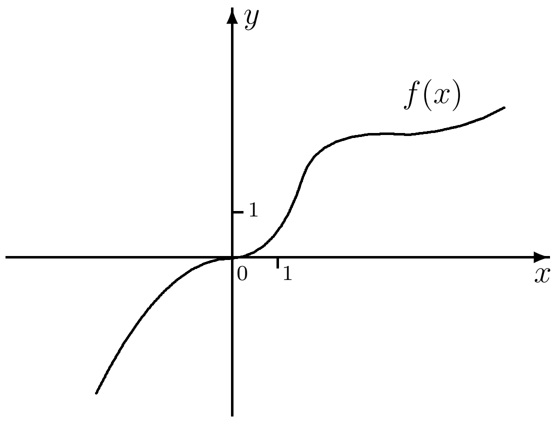
Министерство просвещения Республики Молдова
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 16 июня 2003
Гуманитарный профиль

Время работы: 180 минут.

1. Определите знак выражения $\sqrt[5]{3}-\sqrt[4]{2}$.

2. При каких значениях a точка $M(a;1)$ принадлежит эллипсу $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$?

3. Используя график функции $f(x)$, постройте в той же системе координат график функции $|f(x)|$.



4. Найдите все элементы множества $[-\sqrt{3};e)\bigcap\mathbb{Z}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+y=1\\3^{x+y}=9.\end{cases}$

6. $ABCD$ – ромб, $AB=6$ см и $\angle ABC=120^o$, $[MA]\perp(ABC)$, $MA=3$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

7. Решите систему матричных уравнений $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}4&5\\5&4\end{pmatrix}\\X-Y=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-3\end{pmatrix}\end{cases}.$

8. Найдите значения параметра $m\in\mathbb{R}$, при которых функция $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{mx^2+(m-1)x}{x+1}$ имеет экстремум в точке $x=-2$.

9. В $\triangle ABC$ $AB=6$ см, $BC=7$ см, $AC=5$ см. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Найдите площадь $\triangle ADC$.

10. Решите уравнение $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3\dfrac{x}{3}}+2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

Решения

1. Так как $\sqrt[5]{3}=\sqrt[20]{81}$, $\sqrt[4]{2}=\sqrt[20]{32}$ и $\sqrt[20]{81}>\sqrt[20]{32}$, следует, что $\sqrt[5]{3}>\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[5]{3}-\sqrt[4]{2}>0$.

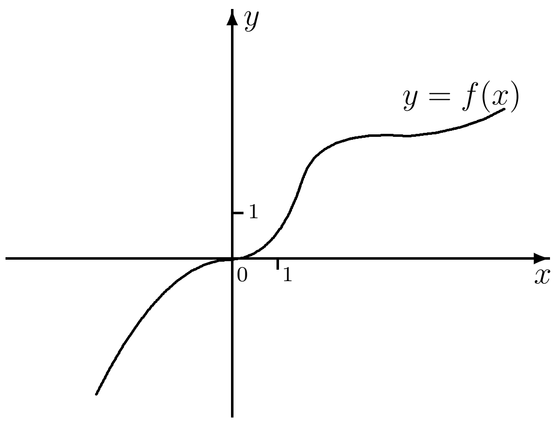
Ответ: $\sqrt[5]{3}-\sqrt[4]{2}>0$.

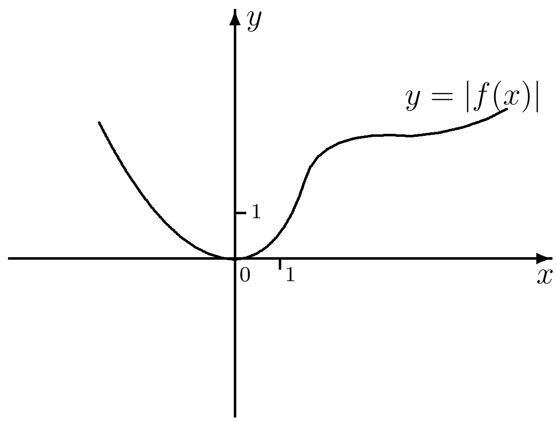
2. Точка $M(a;1)$ принадлежит эллипсу с уравнением $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Следовательно,

$$\frac{a^2}{9}+\frac{1}{4}=1, \quad \text{откуда} \quad a^2=\frac{27}{4} \quad \text{и} \quad a=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $a \in \left\{\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3. Для того, чтобы построить график функции $y=|f(x)|$, достаточно все части графика $y=f(x)$, для которых $y \geq 0$, оставить без изменения, а части графика, для которых $y<0$, отобразить симметрично относительно оси OX.

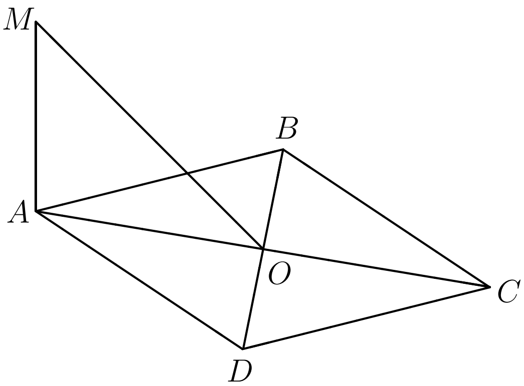




4. Поскольку $-\sqrt{3}<-1$ и $e<3$, следует, что $[-\sqrt{3},e)\bigcap\mathbb{Z}=\{-1;0;1;2\}$.
Ответ: $\{-1;0;1;2\}$.

5. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 3^{x+y}=9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1, \\ 3^{x+y}=3^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1, \\ x+y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$
Ответ: $(-1;3)$.

6.



Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба. Так как $MA\perp AO$, $AO\perp BD$ (диагонали ромба перпендикулярны), следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $MO\perp BD$, тогда расстояние от точки M до прямой BD равно длине отрезка MO.

Поскольку $\angle BAD=180^o-\angle ABC=60^o$, $AB=AD=6$ см, следует, что треугольник ABD – равносторонний, и $BD=6$ см. Тогда $BO=\dfrac{1}{2}BD$, $BO=3$ см (высота AO в

$\triangle ABD$ является и медианой). Из $\triangle ABO$, прямоугольного в точке O, по теореме Пифагора найдем AO:

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27},$$

а из $\triangle MAO$, прямоугольного в точке A, по теореме Пифагора найдем MO:

$$MO = \sqrt{MA^2 + AO^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6(\text{см}).$$

Ответ: 6 см.

7. $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ 2Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2X = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ Y = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ Y = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}. \end{cases}$

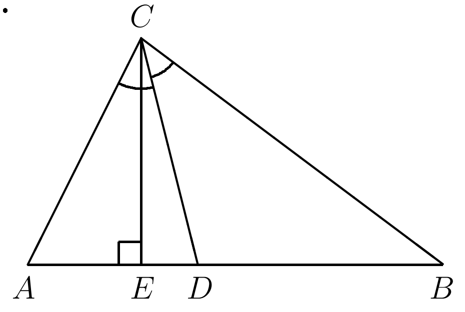
8. Найдем производную функции f: $f'(x) = \left(\dfrac{mx^2 + (m-1)x}{x+1}\right)' =$
$= \dfrac{[2mx + (m-1)](x+1) - [mx^2 + (m-1)x] \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{mx^2 + 2mx + m - 1}{(x+1)^2},$

$$f'(-2) = \frac{4m - 4m + m - 1}{(-2+1)^2} = m - 1.$$

Для того, чтобы $x = -2$ была точкой экстремума, необходимо: $f'(-2) = 0$, откуда $m = 1$. При $m = 1$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $f''(-2) = -2 < 0$, то есть $x = -2$ является точкой максимума.

Ответ: $x = -2$ является точкой экстремума для функции f при $m = 1$.

9.



Пусть $CE \perp AB$, $CE = h$ – высота в $\triangle ABC$ (как и в $\triangle ACD$).

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE.$$

Используя свойство биссектрисы $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DB}{BC}$, вычислим AD: $AD=\dfrac{DB\cdot AC}{BC}$. Обозначим $AD=x$, тогда $DB=6-x$ и получим уравнение:

$$x=\frac{(6-x)\cdot 5}{7},$$

откуда $x=\dfrac{5}{2}$. Таким образом, $AD=\dfrac{5}{2}$ (см).

По формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр, a,b,c – стороны треугольника, найдем площадь $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{5+6+7}{2}\cdot\frac{5+6-7}{2}\cdot\frac{5+7-6}{2}\cdot\frac{6+7-5}{2}}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=6\sqrt{6}\ (\text{см}^2).$$

Так как $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE$, следует, что $CE=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}=\dfrac{2\cdot 6\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$ (см).

Тогда, $S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot CE=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 2\sqrt{6}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ (см^2).

Ответ: $S=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ см^2.

10. Область допустимых значений (сокращенно *ОДЗ*) найдем из соотношений:

$$\begin{cases} x>0,\\ \sqrt{x}>0,\\ \dfrac{x}{3}>0,\\ \log_3\dfrac{x}{3}\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\\ \dfrac{x}{3}\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,\\ x\neq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(0;3)\cup(3;+\infty).$$

В *ОДЗ* получаем

$$\frac{\log_3 x-1}{\log_3\dfrac{x}{3}}+2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_3 x-1}{\log_3 x-1}+2\cdot\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3^2 x=3 \quad\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\quad \log_3^2 x+\log_3 x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_3 x=-2,\\ \log_3 x=1,\end{array}\right.$ откуда $x=3^{-2}\in$ *ОДЗ* и $x=3^1\notin$ *ОДЗ*.

Ответ: $x=\dfrac{1}{9}$.

Оценочная схема

Максимальное число баллов
N 1 — 3 балла
N 2 — 4 балла
N 3 — 2 балла
N 4 — 2 балла
N 5 — 4 балла
N 6 — 5 баллов
N 7 — 4 балла
N 8 — 5 баллов
N 9 — 5 баллов
N 10 — 6 баллов
всего: 40 баллов

Оценка
"10" — 39-40 баллов
"9" — 36-38 баллов
"8" — 31-35 баллов
"7" — 24-30 баллов
"6" — 18-23 балла
"5" — 13-17 баллов
"4" — 9-12 баллов
"3" — 5-8 баллов
"2" — 2-4 балла
"1" — 0-1 балл