Неравенства

В этом разделе будут представлены различные методы доказательства неравенств. Используя предложенные методы, будут доказаны как классические неравенства, так и неравенства, предложенные на различных математических конкурсах.

I. Монотонность функций

Предполагается, что читатель знаком с понятием монотонности функций и свойствами (критериями) монотонных функций.

Задача 1. Сравнить числа e^π и π^e.
Решение. Рассматривается функция

$$f:[e;+\infty)\longrightarrow \mathbf{R};\quad f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

Так как производная функции f,

$$f'(x)=\frac{x(\ln x)'-(x)'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

принимает отрицательные значения для всех $x\in(e;+\infty)$ и f непрерывна на $[e;+\infty)$, следовательно, f строго убывает на $[e;+\infty)$. Отсюда, учитывая что $e<\pi$, получаем

$$f(e)>f(\pi)\ \Rightarrow\ \frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\ \Rightarrow\ \pi\ln e>e\ln\pi$$

и, значит, $e^\pi>\pi^e$.

Задача 2. Исследовать на ограниченность числовую последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\quad(n\geq 1).$$

Решение. Вначале докажем неравенство

$$\ln(1+x)\leq x\quad(x\geq 0).\tag{1}$$

Для этого рассмотрим функцию

$$f:[0;+\infty)\longrightarrow \mathbf{R};\quad f(x)=x-\ln(1+x).$$

Функция f непрерывна на области определения, и для любого $x\in(0;+\infty)$ имеет место равенство

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x},$$

откуда следует, что $f'(x)>0\quad(x\in(0;+\infty))$. Следовательно, функция f строго возрастает на области определения $D(f)$, и, значит, $f(x)\geq f(0)\quad(\forall x\geq 0)$, что означает справедливость неравенства (1).

В неравенстве (1), рассмотрев $x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$, получим

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Из неравенства (2) следует

$$\begin{aligned} &\ln 2 - \ln 1 \leq 1, \\ &\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}, \\ &\ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}, \\ &\ldots\ldots \\ &\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{3}$$

Сложив почленно неравенства (3), получим неравенство

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, из последнего неравенства следует, что числовая последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ неограничена.

Следствие: Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Задача 3. (Неравенство Бернулли) Для любых $x > -1;\ \alpha > 1$ имеет место неравенство

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{4}$$

Причем равенство имеет место только при $x = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x, \quad (x \in [-1; +\infty)),$$

где α - фиксированное число, большее 1. Вычислим производную этой функции

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1) \quad (x > -1).$$

Из условия $\alpha > 1$, следует, что $f'(x) < 0$ для $x \in (-1; 0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (0; +\infty)$. Значит, функция f убывает на $[-1; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

Отсюда заключаем, что для всех $x \in [-1; +\infty) \setminus \{0\}$ имеет место неравенство $f(x) > f(0)$, то есть,

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x > 1 - 1,$$

или
$$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x \qquad (x \in [-1;0) \cup (0;+\infty),\ \alpha > 1).$$
Остается заметить, что при $x = 0$ выполняется $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$.

Замечание. Аналогично доказываются неравенства
$$(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x \qquad (x \ge -1;\ 0 < \alpha < 1),$$
$$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x \qquad (x \ge -1;\ \alpha < 0).$$

Задача 4. (Неравенство Юнга) Если $p,\ q \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ удовлетворяют свойству $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, то для любых положительных чисел $a,\ b$ выполняются неравенства
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{ для } \ p > 1) \tag{5}$$
и
$$ab \ge \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (\text{ для } \ p < 1) \tag{6}$$
Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$.

Решение. Рассмотрим случай $p > 1$. Зафиксировав произвольное положительное число a, определим функцию
$$f : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab.$$
Производная этой функции равна
$$f'(b) = b^{q-1} - a.$$
Элементарными вычислениями устанавливается, что точка $b = a^{\frac{1}{q-1}}$ является точкой глобального минимума, т. е.
$$f(b) \ge f(a^{\frac{1}{q-1}}) \qquad (b > 0). \tag{7}$$
Из неравенства (7), учитывая, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, получается
$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \ge 0 \qquad (a > 0,\ b > 0;\ p > 1;\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$
Таким образом, неравенство (5) доказано. Более того, из (7) следует, что равенство имеет место только в случае $b = a^{\frac{1}{q-1}}$, т. е. $a^p = b^q$.

Неравенство (6) доказывается аналогично.

Задача 5. Доказать неравенство
$$|\sin x| \le |x| \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{8}$$

Решение. В силу четности обоих частей, достаточно рассмотреть ситуацию $x \geq 0$. Более того, т. к. $|\sin x| \leq 1$, то достаточно изучить случай $0 \leq x \leq 1$.

С этой целью рассмотрим функцию

$$f : [0;1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = x - \sin x.$$

Производная функции f имеет вид

$$f'(x) = 1 - \cos x \qquad (x \in [0;1]).$$

На основании ограниченности косинуса ($|\cos x| \leq 1$; $x \in \mathbf{R}$), заключаем что $f'(x) \geq 0$, откуда следует, что функция f является монотонно возрастающей на своей области определения, и поэтому имеет место неравенство

$$f(x) \geq f(0) \quad (x \in [0;1]),$$

или

$$x - \sin x \geq 0, \quad (x \in [0;1]),$$

откуда следует исходное неравенство.

Задача 6. Доказать, что если $a > b > c$, то

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ вида

$$f(t) = (b+t)^2(b-c) + b^2(c-(b+t)) + c^2((b+t)-b),$$

где a, b, c являются вещественными параметрами, удовлетворяющими неравенсту $a > b > c$. Аналогично предыдущим задачам доказывается, что функция f является строго возрастающей на $[0;+\infty)$, и, следовательно, имеет место неравенство $f(a-b) > f(0)$. Последнее неравенство равносильно исходному неравенству.

II. Выпуклость

Определение: Функция $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ ($\mathbf{I}$ - интервал вещественной оси) называется выпуклой на $\mathbf{I}$, если для всех $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ и любых чисел λ_1, λ_2 таких что $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{9}$$

В случае, когда для всех $x_1 \neq x_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ знак в неравенстве (9) является строгим, функция f называется строго выпуклой на $\mathbf{I}$.

Определение (строго) вогнутой функции получается из приведенного выше заменой знака неравенства (9) на противоположный.

Неравенство Иенсена. Пусть $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ - выпуклая функция. Тогда для любых $x_j \in \mathbf{I}$ ($j = 1, \ldots, n$) и произвольных $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, \ldots, n$) таких, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ имеет место неравенство $f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j)$.

Критерий выпуклости

Для того, чтобы непрерывная на интервале $\mathbf{I}$ и имеющая вторую производную на внутренности $int(\mathbf{I}) = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon \subset \mathbf{I})\}$ интервала $\mathbf{I}$ функция $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{R}$ была выпуклой на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы на $int(\mathbf{I})$ выполнялось неравенство $f''(x) \ge 0$. Если же $f''(x) > 0$ на $int(\mathbf{I})$, то этого достаточно, чтобы гарантировать строгую выпуклость функции f на $\mathbf{I}$.

Замечание. Утверждения, подобные неравенству Иенсена и приведенному выше критерию, справедливы и для вогнутых функций.

Задача 7. (Неравенство Коши о средних). Для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{10}$$

т. е. среднее геометрическое не превосходит среднее арифметическое.

Решение. Если одно из чисел a_j равно 0, то неравенство (10) очевидно, поэтому будем считать что все числа a_j положительны.

Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$. Так как $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, следовательно, f вогнута на $(0; +\infty)$. На основании неравенства Иенсена, заключаем

$$\ln\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}a_j\right) \ge \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j,$$

что влечет неравенство (10).

Задача 8. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - неотрицательные числа. Доказать, что функция

$$f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}; \quad f(\alpha) = \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

монотонно возрастает.

Решение. Пусть $0 < \alpha < \beta$. Рассмотрим функцию $h(x) = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ $(x \ge 0)$. Так как $h''(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1\right)x^{\frac{\beta}{\alpha}-2} > 0$ $(x > 0)$, следовательно, функция h выпукла на $[0; +\infty)$. Согласно неравенству Иенсена

$$h\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^\alpha\right) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}h(x_j^\alpha),$$

или

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}x_j^\beta,$$

откуда следует
$$f(\alpha) \le f(\beta).$$

Задача 9. Доказать справедливость неравенства
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2},$$
где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - внутренние углы некоторого треугольника.

Решение. Рассмотрим функцию $f : [0;\pi] \longrightarrow \mathbf{R};\ f(x) = \sin x$. Так как $f''(x) = -\sin x$ и $f''(x) < 0$ для $x \in (0;\pi)$, следовательно, функция f вогнута на $[0;\pi]$. Согласно неравенству Иенсена,
$$f\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3}\right) \ge \frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma),$$
или
$$\sin\frac{\pi}{3} \ge \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$
откуда получаем
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 10. Доказать, что для произвольных положительных чисел $a_j, b_j\ (j = 1, \ldots, n)$ справедливо неравенство
$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \ge \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1} \ldots \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbf{R},\quad f(x) = \ln x$. Эта функция вогнута на $(0;+\infty)$ (см. Задачу 7). Следовательно, согласно неравенству Иенсена,
$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_1 + \ldots + b_n} \cdot \frac{a_j}{b_j}\right) \le \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_1 + \ldots + b_n} f\left(\frac{a_j}{b_j}\right),$$
или
$$(b_1 + \ldots + b_n)\ln\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j \ln\frac{a_j}{b_j},$$
и, значит,
$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}\right)^{b_1 + \ldots + b_n} \ge \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{b_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{b_n}.$$

Задача 11. (Неравенство Гюйгенса). Доказать, что для произвольных неотрицательных чисел $a_j (j = 1, \ldots, n)$ справедливо неравенство
$$(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) \ge (1 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^n.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$. Так как $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, следовательно, f выпукла на $\mathbf{R}$. Согласно неравенству Иенсена, получим

$$f\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j\right) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}f(\ln a_j) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(1+e^{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_j}\right) \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(1+a_j) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; n\ln\left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right) \le \ln((1+a_1)\ldots(1+a_n)) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (1+a_1)\ldots(1+a_n) \ge \left(1+\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\right)^n.$$

III. Упорядоченность

Теорема 1. Пусть даны два набора из n чисел такие, что

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n,$$

$$b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n.$$

Рассмотрим всевозможные суммы

$$\sigma = a_1 b_{i_1} + \ldots + a_n b_{i_n},$$

где $(i_1, \ldots, i_n)$ - некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$S = \max\sigma = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n,$$

$$s = \min\sigma = a_1b_n + \ldots + a_nb_1.$$

Задача 12. Доказать, что для произвольных положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Решение. Поскольку неравенство симметрично, без ограничения общности, можно предположить, что $a \ge b \ge c$. Тогда

$$\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b},$$

следовательно,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

и

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Сложив почленно последние два неравенства, получим

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3.$$

Задача 13. Доказать, что для произвольных положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $a\cdot b\cdot c=1$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Подобно Задаче 12, предположим, что $a\geq b\geq c$. Тогда

$$\frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{ac+bc}\geq\frac{1}{ab+bc}\geq\frac{1}{ab+ac}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c(ac+bc)}\geq\frac{1}{b(ab+bc)}\geq\frac{1}{a(ab+ac)},$$

так как $ab\geq ac\geq bc$, на основании Теоремы 1, получаем

$$\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{ac}{c(ac+bc)}+\frac{bc}{b(ab+bc)}+\frac{ab}{a(ab+ac)},$$

или

$$\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{bc}{c(ac+bc)}+\frac{ab}{b(ab+bc)}+\frac{ac}{a(ab+ac)}.$$

Сложив почленно последние два неравенства, получим

$$2\left(\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\right)\geq\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}. \qquad (11)$$

Согласно неравенству Коши о средних (см. Задачу 7), получим

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=3. \qquad (12)$$

Учитывая условие $a\cdot b\cdot c=1$, заключаем, что из (11) и (12) следует неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{ab}{c(ac+bc)}+\frac{ac}{b(ab+bc)}+\frac{bc}{a(ab+ac)}\geq\frac{3}{2}.$$

Задача 14. Пусть a, b, c - положительные числа. Докажите, что

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2\geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

Решение. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $a \geq b \geq c$. Тогда $\ln a \geq \ln b \geq \ln c$. Следовательно, согласно Теореме 1,

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq b \ln a + c \ln b + a \ln c$$

и

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq c \ln a + a \ln b + b \ln c.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$2(a \ln a + b \ln b + c \ln c) \geq (b + c) \ln a + (c + a) \ln a + (c + a) \ln b + (a + b) \ln c,$$

или

$$\ln \left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq \ln \left(a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}\right),$$

откуда следует

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Задача 15. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Решение. Пусть $a \geq b \geq c$. Тогда

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

На основании Теоремы 1 заключаем

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b}.$$

Последнее неравенство равносильно исходному.

Задача 16. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ - последовательность различных натуральных чисел. Доказать, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Решение. Пусть $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_n}$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ - некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Так как

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)^2} < \ldots < \frac{1}{1^2},$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k_2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{i_k}}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

IV. Классические неравенства и их приложения

Задача 17. (Неравенство Гельдера) Доказать, что для любых положительных чисел p, q, удовлетворяющих условию $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ и произвольных чисел a_j, b_j $(j=1,\ldots,n)$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Решение. Предположим, что $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p \ne 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q \ne 0$ (в противном случае неравенство (13) очевидно). Применяя неравенство Юнга (см. Задачу 5), получим

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{b_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right| \le \sum_{j=1}^{n}\frac{|a_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|b_j|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{|a_j|^p}{p\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p}+\frac{|b_j|^q}{q\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

откуда следует неравенство (13).

Задача 18. Доказать, что последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

возрастающая.

Решение. Согласно неравенству Коши о средних (см. Задачу 7), имеют место неравенства

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\ -\ \text{раз}}\cdot 1}\le\frac{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\ -\ \text{раз}}+1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},$$

откуда следует

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

то есть $x_n \le x_{n+1}$.

Задача 19. Доказать, что

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\ge n, \tag{14}$$

для любых $x_k \in \mathbf{R}$; $x_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Решение. Неравенство (14) немедленно следует из неравенства Коши

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1}} = 1$$

Задача 20. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Решение. Согласно неравенству Коши-Буняковского (частный случай неравенства Гельдера при $p = q = 2$), получим

$$n^2 = \left(\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left((\sqrt{a_1})^2 + \ldots + (\sqrt{a_n})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right).$$

Задача 21. Доказать, что

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2},$$

где $a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Решение. Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2 + a_3}} \cdot \sqrt{a_1(a_2 + a_3)} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n}{a_1 + a_2}} \cdot \sqrt{a_n(a_1 + a_2)}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)(a_1(a_2 + a_3) + \ldots + a_n(a_1 + a_2)) \leq$$

$$\leq \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2)\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + a_n^2) + \frac{1}{2}(a_n^2 + a_1^2)\right) + \left(\frac{1}{2}(a_n^2 + a_1^2) + \frac{1}{2}(a_n^2 + a_2^2)\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}\right)(2a_1^2 + 2a_2^2 + \ldots + 2a_n^2).$$

Задача 22. Доказать, что для любых положительных чисел a_j, b_j $(j = 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)}.$$

Решение. На основании неравенства Гельдера получим

$$\left(1+\frac{a_1}{b_1}\right)\dots\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right) \geq \left(1+\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\dots\frac{a_n}{b_n}}\right)^n,$$

или

$$(a_1+b_1)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n) \geq \left(\sqrt[n]{a_1\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1\dots b_n}\right)^n,$$

откуда

$$\sqrt[n]{a_1\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1\dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать неравенство
$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x>0).$$

2. Сравнить числа
$$a)\ \frac{\ln 1998}{\ln 1999} \text{ и } \frac{\ln 1999}{\ln 2000},$$
$$b)\ \cos(\sin 2000) \text{ и } \sin(\cos 2000).$$

3. Доказать, что для $x>0$ имеет место неравенство
$$1+2\ln x \leq x^2.$$

4. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ - положительные числа. Доказать, что функция $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x_1^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha\neq 0\\ \sqrt[n]{x_1\dots x_n}, & \alpha=0\end{cases}$$
является монотонно возрастающей. Более того, функция f является строго возрастающей тогда и только тогда, когда не все числа x_j равны между собой.

5. Доказать неравенство
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$
где α, β, γ - внутренние углы некоторого треугольника.

6. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ - действительные числа со свойствами $a_k \in (0;\frac{1}{2})$ $(k=1,\dots,n)$ и $a_1+\ldots+a_n=1$. Доказать, что
$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right) \geq (n^2-1)^n.$$

7. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c выполняются неравенства
$$a+b+c \le \frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b} \le \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

8. (Неравенство Чебышева). Если $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n;\ b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$, то
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) \le n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n).$$

9. Если $1 < a \le b \le c$, то
$$\frac{a}{\ln a}+\frac{b}{\ln b}+\frac{c}{\ln c} \le \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln c}\right) \le \frac{a}{\ln c}+\frac{b}{\ln b}+\frac{c}{\ln a}.$$

10. Доказать, что
$$\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} \ge 2 \quad (n=2,3,4,\ldots).$$

11. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b, c имеет место неравенство
$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc.$$

12. Доказать, что для любых действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеет место неравенство
$$(x_1+\ldots+x_n)^2 \le n(x_1^2+\ldots+x_n^2).$$

13. Доказать, что последовательность
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
является монотонно убывающей.

14. Доказать, что
$$n! < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

15. Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место неравенство
$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}} \ge n\sqrt{2}.$$