cdot \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} + \log_2 \frac{5-2x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3}\cdot\dfrac{2}{5-2x}\right)=0, \\ \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3}\cdot\dfrac{5-2x}{2}\right)=0, \end{array} \right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2(3x-1)=3(5-2x), \\ (3x-1)(5-2x)=6, \end{array} \right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{12}, \\ x=1,\ x=\dfrac{11}{6}, \end{array} \right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow\ x\in\left\{1;\dfrac{17}{12};\dfrac{11}{6}\right\}.$$

g) Находим *ОДЗ* уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ x^3-9x+8>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x>-1, \\ x\neq 0, \\ x^3-x-8x+8>0, \\ x>1, \\ x\neq 2, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x>1, \\ x\neq 2, \\ (x-1)(x^2+x-8)>0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x>1, \\ x\neq 2, \\ x^2+x-8>0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x>1, \\ x\neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}, \\ x>\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow\ x>\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}.$$

Используя свойство **P5**, получим (в *ОДЗ*)

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8)\cdot\frac{1}{\log_{x+1}(x-1)}=3$$

или

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8)=\log_{x+1}(x-1)^3,$$

откуда следует уравнение

$$(x-1)(x^2+x-8)=(x-1)^3,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^2+x-8=x^2-2x+1, \end{array} \right.$$

откуда $x_1=1,\ x_2=3$.

Поскольку $x=1$ не удовлетворяет *ОДЗ*, а $3>\dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$, остается лишь $x=3$.

h) Поскольку функция $f(x)=6x-x^2-5$ достигает своего максимума 4 при $x=3$, следует, что

$$\log_2(6x-x^2-5)\leq 2.$$

Правая часть уравнения $x^2-6x+11=x^2-6x+9+2=(x-3)^2+2$ и, следовательно, 2 - это наименьшее ее значение (достигается при $x=3$). Таким образом, уравнение имеет решение лишь в случае, если одновременно $\log_2(6x-x^2-5)=2$ и $x^2-6x+11=2$, то есть, если $x=3$.

Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании называется логарифмическим неравенством.

В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Подчеркнем, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака $>$ может фигурировать любой из знаков $\geq$, $<$, $\leq$. В этом случае утверждения 1-3 соответственно преобразуются.

Пример 1. Решить неравенства

$a)$ $\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x+8)$; $\qquad d)$ $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)$;

$b)$ $\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\dfrac{2}{x-2}$; $\qquad e)$ $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

$c)$ $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0$;

Решение. а) Используя утверждение 1, получим

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x+8) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq x + 8, \\ x + 8 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 4, \end{array} \right. \\ x > -8, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty).$$

b) Основание логарифма число между нулем и единицей, поэтому, используя утверждение 2, получим

$$\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x < \dfrac{2}{x-2}, \\ 5 - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5-x)(x-2)-2}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x - x^2 - 12}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x-3)(x-4)}{x-2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ x > 4, \end{array} \right. \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ 4 < x < 5, \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (2;3) \cup (4;5).$$

c) Запишем $0 = \log_2 1$ и, используя утверждение 1, получим

$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > \log_2 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > 1.$$

Запишем $1 = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$ и, используя утверждение 2, получим

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8 x < \dfrac{1}{3}, \\ \log_8 x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 8^{\frac{1}{3}}, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

d) Используя утверждение 3, получим

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x < 4-x, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (3;4), \\ x \in \emptyset, \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (3;4).$$

Решение первой системы совокупности:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x, \\ 4-x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3} - 1 > 0, \\ 5 > 4, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-3} > 0, \\ x \in \mathbf{R}, \\ x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Решение второй системы совокупности:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x+2}{x-3}, \\ \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x, \\ 5-x < 4-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array} \right. \\ \dfrac{5}{x-3} < 0, \\ x < 5, \\ 5 < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array} \right. \\ x < 3, \\ x < 5, \\ x \in \emptyset, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

e) Запишем $1 = \log_{2x} 2x$ и используем утверждение 3 (учитывая, что знак $>$ заменен на знак $<$).

$$\log_{2x}(x^2-5x+6) < \log_{2x} 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2-5x+6 < 2x, \\ x^2-5x+6 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2-5x+6 > 2x, \\ 2x > 0, \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1;2) \cup (3;6), \\ x \in (0;\frac{1}{2}), \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;\frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (3;6).$$

Решение первой системы совокупности:

$$\left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1;2) \cup (3;6).$$

Решение второй системы совокупности:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;\frac{1}{2}).$$

Неравенства вида $F(\log_a x) > 0$ сводятся подстановкой $t = \log_a x$ к алгебраическому неравенству $F(t) > 0$.

Пример 2. Решить неравенства

$$a)\ \log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0;$$

$$b)\ \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1.$$

Решение. a) Обозначив $t = \log_{\frac{1}{2}} x$, получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 \geq 0$, откуда $t \leq -2$ или $t \geq 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 0 < x \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;\frac{1}{2}] \cup [4;+\infty).$$

b) Обозначив $t = \lg x$, получим рациональное неравенство

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1.$$

Используя метод интервалов (см., например, [1]-[2]), получим

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1 \Leftrightarrow \frac{1 + t + 2(5 - t) - (5 - t)(1 + t)}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 6}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 2)(t - 3)}{(5 - t)(t + 1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1, \\ 2 < t < 3, \\ t > 5. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} \lg x < -1, \\ 2 < \lg x < 3, \\ \lg x > 5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{10}, \\ 100 < x < 1000, \\ x > 10^5, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{10}) \cup (100; 1000) \cup (10^5; +\infty).$$

В случае логарифмических неравенств, которые не имеют вид неравенств, входящих в утверждения 1-3, определяется *ОДЗ* и с помощью равносильных преобразований исходные неравенства сводятся к неравенствам, которые решаются с помощью утверждений 1-3.

Пример 3. Решить неравенства

$$a)\ \lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4; \qquad c)\ \frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2};$$

$$b)\ \log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \le \frac{5}{2}; \qquad d)\ \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}.$$

Решение. a) *ОДЗ* неравенства - множество $(5; +\infty)$. Используя свойство **P2**, получим неравенство

$$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4.$$

Используя утверждение 1, получим

$$\left\{\begin{array}{l} (x-2)(x-5) < 4, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{array}\right.$$

Решаем систему

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (5; 6)$$

и, учитывая *ОДЗ*, получим $x \in (5; 6)$.

b) Определим *ОДЗ* неравенства

$$\left\{\begin{array}{l} 3x > 0, \\ 9x > 0, \\ 9x \ne 1, \\ 3x^2 > 0, \\ 3x^2 \ne 1, \\ 9x^2 > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > 0, \\ x \ne \dfrac{1}{9}, \\ x \ne \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty).$$

Приведя все логарифмы к основанию 3, получим

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x} + \frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2} \le \frac{5}{2}.$$

Используя свойство **P2**, получим

$$\frac{1 + \log_3 x}{2 + \log_3 x} + \frac{2 + 2\log_3 x}{1 + 2\log_3 x} \le \frac{5}{2}.$$

Обозначив $\log_3 x = t$, решим полученное неравенство методом интервалов

$$\frac{1+t}{2+t} + \frac{2+2t}{1+2t} - \frac{5}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+t)(1+2t) + 2(2+2t)(2+t) - 5(2+t)(1+2t)}{2(2+t)(1+2t)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 7t}{(2+t)(1+2t)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)} \le 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup [0; +\infty).$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \le -\frac{7}{2}, \\ -2 < \log_3 x < -\frac{1}{2}, \\ \log_3 x \ge 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3^7}}, \\ \frac{1}{9} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x \ge 1, \end{array}\right.$$

откуда, учитывая *ОДЗ*, получим множество решений исходного неравенства:

$$x \in (0; \frac{1}{27\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty).$$

c) Определим *ОДЗ* неравенства

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{4x+5} - 1 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 \ne 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > -1, \\ x \ge -\frac{5}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x > -1.$$

Поскольку $\log_2(\sqrt{4x+5} + 11) = \log_2(1 + (\sqrt{4x+5} + 10)) > \log_2 1 = 0$, неравенство равносильно следующему:

$$2\log_2(\sqrt{4x+5} - 1) > \log_2(\sqrt{4x+5} + 11),$$

откуда следует

$$(\sqrt{4x+5} - 1)^2 > \sqrt{4x+5} + 11.$$

Обозначив $t = \sqrt{4x+5}$, $t \ge 0$, получим квадратное неравенство

$$(t-1)^2 > t + 11$$

или

$$t^2 - 3t - 10 > 0,$$

откуда $t < -2$ или $t > 5$. Поскольку $t \ge 0$, остается $t > 5$ или $\sqrt{4x+5} > 5 \Leftrightarrow x > 5$.

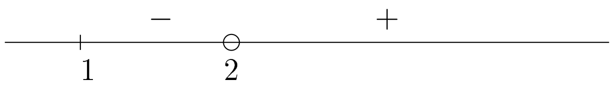
Учитывая *ОДЗ*, получим ответ: $x \in (5; +\infty)$.

d) *ОДЗ* неравенства есть множество $(1; 2) \cup (2; +\infty))$. Используя обобщенный метод интервалов, получим

$$\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{\log_2\sqrt{x+1} - \log_2(x-1)}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow$$

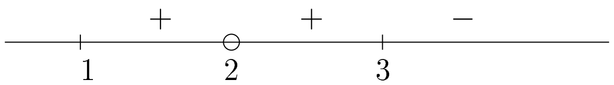
$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \cdot \log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1} < 0.$$

Так как в *ОДЗ* $\log_2(x-1) > 0$ при $x > 2$ и $\log_2(x-1) < 0$ при $1 < x < 2$, следует, что $\log_2\sqrt{x+1} > 0$ для любого x из *ОДЗ*, $\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} > 0$ при $x \in (1;2) \cup (2;3)$ и $\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} < 0$ при $x > 3$, значит,

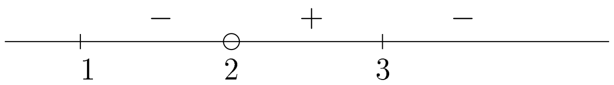


$\log_2(x-1)$

$\log_2\sqrt{x+1}$



$\log_2 \dfrac{x+1}{x-1}$



$\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

получим $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$.

Для укрепления навыков решения логарифмических уравнений и неравенств рекомендуем читателю, например, задачники [3]-[5].

Литература

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.
2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.
3. C.Cosnita, F.Turtoiu. Probleme de algebra. Editura Tehnica. Bucuresti, 1989.
4. Е.Д.Куланин и др. 3000 конкурсных задач по математике. Айрис Ролиф. Москва, 1997.
5. Ф.П.Яремчук, П.Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Киев, Наукова Думка. 1987.