Министерство Образования и Науки
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 10 июня 1999
Профиль: математика

1. Вычислить

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right).$$

(3 очка)

Решение. Неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведя к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9-27}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-18}{(x-3)(x^2+33x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3x+9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}.$$

2. Привести пример функции, которая определена и непрерывна на открытом интервале (a,b), но которая неограничена на этом интервале. (3 очка)

Решение.

$$f:(a,b)\longrightarrow \mathbf{R} \qquad f(x)=\frac{1}{x-a}.$$

Действительно,

$$f\in C((a,b)) \text{ и } \lim_{x\to a+0}f(x)=+\infty.$$

3. Пусть $z=1+i$. Определить действительные числа $a,b\in\mathbf{R}$, если известно, что $z^3=az+b$. (4 очка)

Решение. Используя определение равенства двух комплексных чисел, получим

$$(1+i)^3=az+b \;\Leftrightarrow\; 1+3i+3i^2+i^3=a(1+i)+b \;\Leftrightarrow\; 1+3i-3-i=a+b+ai \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -2-2i=(a+b)+ai \;\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2,\\ a=2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2,\\ b=-4.\end{cases}$$

4. Вычислить определенный интеграл

$$I=\int_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx.$$

(5 очков).

Решение. Заметим, что подинтегральная функция четная и, следовательно, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$. Поскольку для $x\in[0;1]$ имеем $2^x-2^{-x}\geq 0$, то получим

$$\int_{-1}^{1}|2^x-2^{-x}|dx=2\int_{0}^{1}(2^x-2^{-x})dx=2\left[\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{\ln 2}.$$

5. Решить уравнение

$$3 + 4|\cos x| = b \cos 2x,$$

если известно, что $\dfrac{2\pi}{3}$ является одним из его решений. (6 очков)

Решение. Так как $x = \dfrac{2\pi}{3}$ есть решение уравнения, следует, что

$$3 + 4|\cos \frac{2\pi}{3}| = b \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \text{или} \quad 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = b\left(-\frac{1}{2}\right),$$

откуда $b = -10$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$3 + 4|\cos x| = -10 \cos 2x \;\Leftrightarrow\; 10(2\cos^2 x - 1) + 4|\cos x| + 3 = 0.$$

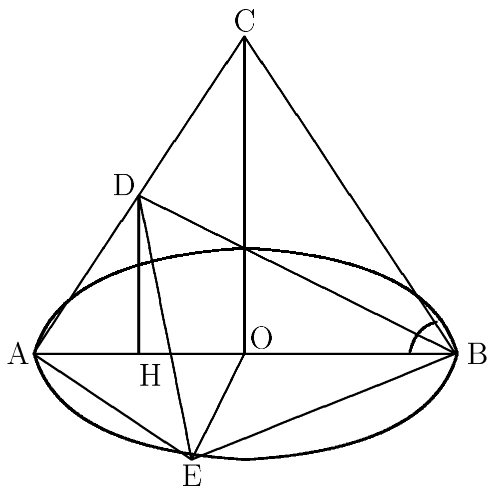
Положив $t = |\cos x|$, (тогда $\cos^2 x = t^2$), получим квадратное уравнение

$$20t^2 + 4t - 7 = 0,$$

решения которого $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{-7}{10}$. Поскольку $t \in [0;1]$, остается $t = \dfrac{1}{2}$. Таким образом,

$$|\cos x| = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \pm\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. \qquad n, k \in \mathbf{Z}.$$

6. Высота прямого кругового конуса равна 6см, а его образующая образует угол в 60° с плоскостью основания. В конусе размещена пирамида, основание которой - прямоугольный равнобедренный треугольник, вписанный в основание конуса, а вершина пирамиды находится на середине одной из образующих конуса. Найти объем пирамиды. (5 очков)



Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle COB$ ($CO \perp OB$). Так как $\angle CBO = 60^\circ$ (из условий), используя метрические соотношения в треугольнике, получим: $OB = CO \cdot \mathrm{ctg}(\angle CBO) = 6\,\mathrm{ctg}\,60^\circ = 2\sqrt{3}$(см). Таким образом, гипотенуза AB прямоугольного треугольника AEB (в то же время диаметр окружности радиуса OB) равна $AB = 2OB = 4\sqrt{3}$(см), а площадь $\triangle AEB$ (и площадь основания пирамиды).

$$S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AB \cdot EO = \frac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12(\text{см}^2).$$

Высота пирамиды DH является средней линией в $\triangle AOC$, и, следовательно, равна половине OC, $DH = \frac{1}{2}OC = 3$см. Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle AEB} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 3 = 12(\text{см}^3).$$

7. Прямая $x + y - 4 = 0$ является касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b \in (0, 3)$. Определить значение b и координаты точки касания прямой и эллипса. (6 очков)

Решение. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) есть

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

или, в данном случае

$$\frac{x_0 x}{9} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

откуда

$$y = -\frac{x_0 b^2}{9 y_0} x + \frac{b^2}{y_0}.$$

Из условия $(y = -x + 4)$ следует

$$\begin{cases} -\dfrac{x_0}{9} \cdot \dfrac{b^2}{y_0} = -1, \\ \dfrac{b^2}{y_0} = 4, \end{cases}$$

откуда $x_0 = \frac{9}{4}$. Поскольку $y_0 = 4 - x_0 \;\Rightarrow\; y_0 = \frac{7}{4}$, используя уравнение эллипса находим b

$$\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} + \frac{49}{16b^2} = 1,$$

откуда $9b^2 + 49 = 16b^2$, или $b^2 = 7$, $b = \pm\sqrt{7}$, и, поскольку $b \in (0, 3)$, получим

$$b = \sqrt{7}.$$

Таким образом $b = \sqrt{7}$, а точка касания $M\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

8. Определить член разложения бинома $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^n$, который не содержит b^2, если известно, что n - это наибольшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0.$$

(7 очков)

Решение. Исходное неравенство равносильно следующему

$$-\log_3 n + \frac{\log_3 n}{\log_3 n - 1} > 0.$$

Обозначив $\log_3 n = t$, получим

$$\frac{t(2-t)}{t-1} > 0.$$

Учитывая что $t > 0$, из последнего неравенства получим

$$1 < \log_3 x < 2 \;\Leftrightarrow\; 3 < n < 9.$$

Поскольку $n \in \mathbf{N}$ и является наибольшим из интервала (3;9), следует, что $n = 8$. Общий член разложения T_{k+1} имеет вид

$$T_{k+1} = C_8^k a^{\frac{8-k}{2}} b^{\frac{k}{3}},$$

откуда $\dfrac{k}{3} = 2$, или $k = 6$. Таким образом, $T_7 = C_8^6 ab^2 = 28ab^2$.

9. Рассмотрим функцию

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}, \quad D \subset \mathbf{R}$$

такую, что

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + 3x + b^2}.$$

Найти такие a, b, чтобы значения функции в точках экстремума равнялись -1 и -2. (8 очков)

Решение. Находим критические точки

$$f'(x) = a\frac{(x^2+3x+b^2) - x(2x+3)}{(x^2+3x+b^2)^2} = a\frac{b^2 - x^2}{(x^2+3x+b^2)^2}.$$

Следовательно, $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; b^2 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm b$.

Заметим, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ (в противном случае нарушаются условия задачи) и в окрестностях точек $x = \pm b$ производная меняет знак. Следовательно, точки $x = -b$ и $x = b$ являются точками экстремума.

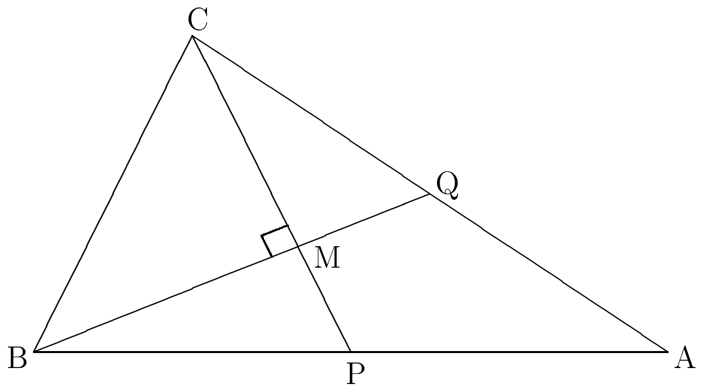
Получим следующую совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(b) = -1, \\ f(-b) = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} f(b) = -2, \\ f(-b) = -1, \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{a}{2b+3} = -1, \\ \dfrac{-a}{b2-3} = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{a}{2b+3} = -2, \\ \dfrac{-a}{2b-3} = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы получим $a = -4$, $b = \dfrac{1}{2}$, а из второй $a = -4$, $b = -\dfrac{1}{2}$. В обоих случаях функция f равна

$$f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 3x + \frac{1}{4}}.$$

10. Пусть $\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник с прямым углом C. Медиана CP перпендикулярна медиане BQ, а сторона BC равна a. Вычислить длину медианы BQ. (8 очков)



Решение. Пусть $\angle CBA = \alpha$. Тогда $\angle BAC = 90^\circ - \alpha$. Поскольку $CP = \dfrac{1}{2}AB = BP = PA$, следует $\angle BCP = \alpha$ и $\angle ACP = 90^\circ - \alpha$. Из прямоугольного треугольника CMQ получим $\angle CQB = \alpha$. Таким образом, $\triangle CBQ \sim \triangle ABC$, откуда

$$\frac{BQ}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{CQ}{BC}.$$

Так как $CQ = \dfrac{1}{2}AC$ (BQ - медиана) следует

$$\frac{a}{AC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{a},$$

откуда $AC = a\sqrt{2}$. Используя теорему Пифагора, получим $AB^2 = a^2 + 2a^2$, или $AB = a\sqrt{3}$. Таким образом,

$$\frac{BQ}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad BQ = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$