Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, июнь, 1999
Гуманитарный профиль
I Вариант

Время решения - 180 минут

1. Пусть функция $f:\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{3^x}{3^{2x}-1}$. Вычислить $f(\log_3 2)$.

Решение. Используя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b,\ a>0,\ a\neq 1,$ $b>0$, получим

$$f(\log_3 2)=\frac{3^{\log_3 2}}{3^{2\log_3 2}-1}=\frac{2}{\left(3^{\log_3 2}\right)^2-1}=\frac{2}{2^2-1}=\frac{2}{3};$$

2. Привести пример уравнения второго порядка, которое имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Используя обратну теорему Виета, например, для $x_1=-1$ и $x_2=-2$, получим квадратное уравнение $x^2+3x+2=0$. В общем случае квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных отрицательных корня, если и только если

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}>0, \\ \dfrac{b}{a}>0, \\ b^2-4ac>0. \end{cases}$$

3. При каких действительных значениях x и y справедливо равенство
$\dfrac{x+y+(y-3)i}{5+3i}=1+i$?

Решение. Перепишем равенство

$$x+y+(y-3)i=(1+i)(5+3i)$$

или, после элементарных преобразований,

$$x+y+(y-3)i=2+8i,$$

откуда, используя определение равенства двух комплексных чисел z_1 и z_2 ($Rez_1=Rez_2$ и $Imz_1=Imz_2$), получим систему

$$\begin{cases} x+y=2, \\ y-3=8. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $x=-9$ и $y=11$.

4. Решить уравнение $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0$.

Решение.

$$(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ 3+2x-x^2=0, \end{array}\right. \\ 3+2x-x^2\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=-1,\ x_3=3, \end{array}\right. \\ -1\leq x\leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=3. \end{array}\right.$$

5. Пусть дана функция $f(x) = a\sin 4x + b\cos 2x$. Определить действительные значения параметров a и b, если известно, что $f'\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 4$ и $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$.

Решение. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = (a\sin 4x + b\cos 2x)' = 4a\cos 4x - 2b\sin 2x.$$

Так как $f'\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 4$ и $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$, то

$$\begin{cases} 4a\cos\dfrac{7\pi}{3} - 2b\sin\dfrac{7\pi}{6} = 4, \\ 4a\cos 3\pi - 2b\sin\dfrac{3\pi}{2} = 2, \end{cases}$$

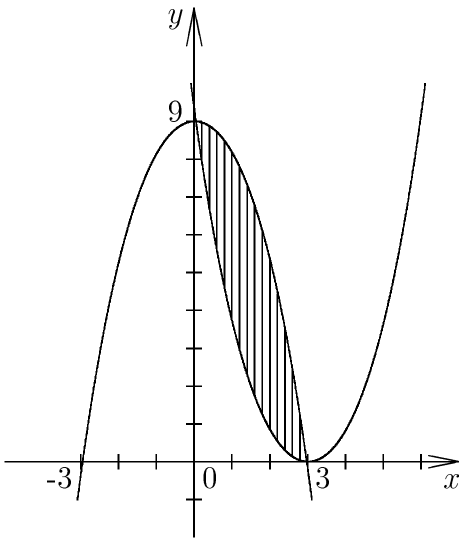
или

$$\begin{cases} 2a + b = 4, \\ -4a + 2b = 2, \end{cases}$$

откуда $a = \dfrac{3}{4}$ и $b = \dfrac{5}{2}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 9 - x^2$ и $g(x) = x^2 - 6x + 9$.

Решение.



Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 9 - x^2$ и $g(x) = x^2 - 6x + 9$ (см. рисунок), определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

где a и b - пределы интегрирования, которые находятся при решении уравнения

$$f(x) = g(x),$$

то есть, $9 - x^2 = x^2 - 6x + 9$ или $2x^2 - 6x = 0$, откуда (учитывая что $a < b$) получим $a = x_1 = 0$ и $b = x_2 = 3$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (9 - x^2 - x^2 + 6x - 9)dx = \int_0^3 (6x - 2x^2)dx = \\ &= \left(3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 27 - 18 = 9(\textit{кв.ед.}). \end{aligned}$$

7. При делении многочлена $P(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 16$ на $x - 3$ и на $x + 1$, в обоих случаях получаем остаток -2. Какой остаток получим при делении многочлена $P(x)$ на $x - 1$?

Решение. Поскольку

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - m \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 - 16 = -2,$$

$$P(-1) = 2(-1)^3 - m \cdot (-1)^2 + n \cdot (-1) - 16 = -2,$$

то

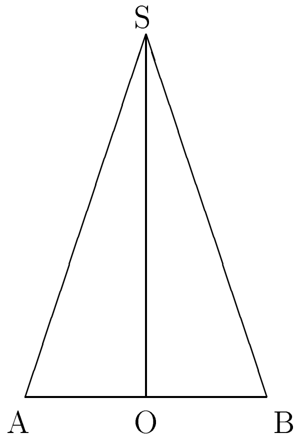
$$\begin{cases} -9m + 3n = -40, \\ -m - n = 16. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $m = -\dfrac{2}{3}$ и $n = -\dfrac{46}{3}$. Таким образом, $P(x) = 2x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{46}{3}x - 16$ и остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)$ равен

$$P(1) = 2 + \frac{2}{3} - \frac{46}{3} - 16 = -\frac{86}{3}.$$

8. Площадь основания прямого кругового конуса равна $9\pi\text{см}^2$, а площадь полной поверхности - $24\pi\text{см}^2$. Найти объем конуса.

Решение.



Так как площадь основания $S_b = \pi R^2$ (R - радиус основания конуса), а площадь боковой поверхности $S_{lat} = \pi Rl$ (l - образующая конуса), то, согласно условиям,

$$\begin{cases} \pi R^2 = 9\pi, \\ \pi Rl = 24\pi - 9\pi, \end{cases}$$

откуда $R = 3$ и $l = 5$. Из прямоугольного треугольника SOA (см. рисунок), находим высоту конуса SO:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{см}).$$

Следовательно, объем конуса

$$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}9\pi 4 = 12\pi(\text{см}^3).$$

9. Решить неравенство $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \le 1$.
Решение.

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \le 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \le \log_{2x} 2x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 \le 2x, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 \ge 2x, \\ 2x > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \ge 0, \\ x > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < 2, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ 1 \le x \le 6, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1, \\ x \ge 6, \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (\tfrac{1}{2}; 1] \cup (3; 6], \\ x \in (0; \tfrac{1}{2}), \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (0; \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}; 1] \cup (3; 6].$$