Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике для выпускников общеобразовательных школ, 2001

Время работы: 180 минут.

1. Вычислить $\log_2\left(16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}}\right)$.

2. Найти максимум функции $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

3. Бисектриссы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите величину угла AOB.

4. Пусть $f : (-\infty; \frac{1}{3}) \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$. Определите первообразную этой функции, график которой содержит точку $A(0; \frac{2}{3})$.

5. Решить уравнение

$$\log_3(x-1) - \log_3(2x-7) = \log_3 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-4).$$

6. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos 2\alpha = 2\sqrt{2}\sin\alpha + 2$, а $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

7. Решить неравенство

$$(x+4)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

8. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 30°. Определите объем пирамиды.

9. При каких значениях действительного параметра a прямая $y = ax + 7$ является касательной к графику функции $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 + 6x + a$?

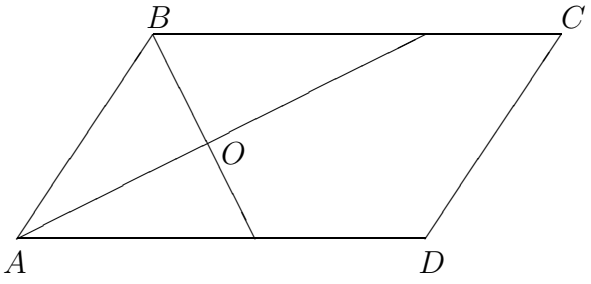
Решения

1. $16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = 2^4(2^5 \cdot 2^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{(5+\frac{1}{5})\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{8}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{13}{20}} = 2^{4+\frac{13}{20}} = 2^{\frac{93}{20}}$, следовательно $\log_2 16\sqrt[8]{32\sqrt[5]{2}} = \log_2 2^{\frac{93}{20}} = \frac{93}{20} = 4,65$.

2. Максимум трехчлена $ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ равен $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. В данном случае $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{-2\cdot 2} = \dfrac{3}{4}$ и, следовательно

$$y_{max} = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{8}.$$

3.



Так как сумма углов A и B параллелограмма $ABCD$ (см. рисунок) равна $180°$, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B = 90°$. Сумма внутренних углов треугольника AOB равна $180°$. Следовательно

$$\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180° - 90° = 90°.$$

4. Поскольку $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$, и $F(0) = \frac{2}{3}$, то $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3\cdot 0} + C = \frac{2}{3}$, откуда $C = \frac{4}{3}$. Следовательно $F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + \frac{4}{3}$.

5. Область допустимых значений данного уравнения есть множество $(4;+\infty)$, которое находится решая систему неравенств

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x-7>0 \\ x-4>0. \end{cases}$$

Используя свойства логарифмической функции (см., например, **Логарифмические уравнения**) в *ОДЗ* получим следующие равносильности

$$\log_3(x-1)-\log_3(2x-7) = \log_3 2-\log_3(x-4) \Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(x-4) = \log_3 2+\log_3(2x-7),$$

откуда $\log_3(x-1)(x-4) = \log_3 2(2x-7)$ или

$$(x-1)(x-4) = 2(2x-7).$$

Решив полученное квадратное уравнение $x^2-9x+18=0$ найдем $x_1 = 3 \notin$ *ОДЗ* и $x_2 = 6 \in$ *ОДЗ*. Таким образом $x = 6$.

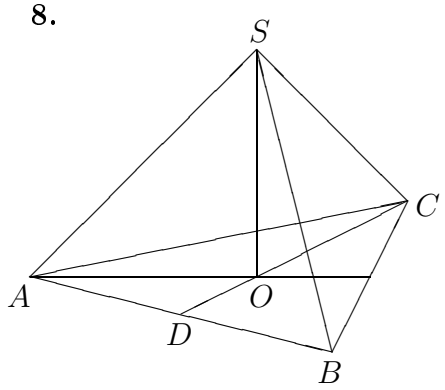
6. Поскольку $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, получим $1-2\sin^2\alpha = 2\sqrt{2}\sin\alpha + 2$ или $2\sin^2\alpha + 2\sqrt{2}\sin\alpha + 1 = 0$, откуда $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Так как α принадлежит четвертой четверти, $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.

$$(x+4)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0, \\ \begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x+4\geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1,\ x_2=2 \\ \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty) \\ x\in[-4;+\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty).$$

8.



Пусть $SABC$ - правильная треугольная пирамида, $SO = h = \sqrt{3}$ - ее высота, $\angle SCO = 30°$, a - длина стороны равностороннего треугольника ее основания. Тогда

$$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad CO = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника SOC ($SO \perp OC$) получим

$$CO = SO \operatorname{ctg} \angle SCO = \sqrt{3} \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Таким образом $\frac{a}{\sqrt{3}} = 3$, откуда $a = 3\sqrt{3}$. Найдем площадь основания прирамиды

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{1}{2}(3\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

и объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}(\text{куб.ед.})$$

9. Прямая $y = ax + 7$ является касательной к графику трехчлена $x^2 + 6x + a$, если уравнение $ax + 7 = x^2 + 6x + a$, эквивалентное уравнению $x^2 + (6 - a)x + a - 7 = 0$ имеет единственное решение. Последнее уравнение имеет единственное решение, если ее дискриминант $D = (6 - a)^2 - 4(a - 7)$ равен нулю. Следовательно

$$36 - 12a + a^2 - 4a + 28 = 0 \quad \text{или} \quad a^2 - 16a + 64 = 0$$

откуда $a = 8$.