Показательные уравнения

Уравнение, которое содержит неизвестное в показателе степени, называется **показательным уравнением**.

Самое простое показательное уравнение имеет вид

$$a^x = b, \tag{1}$$

где $a > 0,\ a \neq 1$.

Утверждение 1. Уравнение (1) имеет единственное решение $x = \log_a b$ при $b > 0$ и не имеет решений при $b \leq 0$.

Пример 1. Решить уравнения:

$$a)\ 2^x = -4, \qquad b)\ 2^x = 4, \qquad c)\ 2^x = 5.$$

Решение. a) Множество решений данного уравнения пусто, так как левая часть уравнения положительна при любом $x \in \mathbf{R}$ (см. свойства показательной функции), а правая часть есть отрицательное число.

b) Используя утверждение 1 получим $x = \log_2 4$, то есть $x = 2$.

c) Аналогично предыдущему примеру получим $x = \log_2 5$.

Замечание. Из утверждения 1 следует что показательное уравнение вида

$$a^{f(x)} = b, \tag{2}$$

где $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$ равносильно уравнению

$$f(x) = \log_a b$$

Пример 2. Решить уравнения

$$a)\ 2^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b)\ 3^{|x^2-x|} = 9, \qquad c)\ (\sqrt{5})^{2+4+6+\ldots+2x} = 5^{45},\ x \in \mathbf{N}.$$

Решение. a) Согласно замечанию к утверждению 1

$$\sin x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_2 2 = -\frac{1}{2}$, следовательно $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

b) Поскольку $\log_3 9 = 2$, данное уравнение равносильно следующему уравнению

$$|x^2 - x| = 2.$$

Используя свойства модуля (см., например, [1]) получим

$$|x^2 - x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2, \\ x^2 - x = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x + 2 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

с) Логарифмируя по основанию 5 (обе части уравнения положительны), получим

$$\frac{1}{2}(2+4+6+\ldots+2x)=45 \quad \text{или} \quad 1+2+\ldots+x=45.$$

Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии получим уравнение

$$\frac{1+x}{2}x=45,$$

или

$$x^2+x-90=0$$

корни которого $x_1=-10$ и $x_2=9$. Поскольку $x\in\mathbf{N}$, остается $x=9$.

При решении показательных уравнений используется следующее утверждение о равносильности уравнений (см., например, [2]).

Утверждение 2. При $a>0$, $a\neq 1$, уравнения

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \tag{3}$$

и

$$f(x)=g(x)$$

равносильны.

Замечание. Уравнение вида

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

можно переписать следующим образом

$$a^{f(x)}=a^{g(x)\log_a b}$$

и решить, используя утверждение 2.

Некоторые показательные уравнения сводятся к уравнениям вида (1)-(3) с помощью равенств

$$E1)\ a^x\cdot a^y=a^{x+y},\ E2)\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\ E3)\ (a^x)^y=a^{x\cdot y},\ E4)\ \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x,\ E5)\ a^x\cdot b^x=(ab)^x.$$

Пример 3. Решить уравнения

$$a)\ \frac{3^{2x+1}\cdot 9^{x+2}}{27^x}=243,\quad b)\ \frac{3^x}{2^x}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{2}\right)^9,\quad c)\ 4^{3x+1}\cdot 625^{\frac{x}{2}}=6400,\quad d)\ 3^{2x-1}=7^{x+1}.$$

Решение. а) Используя равенства $E1-E3$, и утверждение 2 получим

$$\frac{3^{2x+1}\cdot 9^{x+2}}{27^x}=243 \Leftrightarrow \frac{3^{2x+1}\cdot 3^{2(x+2)}}{3^{3x}}=3^5 \Leftrightarrow \frac{3^{2x+1+2(x+2)}}{3^{3x}}=3^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x+1+2(x+2)-3x}=3^5 \Leftrightarrow 2x+1+2x+4-3x=5 \Leftrightarrow x=0.$$

b) Так как $\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ $(ab \neq 0)$, то $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(x^2-12)}$. Используя свойства $E4$, $E3$ и $E1$, получим

$$\frac{3^x}{2^x} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{3}{2}\right)^9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(x^2-12)} = \left(\frac{3}{2}\right)^9 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2(x^2-12)} = \left(\frac{3}{2}\right)^9,$$

откуда, согласно утверждению 2, получим квадратное уравнение

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

корни которого $x = 3$ и $x = -\frac{5}{2}$.

c) Так как $4^{3x+1} = 4^1 \cdot 4^{3x} = 4 \cdot (4^3)^x = 4 \cdot 64^x$, $625^{\frac{x}{2}} = (625^{\frac{1}{2}})^x = 25^x$, то уравнение примет вид

$$4 \cdot 64^x \cdot 25^x = 6400$$

или

$$64^x \cdot 25^x = 1600.$$

Используя свойство $E5$ и утверждение 2 получим $1600^x = 1600$, откуда $x = 1$.

d) Используя замечание к утверждению 2, получим

$$3^{2x-1} = 3^{\log_3 7^{(x+1)}},$$

откуда

$$2x - 1 = x \log_3 7 + \log_3 7$$

или

$$x(2 - \log_3 7) = \log_3 7 + 1.$$

Решая данное линейное уравнение получим $x = \frac{1 + \log_3 7}{2 - \log_3 7}$.

Показательные уравнения вида

$$F(a^{f(x)}) = 0, \tag{4}$$

посредством подстановки $t = a^{f(x)}$ сводятся к уравнениям вида

$$F(t) = 0,$$

которые, как правило, решаются проще. Наиболее часто встречаются уравнения вида

$$\begin{aligned} A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0, \\ A \cdot a^{f(x)} + C \cdot a^{-f(x)} + B = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$(A,\ B$ и $C \in \mathbf{R})$, которые с помощью подстановки $t = a^{f(x)}$ сводятся к уравнению

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Пример 4. Решить уравнения

$$a)\ 2^x + 3\cdot 2^{x-4} = 76, \qquad b)\ 3^{-x} + 9\cdot 3^x + 9^{x+1} + 9^{-x-1} = 8, \qquad c)\ 4^{x^2} - 2^{x^2} - 2 = 0,$$

$$d)\ 2^{1+x} - 2^{3-x} = 15, \qquad e)\ 4^{\sqrt{x^2-2x}+1} + 2 = 9\cdot 2^{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Решение. a) $2^x+3\cdot 2^{x-4} = 76 \Leftrightarrow 2^x + 3\cdot\dfrac{2^x}{2^4} = 76$. Обозначая $t=2^x$ получим линейное уравнение

$$16t + 3t = 76\cdot 16,$$

откуда $t = 64$. Таким образом $2^x = 64$ и $x = 6$.

b) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{3^x} + 9\cdot 3^x + 9\cdot 9^x + \frac{1}{9\cdot 9^x} = 8.$$

Обозначая $t = 3^x$ (тогда $9^x = t^2$) получим алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{t} + 9t + 9t^2 + \frac{1}{9t^2} = 8,$$

которое (см., например, [1]) подстановкой

$$z = \frac{1}{t} + 9t$$

$\left(9t^2 + \dfrac{1}{9t^2} = \dfrac{1}{9}\cdot\left(81t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{1}{9}\left[\left(\dfrac{1}{t}+9t\right)^2 - 18\right] = \dfrac{1}{9}z^2 - 2\right)$ сводится к квадратному уравнению

$$z + \frac{1}{9}z^2 - 2 = 8$$

или

$$z^2 + 9z - 90 = 0,$$

откуда $z_1 = -15,\ z_2 = 6$. Поскольку $t > 0,\ z_1 = -15$ не удовлетворяет условию и остается

$$\frac{1}{t} + 9t = 6,$$

откуда

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

следовательно $t = \dfrac{1}{3}$. Таким образом $3^x = \dfrac{1}{3}$, откуда $x = -1$.

c) Обозначим $t = 2^{x^2}$, тогда $4^{x^2} = (2^2)^{x^2} = \left(2^{x^2}\right)^2 = t^2$. В результате получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

корни которого $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Поскольку $t > 0$ (вообще говоря, из условия $x^2 \geq 0$ следует, что $t = 2^{x^2} \geq 1$), остается лишь $t = 2$. Возвращаясь к переменной x получим уравнение

$$2^{x^2} = 2$$

откуда $x^2 = 1$ и следовательно $x = \pm 1$.

d) Так как $2^{1+x} = 2 \cdot 2^x,\ 2^{3-x} = \dfrac{2^3}{2^x}$, то после подстановки $t = 2^x$, уравнение примет вид

$$2t - \frac{8}{t} = 15.$$

Умножив обе части уравнения на t $(t > 0)$, получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 15t - 8 = 0,$$

корни которого $t_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $t_2 = 8$. Поскольку $t_1 < 0$, остается

$$2^x = 8,$$

откуда $x = 3$.

e) Обозначив $t = 2^{\sqrt{x^2-2x}}$ (при $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, $x^2 - 2x \geq 0$ и следовательно $t \geq 1$), получим уравнение

$$4t^2 - 9t + 2 = 0,$$

корни которого $t_1 = \dfrac{1}{4}$ и $t_2 = 2$. Поскольку $t_1 < 1$, остается решить уравнение

$$2^{\sqrt{x^2-2x}} = 2,$$

равносильное уравнению

$$\sqrt{x^2 - 2x} = 1.$$

Возводя в квадрат (обе части уравнения неотрицательны при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$) получим равносильное уравнение

$$x^2 - 2x = 1,$$

корни которого $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Уравнение вида

$$A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0,$$

$(A,\ B,\ C \in \mathbf{R},\ A \cdot B \cdot C \neq 0)$ называется однородным показательным уравнением. Разделив обе части этого уравнения например на $\dfrac{1}{b^{2f(x)}}$, получим квадратное уравнение

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

где $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}$.

Пример 5. Решить уравнения

$$a)\ 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0, \qquad b)\ 9 \cdot 2^{2x+2} - 45 \cdot 6^x - 3^{2x+4} = 0.$$

Решение. a) Записав уравнение в виде

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$$

и разделив на 4^{2x}, получим

$$64 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x - 84 \cdot \frac{3^x \cdot 4^x}{(4^x)^2} + 27 = 0$$

или

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0.$$

Обозначив $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ получим квадратное уравнение

$$64t^2 - 84t + 27 = 0.$$

Дискриминант данного уравнения равен $\Delta = 84^2 - 4 \cdot 64 \cdot 27 = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3^2(49 - 48) = 12^2$, а значит его корни имеют вид

$$t_1 = \frac{9}{16} \;\text{ и }\; t_2 = \frac{3}{4}.$$

Таким образом

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

b) Перепишем уравнение в виде

$$36 \cdot 2^{2x} - 45 \cdot 2^x \cdot 3^x - 81 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделив его на $9 \cdot 3^{2x}$, получим

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 9 = 0.$$

Обозначая $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ получим квадратное уравнение

$$4t^2 - 5t - 9 = 0,$$

решения которого $t = -1$, $t = \frac{9}{4}$. Так как $t > 0$, остается $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$, откуда $x = -2$.

При решении некоторых показательных уравнений полезно выделить общий множитель.

Пример 6. Решить уравнения

$$\begin{array}{l} a)\; 2^{x+1} - 2^x + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 9, \\ b)\; 2^{x+1} - 2^{x+2} - 2^{x+3} = 5^x - 5^{x+1}, \\ c)\; x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}. \end{array}$$

Решение. a) Перепишем уравнение в виде

$$2^x \cdot 2 - 2^x + \frac{2^x}{4} - \frac{2^x}{8} = 9$$

или

$$2^x\left(2-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=9$$

откуда

$$2^x\cdot\frac{9}{8}=9,$$

следовательно $2^x=8$ или $x=3$.

b) Аналогично примеру 6a, получим

$$2^{x+1}-2^{x+2}-2^{x+3}=5^x-5^{x+1}\ \Leftrightarrow\ 2^x\cdot 2-2^x\cdot 4-2^x\cdot 8=5^x-5^x\cdot 5\ \Leftrightarrow$$

$$2^x(2-4-8)=5^x(1-5)\ \Leftrightarrow\ 2^x(-10)=5^x(-4)\ \Leftrightarrow\ \frac{2^x}{5^x}\cdot(-10)=-4\ \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{4}{10}\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^1\ \Leftrightarrow\ x=1.$$

c) Запишем уравнение в виде

$$(x^2\cdot 2^{x+1}-2^{x-1})+(2^{|x-3|+2}-x^2\cdot 2^{|x-3|+4})=0$$

или

$$2^{x-1}(4x^2-1)+2^{|x-3|+2}(1-4x^2)=0,$$

откуда следует

$$(4x^2-1)\cdot(2^{x-1}-2^{|x-3|+2})=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}4x^2-1=0,\\ 2^{x-1}=2^{|x-3|+2}.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения совокупности находим $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{1}{2}$. Второе решаем используя свойства модуля

$$2^{x-1}=2^{|x-3|+2}\ \Leftrightarrow\ x-1=|x-3|+2\ \Leftrightarrow\ x-3=|x-3|\ \Leftrightarrow\ x-3\geq 0\ \Leftrightarrow\ x\geq 3.$$

Таким образом множество решений исходного уравнения имеет вид

$$x\in\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}\cup[3,+\infty).$$

Некоторые показательные уравнения решаются особыми методами.

Пример 7. Решить уравнения

$$
\begin{aligned}
&a)\ (4+\sqrt{15})^2+(4-\sqrt{15})^x=62,\\
&b)\ 5^{x-2}=8-x,\\
&c)\ 3^x+4^x=5^x,\\
&d)\ 4^x+(x-1)\cdot 2^x=6-2x,\\
&e)\ x^2+x+2=2\cdot 2^x-4^x,\\
&f)\ \sqrt[4]{2}^{\,3+2x-x^2}=\frac{x^2+1}{x},\\
&g)\ (2x+1)\cdot 3^{x^2+x+3}=27,\\
&h)\ 5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500,\\
&i)\ 5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500.
\end{aligned}
$$

Решение. а) Заметим, что $(4+\sqrt{15})^x\cdot(4-\sqrt{15})^x=1^x=1$. Используя подстановку $t=(4+\sqrt{15})^x$ (тогда $(4-\sqrt{15})^x=\dfrac{1}{t}$) получим квадратное уравнение

$$t+\frac{1}{t}=62$$

или

$$t^2-62t+1=0,$$

корни которого $t_1=31-8\sqrt{15}$ и $t_2=31+8\sqrt{15}$. Поскольку $31\pm 8\sqrt{15}=(4\pm\sqrt{15})^2$, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}(4+\sqrt{15})^x=(4+\sqrt{15})^2,\\ (4+\sqrt{15})^x=(4-\sqrt{15})^2,\end{array}\right.$$

откуда (учитывая, что $(4-\sqrt{15})^2=(4+\sqrt{15})^{-2}$) $x_1=2$ и $x_2=-2$.

b) Заметим, что $x=3$ является решением данного уравнения. Других корней уравнение не имеет. Действительно, левая часть уравнения представляет строго возрастающую функцию, а правая - строго убывающую функцию. Графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Следовательно $x=3$ - единственное решение уравнения.

c) Заметим, что $x=2$ - корень данного уравнения. Докажем, что других решений уравнение не имеет. Перепишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$$

и заметим, что функция $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$, как сумма двух строго убывающих функций, есть строго убывающая функция и, следовательно, каждое свое значение принимает лишь один раз.

d) Обозначим $t=2^x$ и решим квадратное уравнение относительно t

$$t^2+(x-1)t+2x-6=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $\Delta = (x-1)^2 - 4(2x-6) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$, и значит его корни имеют вид

$$t_1 = \frac{1-x-x+5}{2} = 3-x, \quad t_2 = \frac{1-x+x-5}{2} = -2.$$

Поскольку $t = -2$ не удовлетворяет условию $t > 0$, остается

$$2^x = 3 - x$$

Решая последнее уравнение аналогично примеру b) получим $x = 1$.

e) Перепишем уравнение в виде

$$x^2 + x + 1 = 2 \cdot 2^x - 4^x - 1$$

или

$$x^2 + x + 1 = -(2^x - 1)^2,$$

откуда следует, что уравнение не имеет решений. Действительно, поскольку $\left(x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$ левая часть уравнения принимает значения не меньше $\frac{3}{4}$, а правая часть - лишь неположительные значения.

f) Заметим, что уравнение имеет решение лишь при $x > 0$. Тогда правая часть уравнения

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

более того, равенство достигается лишь при $x = 1$. В то же время левая часть уравнения принимает максимальное значение 2 при $x = 1$. Действительно,

$$(\sqrt[4]{2})^{3+2x-x^2} = (\sqrt[4]{2})^{4-1+2x-x^2} = (\sqrt[4]{2})^{4-(1-x)^2} \leq \sqrt[4]{2}^4 = 2.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

g) Заметим, что при $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ уравнение не имеет решений (в этом случае левая часть уравнения отрицательна). При $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ левая часть уравнения (как произведение двух строго возрастающих функций) есть строго возрастающая функция и, следовательно, каждое свое значение принимает лишь один раз. Остается заметить что $x = 0$ является (единственным) корьнем данного уравнения.

h) Множество допустимых значений данного уравнения имеет вид: $\{x \in \mathbf{N} \mid x > 1\}$.

Запишем уравнение в виде

$$5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500.$$

Логарифмируя обе его части, например, по основанию 5, получим

$$x + \log_5 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 3 + \log_5 2^2$$

или

$$x + \frac{3(x-1)}{x} \log_5 2 - 3 - 2\log_5 2 = 0,$$

откуда следует квадратное уравнение

$$x^2 + x(\log_5 2 - 3) - 3\log_5 2 = 0,$$

корни которого $x_1 = 3$ и $x_2 = -\log_5 2$. Поскольку x_2 не входит в *ОДЗ*, то, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 3$.

i) *ОДЗ* уравнения есть множество $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, и (см. предыдущий пример) его корни $x = 3$ и $x = -\log_5 2$.

Уравнения вида

$$[h(x)]^{f(x)} = b \qquad \left([h(x)]^{f(x)} = [h(x)]^{g(x)}\right). \tag{6}$$

называются обобщенными показательными уравнениями.

Как правило, областью определения функции $[h(x)]^{f(x)}$ считается множество всех значений $x \in D(f)$ для которых $h(x) > 0$, где $D(f)$ обозначает область определения функции f. Таким образом

$$[h(x)]^{f(x)} = [h(x)]^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 8. Решить уравнения

$$a)\ |x-2|^{x^2+x+1} = (x-2)^2, \quad b)\ (x^2+x)^{x^2+2x} = 1, \quad c)\ |x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3.$$

Решение. а) Поскольку $a^2 = |a|^2$, уравнение можно переписать в виде

$$|x-2|^{x^2+x+1} = |x-2|^2.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |x-2| > 0, \\ |x-2| \neq 1, \\ x^2 + x + 1 = 2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |x-2| = 1, \\ x \in ОДЗ. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отсюда $x = -2,\ x = 3$ и $x = 1$.

b) Учитывая соотношение $(x^2+x)^0 = 1$ получим

$$(x^2+x)^{x^2+2x} = 1 \ \Leftrightarrow\ (x^2+x)^{x^2+2x} = (x^2+x)^0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \neq 1, \\ x^2 + 2x = 0, \end{array}\right. \\ x^2 + x = 1 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

c) *ОДЗ* уравнения представляет множество $(0;+\infty)$. На *ОДЗ* уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} |x-1|>0, \\ |x-1|\neq 1, \\ \lg^2 x-\lg x^2=3. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} |x-1|=1, \\ x>0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отсюда $x=\dfrac{1}{10},\ x=1000$ и $x=2$.

Замечание. Иногда функции из (6) рассматриваются на более широких областях: принимается во внимание, что функция $h(x)^{f(x)}$ имеет смысл и при $h(x)=0,\ f(x)>0$ или при $h(x)<0$, когда $f(x)$ принимает значения во множестве целых чисел и т.п. (см., например, [2]-[4]).

Упражнения

Решить уравнения.

1. $8^{\frac{2(x-1)}{x}}=\sqrt{4^{x-1}}$.

2. $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0,25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

3. $0,125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

4. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=448$.

5. $3^{2x+1}+3^{2x}-3^{2x-2}=315$.

6. $2^{2x+3}\cdot 3^x+2\cdot 4^x\cdot 3^{x+2}=\dfrac{13}{72}$.

7. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$.

8. $5^{2x}-7^x-7\cdot 5^{2x+1}+5\cdot 7^{x+1}=0$.

9. $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.

10. $4^x-12\cdot 2^x=64$.

11. $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

12. $2^{2+x}-2^{2-x}=15$.

13. $3^{x\log_2 7}\cdot 7^{x^2+x}=1$.

14. $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$.

15. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

16. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x.$

17. $(x-3)^{3x^2-10x+3} = 1.$

18. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$

19. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

20. $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x.$

21. $2 \cdot 16^{\cos x} - 20^{\cos x} = 3 \cdot 25^{\cos x}.$

22. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}.$

23. $2^{|3x-5|} = 4 \cdot 8^{|x-1|}.$

24. $5^{3x} + 5^{3(1-x)} + 15(5^x + 5^{1-x}) = 216.$

25. $4^x + 3^x = 7^x.$

26. $4^x + 3^x = 91^{\frac{x}{3}}.$

27. $5^x \cdot 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50.$

28. $(x+1) \cdot 9^{x-3} + 4x \cdot 3^{x-3} - 16 = 0.$

29. $7^{6-x} = x + 2.$

30. $x^2 - x + 1 = 2 \cdot 2^{x-1} - 4^{x-1}.$

Библиография.

1. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.

2. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

3. Ф.П.Яремчук, П.Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Киів, Наукова Думка, 1987.

4. В.А. Вишеньский и др. Збірник задач з математики. Киів, "Либіді", 1993.