Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике для выпускников 11 класса, 8 июня 1999

1. Упростить выражение
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{x+1}{x(1-x^2)}$$
и найти значение этого выражения при $x=\frac{2}{3}$. (4 очка)

Решение. Область допустимых значений ($ОДЗ$) данного выражения есть множество $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1;0;1\}$. Приведя к общему знаменателю и учитывая $ОДЗ$, получим
$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x-1+2x+1}{x(x-1)}=\frac{3x}{x(x-1)}=\frac{3}{x-1}.$$
При $x=\frac{2}{3}$ получим
$$\frac{3}{\frac{2}{3}-1}=-9.$$

2. Отрезок MB перпендикулярен плоскости прямоугольника $ABCD$. Точка M соединена с вершинами прямоугольника. Назовите все образованные прямоугольные треугольники. (3 очка)

Решение. Используя теорему трех перпендикуляров, заметим что все боковые грани образуют прямоугольные треугольники. Таким образом, получаются следующие прямоугольные треугольники MBA, MBC, MAD и MCD.

3. Найти область определения функции
$$f(x)=\log_{0,5}(x+3)-\sqrt{1-2x}.$$
(3 очка)

Решение. Поскольку функция под знаком логарифма должна быть положительной, а функция под знаком квадратного корня неотрицательной, область определения находится из системы
$$\begin{cases} x+3>0,\\ 1-2x\geq 0.\end{cases}$$
Решая систему, получим $D(f)=(-3,\frac{1}{2}]$.

4. Найдите сумму корней уравнения $x^{1+\lg x}=100$. (5 очков)

Решение. $ОДЗ$ данного уравнения есть $x>0$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим
$$\lg x^{1+\lg x}=\lg 100$$
или
$$(1+\lg x)\lg x=2.$$
Обозначив $\lg x=t$, получим квадратное уравнение
$$t(1+t)=2,$$

решения которого есть $t_1 = -2,\ t_2 = 1$.

Таким образом, получена совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{100}, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Оба корня удовлетворяют *ОДЗ*, и их сумма равна $10,01$.

5. Пусть дана функция

$$f(x) = 8 - x\sqrt{x}.$$

Найти, при каких значениях x справедливо равенство

$$f(x) + 2xf'(x) = 0. \qquad (1)$$

(5 очков)

Решение. Область определения функции $x \geq 0$. Перепишем эту функцию в виде

$$f(x) = 8 - x^{\frac{3}{2}}.$$

Производная этой функции есть

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом уравнение (1) примет вид

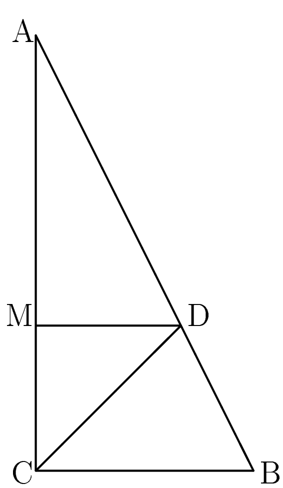
$$8 - x\sqrt{x} + 2x(-\frac{3}{2}\sqrt{x}) = 0$$

или

$$x\sqrt{x} = 2,$$

откуда следует $x = \sqrt[3]{4}$. Это значение удовлетворяет *ОДЗ* уравнения $(x \geq 0)$ и, следовательно, является решением уравнения (1).

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, CD есть биссектриса и $AD = 2\sqrt{3}$см. Найти длину стороны BC, если известно, что высота DM треугольника ADC равна $\sqrt{3}$см. (6 очков)



Решение. Так как CD - биссектриса прямого угла, $\angle ACD = \angle BCD = 45°$. Треугольник MDC - равнобедренный ($\angle MDC = \angle DCM = 45°$), следовательно, $MC = DM = \sqrt{3}$. Используя теорему Пифагора, находим из прямоугольника треугольника ADM что $AM = 3$. Следовательно, $AC = AM + MC = 3 + \sqrt{3}$. $\triangle AMD$ подобен $\triangle ACB$ (прямоугольные треугольники и угол $\angle A$ общий), следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AC}\text{ , откуда } AB = \frac{AD \cdot AC}{AM} \text{ и } AB = \frac{2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{3} = 2(\sqrt{3}+1).$$

Таким образом,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4(\sqrt{3}+1)^2 - 3(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1.$$

7. Первообразная функции

$$f(x) = 4x^3 + 2x,$$

при $x = 1$ получает значение 25. Найти значение этой первообразной при $x = 2$. (5 очков)

Решение. Находим первообразную функции f:

$$F(x) = \int (4x^3 + 2x)dx = x^4 + x^2 + C.$$

Поскольку $F(1) = 25$ следует $1^4 + 1^2 + C = 25$, откуда $C = 23$ и $F(x) = x^4 + x^2 + 23$. Таким образом, $F(2) = 2^4 + 2^2 + 23 = 43$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos 2x - 4\cos x$$

на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. (6 очков)

Решение. Находим производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 + 4\sin x$$

откуда, учитывая что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,

$$f'(x) = 4\sin x - 4\sin x \cdot \cos x = 4\sin x(1 - \cos x).$$

Приравнивая производную к нулю, получим уравнение

$$4\sin x(1 - \cos x) = 0.$$

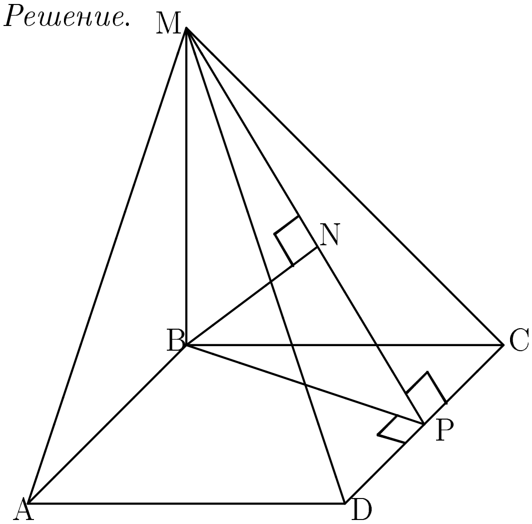
Это уравнение имеет единственное решение, которое принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а именно $x = 0$. Поскольку

$$f(0) = -3,$$
$$f(-\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$
$$f(\tfrac{\pi}{2}) = -1,$$

то наименьшее значение функции достигается при $x = 0$ и равно -3, а наибольшее значение при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ равно -1.

9. Основание пирамиды - ромб с тупым углом в 120°. Высота пирамиды падает в вершину этого угла, из которого проводится перпендикуляр длины 12см на противоположную боковую грань. Найти объем пирамиды, если этот перпендикуляр образует с плоскостью основания угол в 60°. (7 очков)

Решение.



Поскольку BM перпендикулярна плоскости $ABCD$, следует, что точка N принадлежит высоте MP треугольника MDC. Следовательно, $\angle NBP = 60°$, а $\angle MBN = 30°$. Находим высоту BM и сторону BP из треугольников MBN и BNP соответственно. Таким образом,

$$h = MB = \frac{BN}{\cos\angle MBN} = \frac{12}{\cos 30^\circ} = \frac{24}{\sqrt{3}},$$
$$BP = \frac{BN}{\cos 60^\circ} = 24.$$

В свою очередь, BP есть высота ромба $ABCD$. Из $\triangle BPC$

$$BC = \frac{BP}{\sin 60^\circ} = \frac{24}{\sin 60^\circ} = \frac{48}{\sqrt{3}}.$$

Находим площадь основания пирамиды

$$S = CD \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1152}{\sqrt{3}}$$

и объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}Sh = 3072 \ (\text{куб.ед.}).$$

10. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(2^x - a)(2^x + a)}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

имеет одно действительное решение? (8 очков)

Решение. ОДЗ уравнения есть множество $x \in \mathbf{R} \setminus \{2; 3\}$. В *ОДЗ* уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = a, \\ 2^x = -a. \end{array}\right.$$

При $a = 0$, решений нет ($2^x > 0$).
Если $a > 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = a, \\ 2^x = -a, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \log_2 a, \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x = \log_2 a.$$

Учитывая *ОДЗ*, в этом случае получим $\log_2 a \neq 2,\ \log_2 a \neq 3$ или $a \neq 4,\ a \neq 8$. Аналогично, при $a < 0$ единственное решение есть $x = \log_2(-a)$, если $a \neq -4,\ a \neq -8$. Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение, если $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; \pm 4; \pm 8\}$.

Замечания.

1. Время выполнения работы 180 минут.

2. В зависимости от количества очков, оценки будут

Оценка	**Очки**
10	49 – 52
9	44 – 48
8	38 – 43
7	31 – 37
6	23 – 30
5	17 – 22