Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2000
Гуманитарный профиль

Время: 180 минут.

1. Вычислить

$$4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0,8)^{3,5}.$$

(7 очков)

2. Определить множество значений функции $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. (7 очков)

3. Найдите уравнение второго порядка с действительными коэффициэнтами, если известно что одним из его корней является $1 + i$. (7 очков)

4. В треугольнике ABC точка $M \in (BD)$, (BD) - медиана. Доказать что площадь треугольника ABM равна площади треугольника CMD. (10 очков)

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1, \\ x + 4y + z = 2, \\ x + y + 4z = 3. \end{cases}$$

(12 очков)

6. Написать уравнение касательной к графику функции $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 1}$ в точке пересечения графика функции с осью ординат. (13 очков)

7. Решить неравенство $(0,4)^{1-x} \geq (2,5)^{\frac{2}{x}}$. (14 очков)

8. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр, равный a, на боковое ребро пирамиды. Найти объем пирамиды, если известно, что угол образованный перпендикуляром и высотой пирамиды, равен α. (15 очков)

9. При каких значениях действительного параметра a, уравнение $\dfrac{a(x+2)+1}{x-3} = 5$, имеет корень, больший чем 2. (15 очков)

Решения

1. Используя свойства показательной функции, получим

$$4^{2,5} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot (0,8)^{3,5} = \left(2^2\right)^{2,5} - \left(3^{-2}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3,5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3,5} =$$

$$= 2^5 - 3^3 + \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right)^{3,5} = 32 - 27 + 1 = 6.$$

2. Выделяем полный квадрат

$$-x^2 + 5x - 3 = -(x^2 - 5x) - 3 = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) - 3 =$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Поскольку $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 \geq 0$, область значений данной функции есть множество $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$.

3. Поскольку комплексное число $z = 1+i$ есть корень уравнения

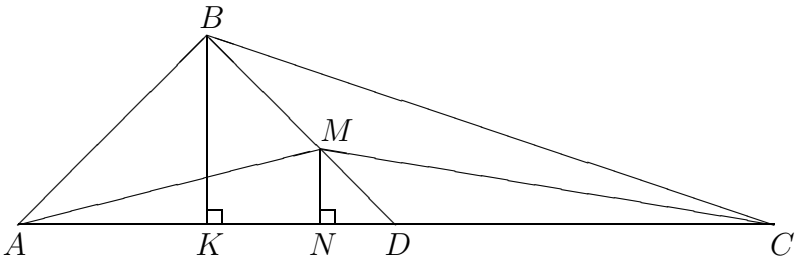
$$x^2 + px + q = 0, \qquad \{p, q\} \subset \mathbf{R} \tag{1}$$

его сопряженное число, $z = 1-i$, также есть корень уравнения (1). Используя теорему Виета, получим

$$-p = (1+i) + 1 - i = 2,$$
$$q = (1+i)(1-i) = 2,$$

и искомое уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$.

4.



Пусть BK – высота в $\triangle ABC$, $BK \perp AC$. Тогда ($AD = DC$)

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK \tag{2}$$

Аналогично

$$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MN \tag{3}$$

(MN – высота в $\triangle AMC$, $MN \perp AC$).

Поскольку

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AMD},$$
$$S_{\triangle BMC} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle MDC},$$

используя равенства (2), (3) получим $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CMB}$.

5. Используем правило Крамера решения систем линейных уравнений.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 54 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36.$$

Согласно правилу Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{3}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{3}.$$

Замечание. Система может быть решена и методом Гаусса.

6. Найдем точку пересечения графика функции с осью ординат

$$f(0) = \frac{2}{-1} = -2.$$

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 находится по формуле

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4}$$

Так как

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^2 + 2}{-2 - 1} = -\frac{14}{3},$$

$$f'(x) = \frac{6x(x-1) - (3x^2+2)}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x-1)^2}, \quad f'(-2) = \frac{22}{9},$$

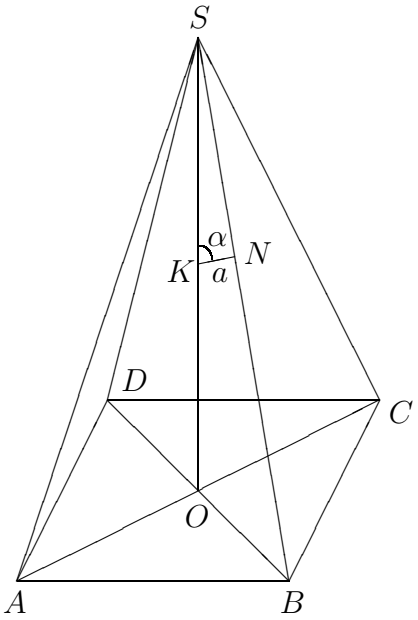
следует, что

$$y = -\frac{14}{3} + \frac{22}{9}(x+2) = \frac{22}{9}x + \frac{2}{9}.$$

7. $(0,4)^{1-x} \geq (2,5)^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow x - 1 \geq \frac{2}{x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{x} \geq 0$, откуда используя метод интервалов получим

$$x \in [-1, 0) \cup [2, +\infty).$$

8. Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида ($ABCD$ – квадрат), $h = SO$ – высота пирамиды, основание которой находится в точке O – центр квадрата $ABCD$. $SK = KO$ и $KN \perp SB$, $\angle SKN = \alpha$, $KN = a$.



Из прямоугольного треугольника SKN следует, что $\frac{h}{2} = SK = \frac{KN}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$, откуда $h = \frac{2a}{\cos\alpha}$.

Из прямоугольного треугольника SOB ($\angle OSB = 90^\circ - \alpha$) находим

$$OB = SO\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin\alpha}.$$

Поскольку $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OB^2$ и площадь основания пирамиды $S = 4S_{\triangle AOB}$, получим $S = 2OB^2 = \frac{8a^2}{\sin\alpha}$ и объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\frac{8a^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{2a}{\cos\alpha} = \frac{16a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}(\text{куб.ед.})$$

9. Область допустимых значений (*ОДЗ*) уравнения есть множество $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. В *ОДЗ* уравнение эквивалентно следующему

$$ax + 2a + 1 = 5x - 15$$

или

$$(a-5)x = -2a - 16.$$

Если $a = 5$, уравнение примет вид $0 \cdot x = -26$ и, следовательно, решений не имеет, а если $a \in \mathbf{R} \setminus \{5\}$, получим

$$x = -\frac{2a+16}{a-5}.$$

Учитывая *ОДЗ*

$$-\frac{2a+16}{a-5} \neq 3,$$

получим $-2a-16 \neq 3a-15$ и $a \neq -\dfrac{1}{5}$.

Для $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}; 5\right\}$ решим неравенство

$$-\frac{2a+16}{a-5} > 2.$$

Используя метод интервалов, получим

$$2+\frac{2a+16}{a-5} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4a+6}{a-5} < 0 \;\Leftrightarrow\; a \in \left(-\frac{3}{2}; 5\right).$$

Учитывая что $a \neq -\dfrac{1}{5}$, получим ответ

$$a \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 5\right).$$