Молдавский государственный университет
Факультет математики и информатики
Прием 2000
Тест по математике
Специальности: информатика, информатика и современные прикладные языки, информационный менеджмент

(Все ответы нужно обосновать)

1. Решить неравенство
$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{2x+4}\geq 1$$
$A)$ $x\in\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ $B)$ $x\in[6;+\infty)$ $C)$ $x\in\left[-\frac{1}{4};0\right]\cup[6;+\infty)$

$D)$ $x\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$ $E)$ $x\in\left(0;\frac{41}{6}\right]$.

2. Сколько корней уравнения
$$2\sin x\cdot\cos x-3(\sin x+\cos x)+3=0$$
находятся на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$A)$ один $B)$ ни один $C)$ два $D)$ три $E)$ четыре.

3. Решить неравенство
$$\log_x^2 2-5\log_x 2+6\geq 0$$
$A)$ $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$ $B)$ $x\in(0,1)\cup(1;\sqrt[3]{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$

$C)$ $x\in(0;1)\cup[\sqrt{2};+\infty)$ $D)$ $x\in(1;\sqrt[3]{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$

$E)$ $x\in(1;\sqrt[3]{2})$

4. Найти величины углов треугольника, если известно, что высота и медиана проведенные из одного и того же угла треугольника, делят данный угол на три равные части.

$A)$ $30^\circ,\ 30^\circ,\ 120^\circ$ $B)$ $45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$ $C)$ $30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ$

$D)$ $60^\circ,\ 60^\circ,\ 60^\circ$ $E)$ $25^\circ,\ 55^\circ,\ 100^\circ$.

5. Какие из следующих утверждений истины?

1) Для любого треугольника ABC справедливо неравенство
$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2};$$
2) Если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник является прямоугольником;
3) В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности этого треугольника совпадает с центром описанной окружности этого треугольника;

4) В равнобедренной трапеции точка пересечения диагоналей является центром симметрии этой трапеции;
5) В прямоугольном треугольнике центр описанной ему окружности совпадает с серединой гипотенузы.

Тест подготовлен доцентом МГУ, д.ф.м.н. С.Катаранчук.

Решения

1. Неравенство равносильно следующему

$$\sqrt{4x+1} \geq 1+\sqrt{2x+4}.$$

Так как обе части последнего неравенства неотрицательны, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство

$$4x+1 \geq 1+2\sqrt{2x+1}+2x+4$$

или,

$$x-2 \geq \sqrt{2x+4}.$$

Последнее неравенство равносильно следующей системе

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ (x-2)^2 \geq 2x+4, \\ 2x+4 \geq 0. \end{cases}$$

Решив систему

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-4x+4 \geq 2x+4, \\ x \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x(x-6) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x \geq 6, \end{array} \right. \end{cases}$$

получим $x \geq 6$.

Следовательно, множество решений неравенства есть множество $[6; +\infty)$.

Ответ: B.

2. Обозначим $\sin x + \cos x = t$, $(|t| \leq \sqrt{2})$, тогда $\sin x \cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$, и уравнение примет вид

$$t^2-1-3t+3=0$$

или $t^2-3t+2=0$, откуда $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$ (не удовлетворяет условию $|t| \leq \sqrt{2}$). Следовательно

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Используя метод вспомогательного угла, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Поскольку $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, следует что $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ и, таким образом, на данном отрезке уравнение имеет два решения.

Ответ: C.

3. Область допустимых значений неравенства есть множество $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Обозначим $\log_x 2=t$ и получим квадратное неравенство $t^2-5t+6\geq 0$, решения которого $t\leq 2$ или $t\geq 3$. Таким образом

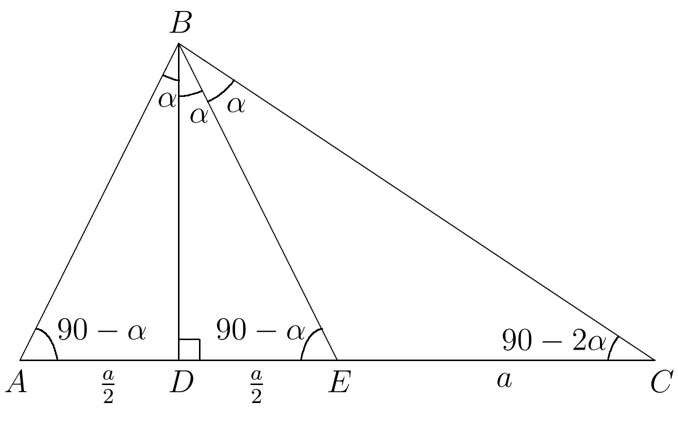
$$\left[\begin{array}{l}\log_x 2\leq 2,\\ \log_x 2\geq 3,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x\in(0;1),\\ \left[\begin{array}{l}\log_x 2\leq\log_x x^2,\\ \log_x 2\leq\log_x x^3,\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x\in(1;+\infty),\\ \left[\begin{array}{l}\log_x 2\leq\log_x x^2,\\ \log_x 2\geq\log_x x^3,\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x\in(0,1),\\ \left[\begin{array}{l}2\geq x^2,\\ 2\leq x^3,\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x\in(1,+\infty),\\ \left[\begin{array}{l}2\leq x^2,\\ 2\geq x^3,\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} 0<x<1,\\ \left[\begin{array}{l}0<x<\sqrt{2},\\ x\geq\sqrt[3]{2},\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x>1,\\ \left[\begin{array}{l}x\geq\sqrt{2},\\ x\leq\sqrt[3]{2},\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(0,1),\\ x\in(1,\sqrt[3]{2})\cup[\sqrt{2},+\infty),\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,\sqrt[3]{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty).$$

Ответ: B.

4. Пусть в треугольнике ABC $BD\perp AC$ (BD – высота), BE– медиана ($AE=EC=a$) $\angle ABD=\angle DBE=\angle EBC=\alpha$.



Поскольку BD высота и биссектриса, $\triangle ABE$ равнобедренный и, следовательно BD – медиана,

$$AD = \frac{a}{2} = DE.$$

Из $\triangle ABD$: $AB = \dfrac{AD}{\cos\angle BAD} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Используя теорему синусов

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB} \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos 2\alpha}$$

откуда

$$4\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin 3\alpha, \quad \text{или} \quad 4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) = \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha).$$

Так как $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, то

$$4 - 8\sin^2\alpha = 3 - 4\sin^2\alpha, \quad \text{или} \quad 4\sin^2\alpha = 1$$

откуда $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ ($\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$ не удовлетворяет условиям задачи) и $\alpha = 30^\circ$. Следовательно, углы треугольника равны $\angle ABC = 3\alpha = 90^\circ$, $\angle BAC = 90-\alpha = 60^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$.

Ответ: C.

5.

1) Истинное утверждение. Так как $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ (R (r) – радиус описанной (вписанной) в треугольник окружности), а $2r \le R$, то

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2) Ложное утверждение. Например, ромб имеет центр симметрии, но не обязательно является прямоугольником.

3) Ложное утверждение. Например, в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы, а центр вписанной окружности находится внутри треугольника.

4) Ложное утверждение. Следует из определения центра симметрии.

5) Истинное утверждение. Следует из теоремы синусов: $\dfrac{c}{\sin 90^\circ} = 2R \Rightarrow c = 2R$ и $R = \dfrac{c}{2}$ (c – гипотенуза, R – радиус описанной окружности).

Ответ: Первое и пятое утверждение истинны.