Диофантовы уравнения

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:
$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - множество натуральных чисел;
$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ - множество натуральных положительных чисел;
$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - множество целых чисел;
$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$ - множество рациональных чисел;
$\mathbf{R}$ - множество действительных (вещественных) чисел.

В начале представим некоторые определения и утверждения, необходимые для дальнейшего изложения

Делимость

Определение. Пусть $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$. Числа $q \in \mathbf{Z}$ и $r \in \{0, 1, \ldots, |b| - 1\}$ называются соответственно неполным частным и остатком от деления a на b, если выполнено равенство

$$a = bq + r. \tag{1}$$

При этом, если $r = 0$, то говорят, что a делится на b, или что b делит a, или что b является делителем a (обозначение $a \vdots b$ или $b|a$).

Доказывается, что для любых целых чисел a, b, $b \neq 0$, существуют единственные целые числа q, r, $r \in \{0, \ldots, |b| - 1\}$ такие, что имеет место соотношение (1).

Определение. Наименьшим общим кратным ненулевых целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется наименьшее положительное число, которое делится на каждое из этих чисел (обозначение $[a_1, a_2 \ldots, a_n]$).

Определение. Наибольшим общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел (обозначение $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$).

Определение. Числа $a, b \in \mathbf{Z}$ называются взаимно простыми, если $(a, b) = 1$.

Свойства. Пусть $a, b, c \in \mathbf{Z}$.

1. Если $a|b$, $b|c$, то $a|c$ (свойство транзитивности).
2. Если $a|b$, $a|c$, то $a|b + c$.
3. Если $a|b$, то для всех целых c имеет место $a|bc$.
4. Если $ac|bc$ и $c \neq 0$, то $a|b$.
5. Пусть $a|bc$ и $(a, c) = 1$. Тогда $a|b$.
6. Если $a|c$, $b|c$ и $(a, b) = 1$, то $ab|c$.
7. $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.
8. $(a, b \pm a) = (a, b)$.

Сравнения

Определение. Пусть даны числа $a, b, c \in \mathbf{Z}$, причем $c \neq 0$. Говорят, что число a сравнимо с числом b по модулю c (обозначение $a \equiv b (\operatorname{mod} c)$), если $c | a - b$; в противном случае говорят, что число a не сравнимо с числом b по модулю c (обозначение $a \not\equiv b (\operatorname{mod} c)$).

Свойства сравнений:

1. $a \equiv a (\operatorname{mod} d)$.
2. Если $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$, то $b \equiv a (\operatorname{mod} d)$.
3. Если $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$, $b \equiv c (\operatorname{mod} d)$, то $a \equiv c (\operatorname{mod} d)$.
4. Если $a_1 \equiv b_1 (\operatorname{mod} d)$ и $a_2 \equiv b_2 (\operatorname{mod} d)$, то $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\operatorname{mod} d)$.
5. Если $a_1 \equiv b_1 (\operatorname{mod} d)$ и $a_2 \equiv b_2 (\operatorname{mod} d)$, то $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (\operatorname{mod} d)$.
6. Если $ac \equiv bc (\operatorname{mod} dc)$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$.
7. Если $a \equiv b (\operatorname{mod} dc)$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$.
8. Если $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$, $a \equiv b (\operatorname{mod} c)$ и $(d, c) = 1$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} dc)$.
9. Если $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$, то для всех $c \in \mathbf{Z}$ $ac \equiv bc (\operatorname{mod} d)$.
10. Если $ac \equiv bc (\operatorname{mod} d)$ и $(c, d) = 1$, то $a \equiv b (\operatorname{mod} d)$.

Простые числа

Определение. Натуральное положительное число, большее 1 и не имеющее натуральных положительных делителей, отличных от 1 и самого себя, называется постым. Остальные натуральные числа, большие 1, называются составными. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Основная теорема арифметики.

Всякое натуральное число, большее 1, разлагается в произведение простых чисел (не обязательно различных), причем указанное разложение единственно с точностью до порядка следования множителей.

Малая теорема Ферма.

Пусть p - простое число. Тогда для любого целого числа a справедливо соотношение

$$a^p \equiv a (\operatorname{mod} p).$$

О диофантовом анализе

Диофантовыми уравнениями называются уравнения вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где $P(x_1, \ldots, x_n)$ - многочлен с целыми коэффициентами.

При исследовании диофантовых уравнений обычно ставятся следующие вопросы:

1. имеет ли уравнение целочисленные решения;

2. конечно или бесконечно множество его целочисленных решений;
3. решить уравнение на множестве целых чисел, т. е. найти все его целочисленные решения;
4. решить уравнение на множестве целых положительных чисел;
5. решить уравнение на множестве рациональных чисел.

Отметим, что проблема решения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений с одним неизвестным, для уравнений первой степени и для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными достаточно трудной является даже задача существования целочисленных решений. Например, не известно, имеет ли уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 30$$

хотя бы одно целочисленное решение. Более того, доказано, что в принципе не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диафантовы уравнения.

Диофантовы уравнения с одним неизвестным

Рассмотрим уравнение

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0, \tag{2}$$

где $a_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 0, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$.

Покажем, каким образом можно определить все рациональные корни уравнения (2) (этот метод позволяет, в частности, решать уравнения вида (2) в целых числах). Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $a_0 \neq 0$. Пусть r - рациональный корень уравнения (2), $r = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$, $(p, q) = 1$. Умножая обе части равенства

$$a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \ldots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n = 0$$

на q^n, получим

$$a_0 q^n + a_1 p \cdot q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} q + a_n p^n = 0,$$

следовательно,

$$p | a_0 q^n \quad \text{и} \quad q | a_n p^n. \tag{3}$$

Так как $(p, q) = 1$, то $(p, q^n) = 1$, $(q, p^n) = 1$, поэтому из соотношений (3) следует, что $p | a_0$, $q | a_n$. Поскольку рациональных чисел вида $r = \dfrac{p}{q}$, таких что $(p, q) = 1$, $p | a_0$, $q | a_n$, конечное число, то за конечное число шагов можно выбрать те из них, которые являются решением уравнения (2). Как следует из приведенных выше рассуждений, других решений уравнение (2) иметь не может.

Задачи

Задача 1. Решить в рациональных числах уравнение

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0. \tag{4}$$

Решение. Свободный член уравнения имеет следующие делители

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21.$$

Выпишем также положительные делители старшего коэффициента: $1,\ 2$. Следовательно, для рационального корня уравнения (4) получаем следующие возможные значения:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 21,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{7}{2},\ \pm\frac{21}{2}.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что из этого множества только числа -3 и $\frac{1}{2}$ являются его корнями.

Задача 2. Решить в целых числах уравнение

$$x^8 + x^7 + x + 1 = 0. \tag{5}$$

Решение. Делители свободного члена уравнения: ± 1. Положительные делители старшего коэффициента: 1. Следовательно, все целые корни уравнения (5) находятся среди чисел $\{-1, 1\}$. Подставляя $x = \pm 1$ в (5) заключаем, что только $x = -1$ является корнем этого уравнения.

Диофантовы уравнения первой степени

Перейдем теперь к решению в целых числах уравнений первой степени или так называемых линейных уравнений, т. е. уравнений вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{6}$$

где $a_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $b \in \mathbf{Z}$.

Предположим, что не все числа a_j $(j = 1, \ldots, n)$ равны нулю. Очевидно, для существования решения в целых числах уравнения (6) необходимо, чтобы $(a_1, \ldots, a_n)|b$. Покажем, что это условие является и достаточным.

Положив

$$a'_j = \frac{a_j}{(a_1, \ldots, a_n)} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad b' = \frac{b}{(a_1, \ldots, a_n)},$$

перейдем к равносильному уравнению

$$a'_1x_1 + \ldots + a'_nx_n = b', \tag{7}$$

где $(a'_1, \ldots, a'_n) = 1$. Пусть $a'_i,\ a'_j$ - два ненулевых числа, таких, что $|a'_i| \neq |a'_j|$. Для определенности предположим, что $i < j$, $|a'_i| > |a'_j|$. Разделив с остатком a'_i на a'_j, получим представление $a'_i = a'_jq + r$. Заменив a'_i на $a'_jq + r$ в уравнении (7), приведем его к виду

$$a'_1x_1 + \ldots + rx_i + \ldots + a'_j(x_j + qx_i) + \ldots + a'_nx_n = b'. \tag{8}$$

Перепишем уравнение (8) в виде

$$a_1''x_1 + \ldots + a_n''x_n'' = b', \tag{9}$$

где $a_k'' = \begin{cases} a_k', & k \neq i \\ r, & k = i \end{cases}$, $x_k'' = \begin{cases} x_k, & k \neq j \\ x_j + qx_i, & k = j \end{cases}$.

Очевидно, что решения уравнения (7) и (9) связаны между собой взаимно однозначным соответствием и, таким образом, решив уравнение (9), несложно найти все решения уравнения (7). С другой стороны отметим, что $\forall\ k, i \in \{1, \ldots, n\},\ k \neq i$

$$a_k'' = a_k', \quad |a_i''| < |a_i'|.$$

Отметим также, что

$$(a_1'', \ldots, a_n'') = (a_1', \ldots, a_i' - a_j' \cdot q, \ldots, a_n') = (a_1', \ldots, a_n') = 1.$$

Следовательно, за конечное число шагов уравнение (7) приведется к виду

$$\tilde{a}_1\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{a}_n\tilde{x}_n = b', \tag{10}$$

где числа $\tilde{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые не равны нулю, равны между собой по абсолютной величине. Из соотношения $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = 1$ следует, что числа $\tilde{a}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ могут принимать только значения $0, \pm 1$, причем не все из них равны нулю. Предположим, для определенности, $\tilde{a}_1 = 1$. Тогда уравнение (10) имеет следующее решение:

$$\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = b' - \tilde{a}_2 t_2 - \ldots - \tilde{a}_n t_n, \\ \tilde{x}_2 = t_2, \\ \ldots \\ \tilde{x}_n = t_n, \end{array}$$

где $t_2, t_3, \ldots, t_n$ - произвольные целые числа. Отсюда, учитывая проведенные замены, получается и решение уравнения (7). Отметим, что при получении решения уравнения (10) использовался лишь факт, что $\tilde{a}_1 = 1$, поэтому, при выполнении алгоритма можно остановиться на том шаге, когда хотя бы один из коэффициентов станет равен ± 1.

Задача 3. Решить в целых числах уравнение

$$4x - 6y + 11z = 7.$$

Решение. Разделив с остатком -6 на 4, получим $-6 = 4(-2) + 2$. Представим исходное уравнение в виде

$$4(x - 2y) + 2y + 11z = 7.$$

После замены $x' = x - 2y$ это уравнение запишется следующим образом

$$4x' + 2y + 11z = 7.$$

Учитывая, что $11 = 2 \cdot 5 + 1$, преобразуем последнее уравнение:

$$4x' + 2(y + 5z) + z = 7.$$

Положив $y' = y + 5z$, получим

$$4x' + 2y' + z = 7.$$

Это уравнение имеет следующее решение: x', y' - произвольные целые числа, $z = 7 - 4x' - 2y'$. Следовательно, $y = y' - 5z = 20x' + 11y' - 35$, $x = x' + 2y = 41x' + 22y' - 70$.

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} x &= 41x' + 22y' - 70, \\ y &= 20x' + 11y' - 35, \\ z &= 7 - 4x' - 2y', \end{aligned}$$

где x', y' - произвольные целые числа.

Диофантовы уравнения высших степеней

1. Метод разложения на множители

Задача 4. Решить в целых числах уравнение

$$x + y = xy.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x-1)(y-1) = 1.$$

Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1. Т. е. исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1, \end{cases} \end{array} \right.$$

с решениями $(0,0)$ и $(2,2)$.

Задача 5. Доказать, что уравнение

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 15y^5 = 33$$

неразрешимо в целых числах.

Решение. Левая часть уравнения разлагается на множители следующим образом:

$$(x-2y)(x-y)(x+y)(x+2y)(x+3y).$$

Если $y \neq 0$, то в этом выражении все 5 множителей различны. С другой стороны, число 33 можно разделить максимум на 4 различных множителя. Следовательно, исходное уравнение не разрешимо в целых числах x, y при $y \neq 0$. Случай $y = 0$ также невозможен, поскольку тогда исходное уравнение принимает вид

$$x^5 = 33.$$

Так как $x = \sqrt[5]{33} \notin \mathbf{Z}$, исходное уравнение не имеет целочисленных решений и в случае $y = 0$.

Задача 6. Доказать, что уравнение

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 30$$

не имеет решений в целых числах.

Решение. Разложив левую часть на множители, приведем уравнение к виду

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 10.$$

Заметим, что $(x-y)+(y-z)+(z-x) = 0$. С другой стороны, делителями 10 являются числа $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из этого множества, дающих в произведении 10, не будет равняться 0.

Задача 7. Решить в целых числах уравнение

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) = 91.$$

Делителями числа 91 являются $\pm 1, \pm 91$. Так как
$y^2 + yx + x^2 \geq y^2 - 2|y||x| + x^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y - x = 1, \\ y^2 + yx + x^2 = 91, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y - x = 91, \\ y^2 + yx + x^2 = 1, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y = x + 1, \\ x^2 + x - 30 = 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y = x + 91, \\ x^2 + 91x + 30 \cdot 99 = 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y = x + 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = 5, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ x \in \emptyset. \end{array}\right.$$

Таким образом, целочисленными решениями исходного уравнения являются пары $(-6, -5)$ и $(5, 6)$.

Задача 8. Решить в натуральных числах уравнение

$$y^2 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1.$$

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x(x+3))((x+1)(x+2)) + 1 = \\ & = ((x^2+3x-1)-1)((x^2+3x+1)+1) + 1 = (x^2+3x+1)^2, \end{aligned}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$y^2 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

или

$$y = x^2 + 3x + 1.$$

Таким образом, множество всех решений имеет вид $\{(x, x^2 + 3x + 1) \mid x \in \mathbf{N}\}$.

2. Использование четности

Задача 9. Решить в простых числах уравнение

$$x^2 - 2y^2 = 1. \tag{11}$$

Решение. Рассмотрим два случая в зависимости от четности переменной x.

а) Пусть x - нечетное число. Подстановка $x = 2t + 1$ приводит исходное уравнение к виду

$$(2t + 1)^2 - 2y^2 = 1,$$

или

$$2y^2 = 4t(t + 1).$$

Следовательно, $2|y^2$. Так как y - простое число, то $y = 2$. Отсюда $x = \sqrt{1 + 2^3} = 3$.

b) Пусть x - четное число. Так как x - простое число, то $x = 2$. Следовательно, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ т. е. уравнение неразрешимо в простых числах.

Следовательно, уравнение (11) имеет в классе простых чисел единственное решение $(3; 2)$.

Задача 10. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz. \tag{12}$$

Решение. Одно решение очевидно: $x = y = z = 0$. Покажем, что других решений в целых числах уравнение не имеет. Будем доказывать от противного. Пусть x, y, z - ненулевое решение исходного уравнения. Так как $x^2 + y^2 + z^2$ - четное число, то по крайней мере одно из чисел x, y, z - четное. Используя симметрию уравнения (12), предположим, что $x = 2x_1$ - четное число. Тогда $4|y^2 + z^2$. Это может быть лишь в том случае, когда y и z - четные. Действительно, если одно из этих чисел четное, а другое нечетное, то число $y^2 + z^2$ - нечетное и $4 \not| \, y^2 + z^2$. Если же оба эти числа (z и y) нечетные, то

$$y^2 + z^2 = (2u + 1)^2 + (2v + 1)^2 = 4(u^2 + v^2 + u + v) + 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4).$$

Подставив $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ z = 2z_1$ в исходное уравнение, получим

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^2 x_1 y_1 z_1.$$

Повторением приведенных выше рассуждений доказывается, что $2|x_1,\ 2|y_1,\ 2|z_1$, следовательно, $2^2|x,\ 2^2|y,\ 2^2|z$. Рассуждая аналогично, получим, что для любого $n \in \mathbf{N}$

$2^n|x,\ 2^n|y,\ 2^n|z$. Противоречие. Следовательно, уравнение (12) имеет единственное решение $(0,0,0)$.

Задача 11. Доказать, что уравнение

$$x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0 \tag{13}$$

в целых числах не имеет решений, не равных нулю одновременно.

Решение. Предположим, что числа x,y,z, не равные одновременно нулю, являются решением исходного уравнения. Видно, что число x - четное. Подстановка $x=2x_1$ дает

$$4x_1^3+y^3+2z^3-6x_1yz=0.$$

Отсюда следует, что число y - четное, $y=2y_1$. Учитывая это, получим

$$2x_1^3+4y_1^3+z^3-6x_1y_1z=0.$$

Следовательно, z - также четное число. После подстановки $z=2z_1$ уравнение принимает вид

$$x_1^3+2y_1^3+4z_1^3-6x_1y_1z_1=0.$$

Рассуждая аналогично, доказывается, что для любого $n\in\mathbf{N}$

$$2^n|x,\ 2^n|y,\ 2^n|z.$$

Противоречие.

3. Доказательство неразрешимости уравнений с использованием сравнений

Задача 12. Решить в целых числах уравнение

$$x^2+1=3y. \tag{14}$$

Решение. Пусть x,y - целые числа, удовлетворяющие уравнению (14). Тогда $x^2+1\equiv 0(\bmod 3)$. Рассмотрим случаи, соответствующие различным остаткам от деления x на 3.

a) Пусть $x\equiv 0(\bmod 3)$. Тогда $x^2+1\equiv 1(\bmod 3)$, значит $x^2+1\not\equiv 0(\bmod 3)$.

b) Пусть $x\equiv 1(\bmod 3)$. Тогда $x^2+1\equiv 2(\bmod 3)$, следовательно, $x^2+1\not\equiv 0(\bmod 3)$.

c) Пусть $x\equiv 2(\bmod 3)$. Тогда $x^2+1\equiv 5\equiv 2\not\equiv 0(\bmod 3)$. Следовательно, сравнение $x^2+1\equiv 0(\bmod 3)$ не имеет решений, значит и уравнение (14) также неразрешимо в целых числах.

Задача 13. Решить в целых числах уравнение

$$x^2-2y^2+8z=3. \tag{15}$$

Решение. Пусть (x,y,z) - целочисленное решение уравнения (15). Так как x - нечетное число, следовательно,

$$x^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1\equiv 1(\bmod 8).$$

По модулю 4 исходное уравнение принимает вид

$$1 - 2y^2 \equiv 3 \pmod 4$$

или

$$y^2 \equiv -1 \pmod 2.$$

Следовательно, y - нечетное число, отсюда $y^2 \equiv 1 \pmod 8$. Поэтому, по модулю 8 исходное уравнение будет иметь вид

$$1 - 2 \equiv 3 \pmod 8 \ \Leftrightarrow \ 4 \equiv 0 \pmod 8.$$

Полученное противоречие доказывает неразрешимость исходное уравнение в целых числах.

Задача 14. Доказать, что уравнение

$$x^3 + x + 10y = 20004$$

неразрешимо в целых числах.

Решение. По модулю 5 исходное уравнение принимает вид

$$x^3 + x \equiv -1 \pmod 5. \tag{16}$$

Рассмотрев все возможные остатки от деления x на 5, убеждаемся, что сравнение (16) неразрешимо. Следовательно, исходное уравнение также неразрешимо в целых числах.

4. Другие методы решения диафантовых уравнений

Задача 15. Доказать, что уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

Решение. Положим $x = a+b$, $y = a-b$. Тогда $x^3+y^3 = 2a^3+6ab^2$. С учетом последнего равенства исходное уравнение принимает вид

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2.$$

Положив $a = 1$, получим $z^3 = -6b^2$. Положим теперь $b = 6t^3$. Отсюда $z = -6t^2$, $x = 1+6t^3$, $y = 1 - 6t^3$. Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра t.

Задача 16. Доказать, что уравнение

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{17}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение. Нетрудно заметить, что $(3, 2)$ - одно из решений исходного уравнения. С другой стороны из тождества

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(2xy)^2 = (x^2 - 2y^2)^2$$

следует, что если (x, y) - решение уравнения (17), то пара $(x^2+2y^2, 2xy)$ также является его решением. Используя этот факт, рекуррентно определим бесконечную последовательность (x_n, y_n) различных решений исходного уравнения:

$$(x_1, y_1) = (3, 2) \text{ и } x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n^2, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Задача 17. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3.$$

Решение. Заметим, что слагаемые в левой части уравнения имеют одинаковый знак, а поскольку их сумма положительна, то каждое слагаемое также положительно. Применяя неравенство Коши, получим

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x} \cdot \frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geq 3.$$

Следовательно, $xyz = 1$. Отсюда получим, что решениями могут быть только тройки $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$. Проверкой убеждаемся, что каждая из них действительно является решением исходного уравнения.

Задача 18. Доказать, что уравнение

$$x(x + 1) = 4y(y + 1)$$

неразрешимо в целых положительных числах.

Решение. Нетрудно заметить, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + x + 1 = (2y + 1)^2.$$

Следовательно, $x^2 < (2y+1)^2 < (x+1)^2$ или $x < 2y+1 < x+1$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Задача 19. Решить в целых числах уравнение

$$2x^3 + xy - 7 = 0.$$

Решение. Из условия следует, что x должен быть делителем числа 7. Т. е. возможные значения x находятся среди чисел $\{\pm 1, \pm 7\}$. Перебрав эти возможности, получаем решение уравнения: $(1, 5)$, $(-1, -9)$, $(7, -97)$, $(-7, -99)$.

Задача 20. Доказать, что уравнение

$$x^2 + 1 = py,$$

где p - простое число вида $4k+3$, неразрешимо в целых числах.

Решение. Предположим, что исходное уравнение разрешимо в целых числах. Тогда

$$x^2+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$

Но, согласно малой теореме Ферма,

$$-1 \equiv (-1)^{2k+1} \equiv (x^2)^{2k+1} \equiv x^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p).$$

Полученное противоречие доказывает неразрешимость исходного уравнения в $\mathbf{Z}$.

Задача 21. Доказать, что уравнение

$$x^2-y^3=7$$

неразрешимо в целых положительных числах.

Решение. Если y - четное число, то $x^2 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$, что невозможно. Поэтому предположим, что y - нечетное число: $y=2k+1$. Тогда

$$x^2+1=y^3+8=(y+2)((y+1)^2+3)=(y+2)(4(k+1)^2+3).$$

Итак, число x^2+1 имеет делитель вида $4n+3$. Следовательно, оно имеет и простой делитель вида $4n+3$ (действительно, если бы все простые делители числа $4(k+1)^2+3$ имели вид $4n+1$, то и само число, являясь их произведением, имело бы вид $4n+1$). Однако последнее невозможно в силу предыдущей задачи.

Задача 22. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$$

не имеет решений в целых положительных числах.

Решение. Положим $d=(x,y),\ x_1=\dfrac{x}{d},\ y_1=\dfrac{y}{d}$. Так как

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2,$$

следовательно,

$$x_1^2+x_1y_1+y_1^2=d^2x_1^2y_1^2. \tag{18}$$

Отсюда получаем, что

$$x_1|y_1, \quad y_1|x_1.$$

Учитывая, что $(x_1,y_1)=1$, делаем вывод, что $x_1=y_1=1$. Таким образом, уравнение (18) принимает вид

$$d^2=3.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Задача 23. Решить в целых числах уравнение

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

Решение. Положим $t = x + y$. Так как

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2,$$

то должно выполнятся неравинство

$$t \geq \frac{1}{4}t^2,$$

откуда $t \in [0;4]$.

Учитывая соотношение $x + y = (x+y)^2 - 3xy$, рассмотрим случаи, соответствующие целочисленным значениям t из отрезка $[0;4]$.

a) $t = 0$

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

b) $t = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

c) $t = 2$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = \dfrac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \emptyset.$$

d) $t = 3$

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

e) $t = 4$

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Таким образом, целочисленными решениями исходного уравнения являются пары $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все целые решения уравнения

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

Ответ: $x = 3$.

2. Решить в рациональных числах уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0.$$

Ответ: $\{-3, 2\}$.

3. Решить в целых числах уравнение

$$127x - 52y + 1 = 0.$$

Ответ: $x = 9 + 52t, \quad y = 22 + 127t, \quad t \in \mathbf{Z}$.

4. Решить в целых числах уравнение

$$6x + 10y - 7z = 11.$$

Ответ: $x = 3u + 7v - 11,\ y = u,\ z = 4u + 6v - 11,\ u, v \in \mathbf{Z}$.

5. Решить в целых числах уравнение

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13.$$

Указание. Применить разложение на множители.
Ответ: (2,1), $(-2, -1)$.

6. Решить в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Ответ: (0,0); (1,2).

7. Решить в целых числах уравнение

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4).$$

Указание. Использовать четность.
Ответ: (0,0,0,0).

8. Доказать, что уравнение

$$y^2 = 5x^2 + 6$$

не имеет целочисленных решений.
Указание. Рассмотреть уравнение по модулю 4.

9. Доказать, что уравнение

$$x^3 = 2 + 3y^2$$

не имеет решений в целых числах.
Указание. Рассмотреть уравнение по модулю 9.

10. Доказать, что уравнение
$$x^4 + y^6 + z^{12} = t^4$$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
Указание. Параметризовать решение.

11. Доказать, что уравнение
$$x^2 - 3y^2 = 1$$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
Указание. Использовать реккурентное соотношение между решениями.

12. Решить в целых числах уравнение
$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$
Указание. Представить уравнение в виде $(2x+1)^2 = (2y^2+y+1)^2 - (y^2-2y)$.
Ответ: $(0,-1)$, $(-1,-1)$, (0,0), $(-1,0)$, $(5,2)$, $(-6,2)$.

13. Решить в целых положительных числах уравнение
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3.$$
Указание. Применить неравинство Коши.
Ответ: (1,1,1).

14. Решить в целых положительных числах уравнение
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{p},$$
где параметр p - простое число больше 2.
Ответ: $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p(p+1)}{2}\right)$, $\left(\frac{p(p+1)}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$.