Министерство просвещения и молодежи Республики Молдова
Агенство оценивания знаний и организации экзаменов
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 13 июня 2008
Реальный профиль

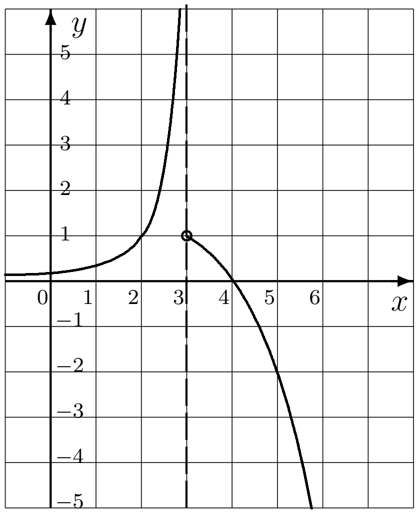
Время работы: 180 минут.

I. В заданиях 1-3 запишите ответы на поставленные вопросы в отведенных местах.

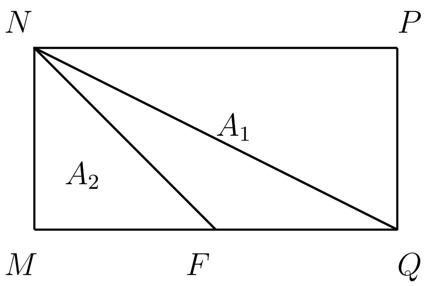
1. На рисунке представлен график функции $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \boxed{}$$



2. В прямоугольнике $MNPQ$ точка F – середина отрезка MQ. Если площадь трапеции $NPQF$ равна A_1, а площадь треугольника MNF равна A_2, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \boxed{}$.



3. Выражение $E=\sqrt{1-\sin x}$ имеет смысл при $x\in \boxed{}$.

II. В заданиях 4-8 приведите краткие решения и обоснования ответов.

4. Определите истинность высказывания и обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно.

$$\text{"Если } z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}-i},\ \text{то } (z_1+z_2)\in\mathbb{R}.\text{"}$$

Обоснуйте ответ.

5. У продавца на рынке из 50 имеющихся арбузов 40 арбузов являются спелыми. Какова вероятность того, что купив любые 2 арбуза у этого продавца, вы купите оба арбуза спелые?

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+9) > -2$.

7. Заполните пустую рамку одним из знаков " $>$ " , " $<$ " , " $=$ " так, чтобы высказывание стало истинным.

$$\text{"Если } A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x+1},\quad B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}x dx,\quad \text{то } A\boxed{}B.\text{"}$$

Обоснуйте ответ.

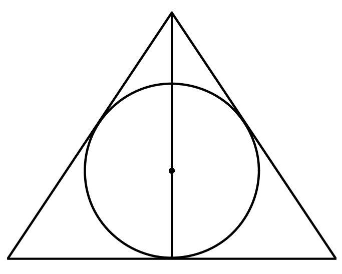
8. Найдите координаты основания перпендикуляра, проведенного из точки $A(-1;2)$ на прямую $l: 3x-5y-21=0$.

III. Решите задачи 9-12 и запишите полное их решение.

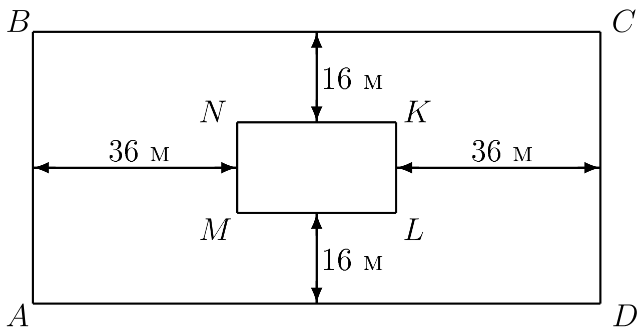
9. Найдите действительные значения параметра m, при которых решения уравнения $x^3+4x^2+m=0$ удовлетворяют условию $x_3 = x_1 + x_2$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $|3^x-3|+3^{2x}=3$.

11. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Найдите отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.



12. Для постройки здания больницы, фундамент которого должен иметь форму прямоугольника $MNKL$ площадью 400 м^2, требуется участок земли в виде прямоугольника $ABCD$, границы которого должны отстоять от строения на 36 м и 16 м (смотрите рисунок). Найдите длину и ширину фундамента здания, при которых площадь участка $ABCD$ будет наименьшей.



Решения

1. $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 1$.

2. $\dfrac{A_1}{A_2} = 3$.

3. $x \in \mathbb{R}$.

4. **Л**, поскольку $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{4(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \sqrt{3}+i$; $z_1 + z_2 = -\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i = 2i \notin \mathbb{R}$.

5. Используя формулу классической вероятности $p = \dfrac{m}{n}$, где m – число благоприятных случаев, n – общее число случаев, получим:

$$n = C_{50}^2 = \frac{50!}{2!48!} = \frac{50\cdot 49}{2};\quad m = C_{40}^2\cdot C_{10}^0 = \frac{40!}{2!38!}\cdot 1 = \frac{40\cdot 39}{2};\quad p = \frac{\frac{40\cdot 39}{2}}{\frac{50\cdot 49}{2}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{39}{49} = \frac{156}{245}.$$

Ответ: $\dfrac{156}{245}$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 9) > -2 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 > -2 \;\Leftrightarrow\; -2\log_3|x-3| > -2 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; \log_3|x-3| < 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} |x-3| < 3, \\ |x-3| > 0, \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} -3 < x-3 < 3, \\ x \neq 3, \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} 0 < x < 6, \\ x \neq 3, \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; x \in (0;3)\cup(3;6)$.

Ответ: $S = (0;3)\cup(3;6)$.

7. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2}\ln 2$,

$B = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$, следовательно,

$A = B$.

8. Угловой коэффициент прямой $l : 3x - 5y - 21 = 0$ равен $m_1 = \dfrac{3}{5}$. Угловой коэффициент перпендикуляра $m_2 = -\dfrac{5}{3}$ (согласно условию перпендикулярности прямых $m_1 \cdot m_2 = -1$).

Уравнение перпендикуляра $y - 2 = -\dfrac{5}{3}(x + 1)$ или $3y - 6 = -5x - 5$, $5x + 3y - 1 = 0$.

Находим координаты основания перпендикуляра из системы:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 21 = 0, \\ 5x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5, а второе на (-3), и сложив, получим:

$$-34y - 102 = 0, \quad \text{откуда} \quad y = -3.$$

Тогда $5x + 3 \cdot (-3) - 1 = 0$, $5x = 10$ и $x = 2$.

Таким образом, координаты основания перпендикуляра: $(2; -3)$.

Ответ: $(2; -3)$.

9. По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = -m, \end{cases}$$

кроме того, $x_1 + x_2 = x_3$. Из этого уравнения и первого отношения получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 = x_3, \end{cases}$$

откуда $2x_3 = -4$ и $x_3 = -2$.

Поскольку $x_3 = -2$ является решением уравнения, то

$$(-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + m = 0,$$

$$-8 + 16 + m = 0,$$

$$m + 8 = 0,$$

$$m = -8.$$

Ответ: $m = -8$.

10. $|3^x - 3| + 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ -3^x + 3 + 3^{2x} = 3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ 3^x - 3 + 3^{2x} = 3 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ 3^{2x} - 3^x = 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \in (1; +\infty) \\ 3^{2x} + 3^x - 6 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \\ 3^x(3^x-1)=0 \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1; +\infty) \\ (3^x-2)(3^x+3)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \\ 3^x=1 \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} 3^x-2=0 \\ 3^x+3=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \\ x=0 \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} 3^x=2 \\ 3^x=-3 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left\{\begin{array}{l} x \in (1; +\infty) \\ x=\log_3 2<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x=0.$$

Ответ: $S=\{0\}$.

11. Пусть a – сторона равностороннего треугольника из осевого сечения конуса, R_c – радиус основания конуса, H_c – высота конуса, r – радиус шара. Тогда

$$R_c=\frac{a}{2}; \qquad H_c=\frac{a}{2}\text{tg}60^o=\frac{a}{2}\sqrt{3}; \qquad r=\frac{a}{2}\text{tg}30^o=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Находим объем конуса:

$$V_c=\frac{1}{3}\pi R_c^2 H_c=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

Находим объем шара:

$$V_s=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^3}{8\cdot 3\cdot\sqrt{3}}=\frac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}.$$

Находим отношение объемов:

$$\frac{V_c}{V_s}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi a^3}=\frac{3\cdot 3}{4}=\frac{9}{4}.$$

Ответ: $\frac{9}{4}$.

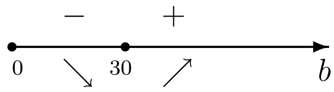
12. Пусть $a=|MN|$, $b=|ML|$. Согласно условиям A=400 м^2, то есть $ab=400$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна

$$S=(36+36+b)(16+16+a)=(72+b)(32+a).$$

Имеем $a=\frac{400}{b}$ и $S=(72+b)\left(32+\frac{400}{b}\right)$. Исследуем функцию S на минимум:

$$S'=32+\frac{400}{b}+(72+b)\left(-\frac{400}{b^2}\right)=32-\frac{72\cdot 400}{b^2}=32\left(1-\frac{18\cdot 50}{b^2}\right)=32\left(1-\frac{900}{b^2}\right);$$

$$S'=0 \ \Rightarrow \ 32\left(1-\frac{900}{b^2}\right)=0 \ \Leftrightarrow \ \frac{b^2-900}{b^2}=0, \text{ откуда } b=\pm 30.$$



Таким образом, $b_{min} = 30$ и $a = \dfrac{400}{30} = \dfrac{40}{3}$.

Ответ: ширина $\dfrac{40}{3}$ м, длина 30 м.

Оценочная схема

Максимальное число баллов

N 1 — 2 балла
N 2 — 2 балла
N 3 — 2 балла
N 4 — 4 балла
N 5 — 5 баллов
N 6 — 5 баллов
N 7 — 6 баллов
N 8 — 7 баллов
N 9 — 7 баллов
N 10 — 8 баллов
N 11 — 8 баллов
N 12 — 8 баллов
всего: 64 балла

Оценка

"10" — 62-64 балла
"9" — 57-61 балл
"8" — 50-56 баллов
"7" — 39-49 баллов
"6" — 30-38 баллов
"5" — 17-29 баллов
"4" — 14-16 баллов
"3" — 9-13 баллов
"2" — 5-8 баллов
"1" — 0-4 балла