I. Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком радикала называются **иррациональными уравнениями**. Например

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-17}=1, \qquad \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2=0,$$

$$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt{3-2x}, \qquad \sqrt{x^2-3x+4}=2.$$

Подчеркнем, что радикалы четной степени, входящие в уравнение, понимаются в арифметическом смысле и они существуют если и только если подкоренное выражение неотрицательно.

Пример 1. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt{x^2-6x+7}=-1, \qquad d)\ \sqrt{\frac{4-x}{x}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=2-\sqrt{x^2-12},$$

$$b)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=0, \qquad e)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+7}=1+\sqrt{4-x},$$

$$c)\ \sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=3, \qquad f)\ (4x^2-9)\sqrt{x-1}=0.$$

Решение. a) Заметим, что при любом допустимом значении x левая часть уравнения неотрицательна, а его правая часть отрицательна, следовательно уравнение не имеет решений.

b) Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если они одновременно равны нулю, следовательно уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x+2=0, \end{cases}$$

которая противоречива. Следовательно и исходное уравнение не имеет решений.

c) Область допустимых значений (*ОДЗ*) уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} 3-x\geq 0, \\ x-5\geq 0. \end{cases}$$

Поскольку система противоречива, *ОДЗ* данного уравнения является пустым множеством и, следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

d) *ОДЗ* данного уравнения $x=4$, определяется из системы

$$\begin{cases} \dfrac{4-x}{x}\geq 0, \\ \dfrac{x-4}{x+1}\geq 0, \\ x^2-12\geq 0. \end{cases}$$

Поскольку $x=4$ есть единственное допустимое значение, достаточно проверить, является ли оно решением уравнения. Подставив $x=4$ в уравнение получим верное числовое равенство $0=0$ и, следовательно, $x=4$ есть единственное решение данного уравнения.

e) Множество допустимых значений этого уравнения имеет вид $x \in [2;4]$. Это множество определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+7 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что на *ОДЗ* имеет место неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+7} \geq 3$, и поскольку $1+\sqrt{4-x} \leq 1+\sqrt{2} < 3$, следовательно данное уравнение не имеет решений.

f)

$$(4x^2-9)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4x^2-9=0, \\ \sqrt{x-1}=0, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}, \\ x=\dfrac{3}{2}, \\ x=1, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=1. \end{array} \right.$$

Одним из стандартных приемов решения иррациональных неравенств является освобождение от радикалов путем возведения обеих частей в соответствующую степень. Подчеркнем (см. например [1]), что если n нечетное натуральное число, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $\big(f(x)\big)^n=\big(g(x)\big)^n$ равносильны, а если n четное натуральное число, то уравнение $\big(f(x)\big)^n=\big(g(x)\big)^n$ есть следствие уравнения $f(x)=g(x)$ и, следовательно, необходимо провести проверку полученных решений.

Пример 2. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt[3]{5x+27}=x+3, \qquad c)\ \sqrt{x^2-9x+25}=2x-13,$$

$$b)\ \sqrt[3]{x}=\sqrt{x-4}, \qquad d)\ \sqrt{3-x}+\sqrt{6+x}=3.$$

Решение. a) Возводя обе части уравнения в куб, получим равносильное уравнение

$$5x+27=x^3+9x^2+27x+27,$$

или

$$x^3+9x^2+22x=0,$$

откуда следует совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2+9x+22=0. \end{array} \right.$$

Поскольку последнее уравнение не имеет решений ($\Delta = 9^2-4\cdot 22 < 0$), то $x=0$ - единственное решение исходного уравнения.

b) Возводя обе части уравнения в шестую степень получим

$$x^2=(x-4)^3$$

или

$$x^3-13x^2+48x-64=0,$$

откуда, удобно группируя,

$$(x^3-8x^2)-(5x^2-40x)+(8x-64)=0,$$

получим

$$x^2(x-8)-5x(x-8)+8(x-8)=0,$$

или

$$(x-8)(x^2-5x+8)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-8=0, \\ x^2-5x+8=0, \end{array}\right.$$

откуда $x=8$. Проверкой убеждаемся, что $x=8$ удовлетворяет исходному уравнению.

c) Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$x^2-9x+25=4x^2-52x+169,$$

или

$$3x^2-43x+144=0,$$

решения которого $x_1=9$ и $x_2=\dfrac{16}{3}$. После проверки остается лишь $x=9$.

d) Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{6+x}=3-\sqrt{3-x},$$

и возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$6+x=9-6\sqrt{3-x}+3-x.$$

Опять отделим один корень

$$6\sqrt{3-x}=6-2x,$$

или

$$3\sqrt{3-x}=3-x,$$

и возводя в квадрат, получим уравнение

$$9(3-x)=(3-x)^2,$$

корни которого $x=3$ и $x=-6$. Проверкой убеждаемся, что оба значения удовлетворяют исходному уравнению.

При решении иррациональнных уравнений удобно и полезно следующее утверждение (см., например, [2]).

A1. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\Big[g(x)\Big]^{2n}, \\ g(x)\geq 0. \end{array}\right.$$

Замечание. Из утверждения **A1** следует, что уравнения $\sqrt[2n]{f(x)} = b$ $(b \geq 0)$ и $f(x) = [b]^{2n}$ равносильны.

Пример 3. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt{x^2 - 9x + 25} = 2x - 13, \qquad b)\ \sqrt{10 - x} = x + 2.$$

Решение. a) (Сравните решение с приведенным в примере 2d)) используя утверждение **A1**, получим систему

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 25 = (2x - 13)^2, \\ 2x - 13 \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x^2 - 43x + 144 = 0, \\ x \geq \dfrac{13}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{16}{3}, \\ x_2 = 9, \end{array} \right. \\ x \geq \dfrac{13}{2}, \end{cases}$$

и значит $x = 9$.

b) Используя утверждение **A1**, получим

$$\sqrt{10 - x} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x = (x + 2)^2, \\ x + 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 = 0, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 1, \end{array} \right. \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow\ x = 1.$$

Подчеркнем, что при решении уравнений, содержащих радикалы четной степени полезно работать с множеством допустимых значений на всем протяжении решения уравнения.

Пример 4. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} = 1, \qquad c)\ \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$$

$$b)\ \sqrt{\frac{20 + x}{x}} + \sqrt{\frac{20 - x}{x}} = \sqrt{6}, \qquad d)\ \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{11 - x}.$$

Решение. a) *ОДЗ* данного уравнения $x \in \left[\frac{5}{3}; 4\right]$. Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$\sqrt{3x - 5} = 1 + \sqrt{4 - x}.$$

Поскольку обе части уравнения на *ОДЗ* принимают неотрицательные значения, возводя в квадрат получим равносильное уравнение

$$3x - 5 = 1 + 2\sqrt{4 - x} + 4 - x,$$

которое, после очевидных преобразований принимает вид

$$2x-5=\sqrt{4-x}.$$

Используя утверждение **A1** и учитывая *ОДЗ*, получим

$$2x-5=\sqrt{4-x} \;\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-5)^2=4-x, \\ x\geq \dfrac{5}{2}, \\ x\in[\frac{5}{3};4], \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-19x+21=0, \\ x\in[\frac{5}{2};4], \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{7}{4}, \\ x_2=3, \end{array}\right. \\ x\in[\frac{5}{2};4], \end{cases} \Leftrightarrow\; x=3.$$

b) *ОДЗ* данного уравнения $x\in(0;20]$. Так как на *ОДЗ* обе части уравнения неотрицательны, то возводя в квадрат получим равносильное уравнение

$$\frac{20+x}{x}+2\sqrt{\frac{20+x}{x}}\sqrt{\frac{20-x}{x}}+\frac{20-x}{x}=6$$

или, учитывая, что условие $x\in(0;20]$ влечет $2\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=2\dfrac{\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}}{x}$, получаем уравнение

$$20+x+2\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}+20-x=6x,$$

откуда

$$\sqrt{20+x}\sqrt{20-x}=3x-20.$$

Последнее уравнение на *ОДЗ* равносильно системе

$$\begin{cases} (20+x)(20-x)=(3x-20)^2, \\ 3x-20\geq 0, \\ x\in(0;20] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 10x^2-120x=0, \\ x\in\left[\frac{20}{3};20\right] \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=12, \end{array}\right. \\ x\in\left[\frac{20}{3};20\right] \end{cases}$$

и значит $x=12$.

c) Область допустимых значений этого уравнения, ппредставляет множество $x\in(-\infty;-4]\cup\{2\}\cup[3,+\infty)$, являющееся решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-x-2\geq 0, \\ x^2+2x-8\geq 0, \\ x^2-5x+6\geq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что если $AB \geq 0$, то $\sqrt{AB} = \sqrt{|A|} \cdot \sqrt{|B|}$, получим

$$\sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x-2|}\sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}\sqrt{|x-2|}$$

или

$$\sqrt{|x-2|} \cdot \left(\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} - \sqrt{|x-3|}\right) = 0,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{|x-2|} = 0, \\ \sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+4|} = \sqrt{|x-3|}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения совокупности получим $x = 2$.

Для решения второго уравнения совокупности, учитывая *ОДЗ*, рассмотрим следующие два случая:

I. Если $x \in (-\infty; -4]$, уравнение примет вид

$$\sqrt{-1-x} + \sqrt{-x-4} = \sqrt{3-x}.$$

Возводя в квадрат, получим равносильное уравнение

$$-1 - x + 2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} - x - 4 = 3 - x$$

или

$$2\sqrt{-1-x}\sqrt{-x-4} = 8 + x.$$

Используя утверждение **А1**, получим

$$\left\{\begin{array}{l} 4(1+x)(x+4) = (8+x)^2, \\ x \geq -8 \end{array}\right.$$

или, после очевидных преобразований

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 4x - 48 = 0, \\ x \geq -8. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $x \in [-8; -4]$, получим решение

$$x = \frac{-2 - 2\sqrt{37}}{3}.$$

II. Если $x \in [3; +\infty)$, уравнение примет вид

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x-3}$$

Поскольку $x+4 > x-3$, то $\sqrt{x+4} > \sqrt{x-3}$. Из последднего неравенства и неравенства $\sqrt{x-1} \geq 2$ следует что данное уравнение при $x \geq 3$ не имеет решений. Таким образом, корни исходного уравнения $x = 2$ и $x = \dfrac{-2 - 2\sqrt{37}}{3}$.

d) Область допустимых значений уравнения $x \in [1;11]$ является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ 11-x \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку обе части уравнения неотрицательны, возводя в квадрат, получим равносильное уравнение

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} = 10-3x,$$

которое равносильно системе (см. утверждение **A1**)

$$\begin{cases} 4(x-1)(x+2) = (10-3x)^2, \\ 10-3x \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 5x^2-64x+108=0, \\ x \leq \dfrac{10}{3}, \end{cases}$$

решение которой $x_1 = 2$, удовлетворяет *ОДЗ* исходного уравнения.

Уравнения вида

$$F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = 0$$

посредством подстановки $\sqrt[n]{f(x)} = t$, как правило, приводятся к алгебраическим уравнениям.

Пример 5. Решить уравнения

$a)$ $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} = 18,$ $\qquad$ $c)$ $1 + \dfrac{15}{\sqrt{2x+1}} = 2\sqrt{2x+1},$

$b)$ $\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x+7}{x+4}} = \dfrac{13}{6},$ $\qquad$ $d)$ $x^2+5x+4 = 5\sqrt{x^2+5x+28}.$

Решение. a) Положив $\sqrt[6]{x} = t$ $(t \geq 0)$, тогда $\sqrt[3]{x} = t^2$. В результате получаем уравнение

$$2t^2+5t-18=0,$$

корни которого $t_1 = -\dfrac{9}{2}$ и $t_2 = 2$. Поскольку $t \geq 0$ остается $t = 2$ или $\sqrt[6]{x} = 2$, откуда $x = 2^6$ или $x = 64$.

b) *ОДЗ* данного уравнения есть $\mathbf{R} \setminus \{-4; -\frac{7}{5}\}$. Заметим, что уравнение содержит взаимно обратные выражения. Сделав подстановку $\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = t$ получим $\sqrt[3]{\dfrac{5x+7}{x+4}} = \dfrac{1}{t}$ и уравнение примет вид

$$t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6},$$

или, после очевидных преобразований

$$6t^2-13t+6=0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим корни $t_1 = \dfrac{2}{3}$ и $t_2 = \dfrac{3}{2}$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = \dfrac{2}{3}, \\ \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{5x+7}} = \dfrac{3}{2}, \end{array}\right.$$

или, возводя в куб,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+4}{5x+7} = \dfrac{8}{27}, \\ \dfrac{x+4}{5x+7} = \dfrac{27}{8}, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\dfrac{157}{127}. \end{array}\right.$$

c) Положим $\sqrt{2x+1} = t,\ t > 0$ и получим уравнение

$$1 + \frac{15}{t} = 2t$$

или

$$2t^2 - t - 15 = 0,$$

откуда $t_1 = -\dfrac{5}{2}$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t = 3$. Таким образом

$$\sqrt{2x+1} = 3$$

откуда, учитывая замечание к утверждению **A1**, получим $2x + 1 = 9$ и $x = 4$.

d) Сделаем подстановку $\sqrt{x^2+5x+28} = t,\ t \geq 0$, тогда $x^2 + 5x + 28 = t^2$, откуда $x^2 + 5x = t^2 - 28$ и уравнение примет вид

$$t^2 - 28 + 4 = 5t$$

или

$$t^2 - 5t - 24 = 0$$

откуда $t_1 = -3$ и $t_2 = 8$.

Так как $t \geq 0$, получим

$$\sqrt{x^2+5x+28} = 8.$$

Возводя в квадрат, получим равносильное уравнение

$$x^2 + 5x + 28 = 64,$$

или

$$x^2 + 5x - 36 = 0,$$

решения которого $x = -9$ и $x = 4$.

В некоторых случаях иррациональное уравнение можно рационализировать умножив обе части уравнения на отличное от нуля выражение.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} - \sqrt{3x^2 - x - 1} = 1$$

Решение. Умножив обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} \neq 0,$$

(сопряженное выражение левой части уравнения), после сокращения подобных слагаемых, получим уравнение

$$7 = \sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1}$$

равносильное исходному, так как уравнение

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} = 0$$

не имеет действительных решений.

Сложив почленно уравнения

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} - \sqrt{3x^2 - x - 1} = 1,$$

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} + \sqrt{3x^2 - x - 1} = 7,$$

получим уравнение

$$2\sqrt{3x^2 - x + 6} = 8,$$

или

$$\sqrt{3x^2 - x + 6} = 4.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат получим равносильное уравнение

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

решения которого $x_1 = -\dfrac{5}{3}$ и $x_2 = 2$.

Проверкой убеждаемся, что среди найденных корней нет посторонних.

Замечание. Данное уравнение можно решить используя подстановку $t = 3x^2 - x + 6$. В результате получим $3x^2 - x - 1 = 3x^2 - x + 6 - 7 = t - 7$ и уравнение примет вид

$$\sqrt{t} - \sqrt{t - 7} = 1.$$

Последнее уравнение решается аналогично примеру 2d).

Рассмотрим уравнения, которые решаются выделением полного квадрата под знаком радикала.

Пример 7. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 5,$$

$$b)\ \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = x - 1.$$

Решение. a) Заметив, что $x^2-4x+4=(x-2)^2, \quad x^2+6x+9=(x+3)^2$ и учитывая что $\sqrt{A^2}=|A|$, получим уравнение

$$|x-2|+|x+3|=5.$$

Так как $|x-2|=|2-x|, \quad (2-x)+(x+3)=5$ и, следовательно

$$|2-x|+|x+3|=|(2-x)+(x+3)|$$

используя свойства модуля (см., например, [1]), получим что данное уравнение равносильно неравенству

$$(2-x)(x+3)\geq 0,$$

откуда получим множество решений исходного уравнения

$$x\in[-3;2].$$

b) Под знаком каждого радикала выделим полный квадрат

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\cdot 2\sqrt{x-1}+4}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}=|\sqrt{x-1}-2|,$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\cdot 3\sqrt{x-1}+9}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=|\sqrt{x-1}-3|.$$

Сделаем подстановку $\sqrt{x-1}=t$, $t\geq 0$, после этого уравнение примет вид

$$|t-2|+|t-3|=t^2.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0\leq t\leq 2,\\ -t+2-t+3=t^2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2<t\leq 3,\\ t-2-t+3=t^2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}t>3,\\ t-2+t-3=t^2,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0\leq t\leq 2,\\ t=-1\pm\sqrt{6},\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2<t\leq 3,\\ t=\pm 1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}t>3,\\ t\in\emptyset,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

откуда $t=\sqrt{6}-1$. Таким образом $\sqrt{x-1}=\sqrt{6}-1$ или $x=8-2\sqrt{6}$.

Рассмотрим несколько специальных способов решения иррациональных уравнений.

Пример 8. Решить уравнения

$$a)\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{3x-5}=4,$$
$$b)\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-2},$$
$$c)\ \frac{(4-x)\sqrt{4-x}+(x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}}=2,$$
$$d)\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+2\sqrt{(x-2)(x+2)}=6-2x,$$
$$e)\ \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6,$$
$$f)\ \sqrt[4]{x+7}-\sqrt[4]{x-9}=2,$$
$$g)\ \frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x,$$
$$h)\ 3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x},$$
$$i)\ \sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Решение. a) Легко проверить, что $x = 2$ - корень данного уравнения. Других решений уравнение не имеет, поскольку левая часть уравнения является возрастающей функцией (как сумма двух возрастающих функций), а правая часть - постоянная функция, следовательно графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Итак, $x = 2$ - единственное решение уравнения.

b) Используя формулу $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$, возводим обе части уравнения в куб

$$x+3x-2+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2})=x-2 \qquad (1)$$

откуда, учитывая что $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-2}$ (исходное уравнение), получим

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x-2}\sqrt[3]{x-2}=x. \qquad (2)$$

Возводя ещё раз в куб, получим уравнение

$$x(3x-2)(x-2)=-x^3$$

или

$$x\left[(3x-2)(x-2)+x^2\right]=0,$$

откуда получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-2x+1=0, \end{array}\right.$$

решения которой

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся (проверка необходима, так как уравнения (1) и (2) в общем случае неравносильны) что $x = 0$ - единственное решение уравнения.

c) *ОДЗ* данного уравнения $x \in [2; 4]$. Обозначив $\sqrt{4-x} = u$, $\sqrt{x-2} = v$, получим систему

$$\begin{cases} 4 + x = u^2, \\ x - 2 = v^2, \end{cases}$$

откуда $u^2 + v^2 = 2$.

В новых обозначениях уравнение примет вид

$$\frac{u^3 + v^3}{u + v} = 2$$

или

$$\frac{(u+v)(u^2 - uv + v^2)}{u + v} = 2$$

и, поскольку $u + v \neq 0$,

$$u^2 - uv + v^2 = 2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 2, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} uv = 0, \\ u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$$

Так как $u \geq 0,\ v \geq 0$, решение данной системы $u_1 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ и $u_2 = \sqrt{2}$, $v_2 = 0$, откуда следует $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

d) *ОДЗ* уравнения $x \in [2; 3]$. Сделаем подстановку $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = t,\ t > 0$ тогда $t^2 = x - 2 + x + 2 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$ или $2\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = t^2 - 2x$ и уравнение примет вид

$$t + t^2 = 6$$

откуда $t_1 = -3$ (не удовлетворяет условию $t > 0$) и $t = 2$. Таким образом

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 2.$$

Решая последнее неравенство анологично примеру 8a), получим $x = 2$.

e) *ОДЗ* уравнения $x \in [1; 3]$. Правая часть уравнения $x^2 - 4x + 6 = x^2 - 4x + 4 + 2 = (x-2)^2 + 2$ на *ОДЗ* принимает минимальное значение 2 при $x = 2$, а левая часть уравнения принимает максимальное значение 2 при $x = 2$ (можно показать, например используя дифференциальное исчисление). Следовательно, $x = 2$ - единственное решение уравнения.

f) Положив $\sqrt[4]{x+7} = u$, $\sqrt[4]{x-9} = v,\ \ u \geq 0,\ v \geq 0$, получим равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} u^4 - v^4 = 16, \\ u - v = 2. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения u ($u = 2 + v$) и подставив в первое, получим уравнение

$$(2 + v)^4 - v^4 = 16,$$

или
$$16+32v+24v^2+8v^3+v^4-v^4=16,$$
откуда следует совокупность
$$\left[\begin{array}{l} v=0, \\ v^2+3v+4=0, \end{array}\right.$$
решение которой $v=0$. Тогда $u=2$. Решая систему
$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x+7}=2, \\ \sqrt[4]{x-9}=0, \end{array}\right.$$
получим корень $x=9$.

g) Заметим, что $x=0$ не является решением данного уравнения. Разделив обе части уравнения на x получим уравнение
$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}}+\frac{\sqrt{2x+15}}{x}=2.$$

Так как $a+\dfrac{1}{a}=2 \;\Leftrightarrow\; a=1$ (это следует, например, из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим), получим
$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}}=1$$
откуда, используя утверждение **A1**, получим систему
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+15=x^2, \\ x>0, \end{array}\right.$$
решение которой $x=5$. Проверкой убеждаемся, что $x=5$ - корень исходного уравнения.

h) Область допустимых значений данного уравнения есть $x\in[5;+\infty)$. На *ОДЗ* левая часть уравнения есть строго возрастающая функция, а правая часть - строго убывающая функция, следовательно данное уравнение имеет самое болшее одно решение. Проверив наименьшее возможное значение ($x=5$) убеждаемся, что оно является единственным решением уравнения.

i) *ОДЗ* уравнения $x\in[-3;-1]\cup(0;+\infty)$. Перепишем уравнение
$$\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$
Возводя обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение
$$2\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Так как $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 2$, а $\sqrt{x(x+1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\geq 0$, получим систему
$$\left\{\begin{array}{l} x^2+\dfrac{1}{x^2}=2, \\ \left[\begin{array}{l} x(x+1)=0, \\ 1+\dfrac{1}{x^2}=0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

решение которой $x = -1$. Проверкой убеждаемся, что $x = -1$ есть решение исходного уравнения.

Упражнения

Решить уравнения

1. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{6x+1}$,
2. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+3} = \sqrt{3x+1}$,
3. $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$,
4. $\sqrt{x^3 - x^2 + 4} + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = 3$,
5. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 32x + 64} = 9$,
6. $x^2 - 2x + 4 - 3\sqrt{2x^2 - 4x + 5} = -1$,
7. $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$,
8. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$,
9. $\sqrt{3x-2} - \dfrac{x^2 - 2x + 4}{\sqrt{3x-2}} = x - 3$,
10. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} = 3x - 6 + 2\sqrt{2x^2 - 3x - 9}$,
11. $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$,
12. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$,
13. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$,
14. $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} = 4$,
15. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$,
16. $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$,
17. $\sqrt[4]{47 - 2x} + \sqrt[4]{35 + 2x} = 4$,
18. $(4x^2 - 9)\sqrt{x+1} = 0$,
19. $(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2 - 3x + 7}$,
20. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Библиография

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.