Показательные неравенства

При решении показательных неравенств используются следующие утверждения:

А.1. Если $a > 1$, неравенство
$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$
равносильно неравенству
$$f(x) > g(x).$$

Аналогично,
$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

А.2. Если $0 < a < 1$, неравенство
$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$
равносильно неравенству
$$f(x) < g(x).$$

Аналогично,
$$\begin{cases} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

А.3. Неравенство
$$[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)} \tag{1}$$
равносильно совокупности систем неравенств
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Замечание. Если знак неравенства (1) нестрогий, дополнительно рассматривается и случай
$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \end{cases}$$
где $D(f)$ $(D(g))$ означает область определения функции f (g).

А.4. Если $b \leq 0$, неравенство
$$a^{f(x)} < b$$
не имеет решений (следует из свойств показательной функции).

А.5. Если $b \leq 0$, множеством решений неравенства $a^{f(x)} > b$ является $x \in D(f)$.

А.6. Если $a > 1$, $b > 0$, неравенство
$$a^{f(x)} > b$$
равносильно неравенству
$$f(x) > \log_a b.$$

Аналогично,

$$a^{f(x)} < b \;\Leftrightarrow\; f(x) < \log_a b.$$

А.7. Если $0 < a < 1$, $b > 0$, неравенство

$$a^{f(x)} > b$$

равносильно неравенству

$$f(x) < \log_a b.$$

Аналогично,

$$a^{f(x)} < b \;\Leftrightarrow\; f(x) > \log_a b.$$

Упражнение 1. Решить неравенства:

$a)$ $2^{\frac{2}{x^2-1}} > 2^{\frac{1}{x-2}}$,	$e)$ $2^x < -4$,
$b)$ $(0.3)^{\lvert 2x-3\rvert} < (0.3)^{\lvert 3x+4\rvert}$,	$f)$ $2^x > -4$,
$c)$ $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$,	$g)$ $5^{x^2-2x+3} < 7$,
$d)$ $(x^2-x+1)^x \le 1$,	$h)$ $2^{\frac{\sqrt{x-3}}{x-8}} > -4$.

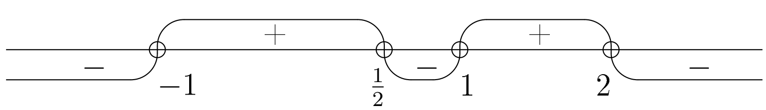
Решение. a) Так как $2 > 1$, используя утверждение **А.1**, получаем равносильное неравенство

$$\frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2},$$

которое решается методом интервалов,

$$\frac{x}{x^2-1} > \frac{1}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x-2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x(x-2)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x-2)} > 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-2x}{(x-1)(x+1)(x-2)} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in (-1; \frac{1}{2}) \cup (1; 2).$$



b) Так как $0 < 0.3 < 1$, используя утверждение **А.2**, получаем равносильное неравенство

$$|2x-3| > |3x+4|,$$

которое решается, используя свойства модуля ($|a| > |b| \;\Leftrightarrow\; (a-b)(a+b) > 0$):

$$|2x-3| > |3x+4| \;\Leftrightarrow\; \Big((2x-3)-(3x+4)\Big)\Big((2x-3)+(3x+4)\Big) > 0 \;\Leftrightarrow\; (-x-7)(5x+1) > 0.$$

Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $x \in (-7; -\frac{1}{5})$.

c) Используя утверждение **А.3**, получим

$$(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad (4x^2+2x+1)^{x^2-x} > (4x^2+2x+1)^0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2+2x+1>1, \\ x^2-x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2+2x+1<1, \\ 4x^2+2x+1>0, \\ x^2-x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>0, \\ x<-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-\frac{1}{2};0), \\ x\in\mathbf{R}, \\ x\in(0;1). \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty), \\ x\in\emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty).$$

d) Учитывая замечание к утверждению **A.3**, получим

$$(x^2-2+1)^x\le 1\ \Leftrightarrow\ (x^2-x+1)^x\le(x^2-x+1)^0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-x+1>1, \\ x\le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x+1<1, \\ x^2-x+1>0, \\ x\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in D(f)\cap D(g)=\mathbf{R}, \\ x^2-x+1=1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x<1, \\ x=0,\ x=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;1].$$

e) Согласно утверждению **A.4**, множество решений неравенства пусто.

f) Используя утверждение **A.5**, получим $x\in\mathbf{R}$.

g) Используя утверждение **A.6**, получим равносильное неравенство

$$x^2-2x+3<\log_5 7.$$

Поскольку $x^2-2x+3=x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2\ge 2$, а $\log_5 7<\log_5 25=2$, множество решений данного неравенства пусто.

h) Множество решений данного неравенства совпадает с его *ОДЗ* (см. утверждение **A.5**):

$$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ x-8\ne 8. \end{cases}$$

откуда $x\in[3;8)\cup(8;+\infty)$.

Все методы решения показательных уравнений (см. Показательные уравнения) можно применить (с соответсвующими изменениями) и в случае неравенств.

Упражнение 2. Решить неравенства:

a) $5^{2x+1}>5^x+4$,

b) $5\cdot 9^x-18\cdot 15^x+9\cdot 25^x>0$,

c) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$,

d) $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}\ge 0$,

e) $\dfrac{1}{3^x+5}\le\dfrac{1}{3^{x+1}-1}$,

f) $3x+12\cdot 3^{\sqrt{x}}\ge 4x\cdot 3^{\sqrt{x}}+9$.

Решение. a) Так как $5^{2x+1} = 5 \cdot (5^x)^2$, обозначив $t = 5^x$, получим квадратное неравенство

$$5t^2 - t - 4 > 0,$$

откуда $t < -\dfrac{4}{5}$ или $t > 1$. Так как $t > 0$, остается $t > 1$, то есть, $5^x > 1$, и $x > 0$.

b) Данное неравенство - однородное показательное неравенство. Разделив обе части неравенства на 25^x, получим неравенство

$$5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Обозначив $t = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$, получим квадратное неравенство

$$5t^2 - 18t + 9 > 0,$$

откуда $t < \dfrac{3}{5}$ или $t > 3$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x < \dfrac{3}{5}, \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x > 3. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $0 < \dfrac{3}{5} < 1$, получаем решения $x > 1$ или $x < \log_{\frac{3}{5}} 3$. Таким образом, множество решений исходного неравенства есть $x \in (-\infty; \log_{\frac{3}{5}} 3) \cup (1; +\infty)$.

c) Используя метод общего множителя, получим

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2} \;\Leftrightarrow\; 2^x \cdot 4 - 2^x \cdot 8 - 2^x \cdot 16 > 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 25 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2^x(4 - 8 - 16) > 5^x(5 - 25) \;\Leftrightarrow\; 2^x \cdot (-20) > 5^x \cdot (-20) \;\Leftrightarrow\; 2^x < 5^x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{2^x}{5^x} < 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

d) Разделив обе части неравенства на 2^{2x} $(2^{2x} > 0)$, получим

$$4^{x^2-2x} - 10 \cdot 2^{x^2-2x} + 16 \geq 0.$$

Обозначив $t = 2^{x^2-2x}$ и решив квадратное неравенство

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0,$$

получим $t \leq 2$ или $t \geq 8$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x^2-2x} \leq 2, \\ 2^{x^2-2x} \geq 8, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x \leq 1, \\ x^2 - 2x \geq 3. \end{array}\right.$$

Множество решений первого неравенства совокупности есть $x \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$, а второго неравенства $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Таким образом, решение исходного неравенства есть $x \in (-\infty; -1] \cup [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}] \cup [3; +\infty)$.

e) Обозначим $t = 3^x$ и используем метод интервалов, учитывая что $t+5>0$:

$$\frac{1}{t+5} \le \frac{1}{3t-1} \ \Leftrightarrow\ \frac{3t-1-t-5}{3t-1} \le 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{2(t-3)}{3t-1} \le 0 \ \Leftrightarrow\ t \in (\frac{1}{3}; 3].$$

Таким образом, $\dfrac{1}{3} < 3^x \le 3 \ \Leftrightarrow\ 3^{-1} < 3^x \le 3^1 \ \Leftrightarrow\ x \in (-1; 1]$.

f) $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \ge 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 \ \Leftrightarrow\ (3x-9) + (12 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 4x \cdot 3^{\sqrt{x}}) \ge 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ 3(x-3) - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}(x-3) \ge 0 \ \Leftrightarrow (x-3)(3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}) \ge 0.$

Так как $3^{\sqrt{x}} \ge 1$, то $3 - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} \le -1$, следовательно, $x - 3 \le 0$, откуда $x \le 3$. Учитывая *ОДЗ* исходного неравенства ($x \ge 0$), получим ответ $x \in [0; 3]$.

В дальнейшем рассмотрим несколько примеров показательнных неравенств, которые решаются специальными способами (учитывая область определения и область значений, монотонность, непрерывность и т.п.).

Пример 3. Решить неравенства:

a) $\sqrt{4 - 2^{x-2}} < \log_2(x-5)$

b) $3^x + 4^x \ge 25$

c) $\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\dfrac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x-2}$

d) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$

e) $3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[4]{x-1}} \ge 2 \cdot 3^{\sqrt[6]{x-1}}$

Решение. a) *ОДЗ* неравенства определяется из системы

$$\begin{cases} x-5>0, \\ 4-2^{x-2} \ge 0. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} x>5, \\ x \le 4, \end{cases}$$

и, так как *ОДЗ* неравенство пусто, то исходное неравенство не имеет решений.

b) Левая часть неравенства есть возрастающая функция (сумма двух возрастающих функций). Поскольку для $x < 2$, $f(x) < f(2) = 25$, а для $x \ge 2$, $f(x) \ge f(2) = 25$, множество решений данного неравенства есть $[2; +\infty)$.

c) Выражение $a^b - a^c$ при $a > 1$ имеет тот же знак что и выражение $(b-c)$ и противоположный знак, если $0 < a < 1$, следовательно, для $a \in (0;1) \cup (1; +\infty)$ выражения $a^b - a^c$ и $(a-1)(b-c)$ одинакового знака.

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x-2} - \left(\frac{x^4+1}{2x^2}\right)^{x-3x^2} < 0,$$

откуда

$$\left(\frac{x^4+1}{2x^2}-1\right)(2x-2-x+3x^2)<0$$

или

$$\begin{cases} (x^4-2x^2+1)(3x^2+x-2)<0, \\ x\neq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x^2-1)^2(x+1)(3x-2)<0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Решив методом интервалов, получим

$$x\in(-1;0)\cup(0;\frac{2}{3}).$$

d) Заметим, что $\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$, и получим неравенство

$$(x-1)(1+\frac{1}{x+1})\geq 0$$

или

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1}\geq 0,$$

откуда $x\in[-2;-1)\cup[1;+\infty)$.

e) Используя неравенство

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}$$

верное для любых $a\geq 0,\ b\geq 0$, получим

$$\frac{3^{\sqrt[12]{x-1}}+3^{\sqrt[4]{x-1}}}{2}\geq\sqrt{3^{\sqrt[12]{x-1}}\cdot 3^{\sqrt[4]{x-1}}}=3^{\frac{\sqrt[12]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{2}}\geq 3^{\sqrt{\sqrt[12]{x-1}\cdot\sqrt[4]{x-1}}}=3^{\sqrt[6]{x-1}}.$$

Таким образом, неравенство справедливо для любого x из *ОДЗ*, то есть $x\in[1;+\infty)$.

Упражнения.

Решить неравенства:

1. $8^{5-\frac{x}{3}}>4$.

2. $\dfrac{(\sqrt{5})^{x-10}}{4^{x-10}}>\dfrac{5\sqrt{5}}{64}$.

3. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x}>\left(\dfrac{1}{9}\right)^{16-x}$.

4. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\geq 1$.

5. $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \le 5^{x+3} - 3^{x+3}$.

6. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

7. $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0$.

8. $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \le 3^{x^2+2}$.

9. $4^{\sqrt{9-x^2}} + 2 < 9 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}$.

10. $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0$.

11. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$.

12. $\dfrac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \ge 1$.

13. $\dfrac{5}{2^{x+2} - 1} > \dfrac{1}{2^x - 1}$.

14. $\sqrt{7 + 2^{1-x}} \ge 7 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$.

15. $3x + 12 \cdot 3^{\sqrt{x}} \ge 4x \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9$.

16. $(x^2 - x + 1)^{x^2 - 2,5x + 1} < 1$.

17. $\sqrt{13^x - 5} \le \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$.

18. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \ge 1$.

19. $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \ge 9^{\sqrt{x}}$.

20. $|2^{4x^2 - 1} - 5| \le 3$.