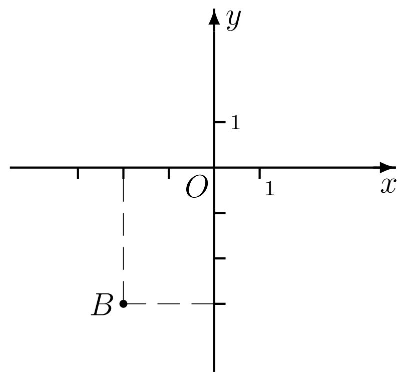
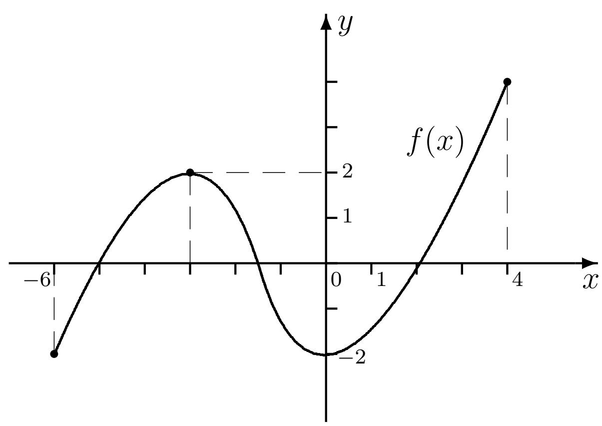
Министерство просвещения Республики Молдова
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2 июня 2003
Реальный профиль

Время работы: 180 минут.

1. Запишите в алгебраической форме комплексное число z, геометрической интерпретацией которого служит точка B.



2. На рисунке представлен график функции $f : [-6; 4] \longrightarrow \mathbb{R}$. При каких значениях $a \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = a$ имеет три различных действительных корня?



3. Запишите уравнение окружности с диаметром AB, где $A(3; 2)$, $B(-1; 6)$.

4. Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что два раза выпадет "орел"?

5. Девятый член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ не содержит x. Вычислите A_n^2.

6. Вычислите $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Решите неравенство $(\sin 2)^{x^2-x} \geq \sin^2 2$.

8. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найдите площадь его боковой поверхности.

9. Найдите корни многочлена $P(X) = X^3 + 2aX^2 - 5X - a - 9$, $a \in \mathbb{R}$, если известно, что остаток от деления $P(X)$ на двучлен $(X-2)$ равен остатку от деления $P(X)$ на двучлен $X+1$.

10. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $f : [\sqrt{5}; \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $M(3; 2)$.

11. Решите уравнение $\log_2(x^2-x+b)=\log_2(-3x+b)$ для всех значений действительного параметра b.

12. В треугольнике ABC медиана $AM(M\in(BC))$ перпендикулярна медиане $BN(N\in(AC))$. Найдите площадь треугольника, если $AM=a,\ BN=b$.

Решения

1. Поскольку геометрическим представлением комплексного числа $z=a+bi$ является точка $B(a;b)$, и B имеет координаты $(-2;-3)$, следует, что $z=-2-3i$.

Ответ: $z=-2-3i$.

2. Уравнение $f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$ имеет три различных действительных корня при $a\in(-2;2)$, так как только при этих значениях параметра a прямая $y=a$ пересекает график функции $f(x)$ в трех различных точках.

Ответ: $a\in(-2;2)$.

3. Так как AB является диаметром, координаты середины этого отрезка являются координатами центра окружности. Используя формулы для вычисления координат $(x_0;y_0)$ середины отрезка, соединяющего точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

получим $x_0=1$ и $y_0=4$.

Применив формулу для нахождения расстояния между двумя данными точками $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$

$$d(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

вычислим длину диаметра AB:

$$d=\sqrt{(-3-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}.$$

Поскольку радиус окружности R равен половине диаметра, следует, что $R=2\sqrt{2}$. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0;y_0)$ имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Подставляя $x_0=1$, $y_0=4$ и $R=2\sqrt{2}$, получим $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

Ответ: $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

4. Используем биномиальную схему (Бернулли):

$$p_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},$$

где n – число независимых испытаний;

k – число исходов, благоприятствующих событию A $(0\le k\le n)$;

p – вероятность реализации события A в каждом отдельном испытании (одинакова для всех испытаний);

$q=1-p$;

$p_n(k)$ – вероятность реализации события A ровно k раз в n независимых испытаниях.

Вероятность выпадения "орла" p в каждом из трех ($n=3$) подбрасываний (независимых испытаний) одинакова и равна $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$p_3(2)=C_3^2p^2q^{3-2}=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}.$$

Ответ: $p_3(2)=\frac{3}{8}$.

5. Применяя формулу для $(k+1)$-ого члена разложения бинома $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$, получим:

$$T_9=T_{8+1}=C_n^8\ (\sqrt[3]{x})^{n-8}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8=C_n^8\ x^{\frac{n-8}{3}}x^{-4}=C_n^8\ x^{\frac{n-20}{3}}.$$

Поскольку девятый член не содержит x, то $\frac{n-20}{3}=0$, откуда $n=20$. Следовательно,

$$A_n^2=A_{20}^2=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20!}{18!}=19\cdot 20=380.$$

Ответ: $A_{20}^2=380$.

6. Заметим, что $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=d(\sqrt{1+x^2})$ и, используя формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\limits_0^1 d(\sqrt{1+x^2})=\sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1=\sqrt{2}-1.$$

Ответ: $\int\limits_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1$.

7. Так как $0<\sin 2<1$, функция $(\sin 2)^x$ является убывающей. Следовательно,

$(\sin 2)^{x^2-x}\geq\sin^2 2\ \Leftrightarrow\ x^2-x\leq 2\ \Leftrightarrow\ x^2-x-2\leq 0\ \Leftrightarrow\ (x+1)(x-2)\leq 0\ \Leftrightarrow\ -1\leq x\leq 2$.

Ответ: $x\in[-1;2]$.

8. Пусть h – высота и d – диаметр основания цилиндра. Так как осевое сечение цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами h и d, имеем $Q=\pi dh$. Поскольку площадь боковой поверхности цилиндра $S_{lat.}=dh$ и $dh=Q$, получим $S_{lat.}=\pi Q$.

Ответ: $S_{lat.}=\pi Q$.

9. Применив теорему Безу, получаем равенство $P(2)=P(-1)$, то есть

$$8+8a-10-a-9=-1+2a+5-a-9,$$

откуда $a=1$. Следовательно, $P(X)=X^3+2X^2-5X-10$. Корни многочлена $P(X)$ найдем, решая уравнение $P(X)=0$.

$X^3+2X^2-5X-10=0\ \Leftrightarrow\ (X^3-5X)+(2X^2-10)=0\ \Leftrightarrow\ X(X^2-5)+2(X^2-5)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (X^2-5)(X+2)=0\ \Leftrightarrow\ (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})(X+2)=0,$
откуда $X_1=\sqrt{5},\ X_2=-\sqrt{5},\ X_3=-2.$

Ответ: корнями многочлена $P(X)$ являются $-\sqrt{5},-2,\sqrt{5}$.

10. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$ имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

В данном случае $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5}},\ f'(3)=\dfrac{3}{2},$ тогда уравнение касательной к графику функции f в точке $M(3;2)$

$$y=\frac{3}{2}(x-3)+2 \qquad \text{или} \qquad y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}.$$

Найдем координаты вершин треугольника, образованного биссектрисами координатных углов ($y=x$ и $y=-x$) и касательной к графику функции f, решая системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}, \\ y=x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}, \\ y=-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x, \\ y=-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Применив формулу для нахождения площади треугольника, вершинами которого являются $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2),C(x_3;y_3)$:

$$S=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\,\right|$$

получим

$$S=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{2}\Big|-5-5\Big|=\frac{1}{2}\Big|-10\Big|=\frac{1}{2}\cdot 10=5.$$

Ответ: $S=5$ (кв.ед.).

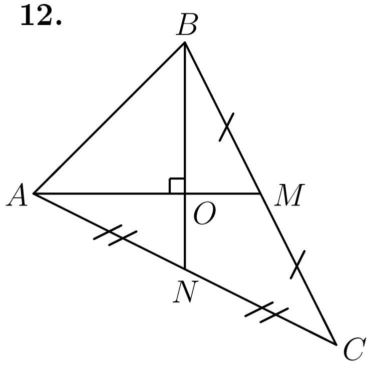
11. $\log_2(x^2-x+b)=\log_2(-3x+b)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x^2-x+b=-3x+b, \\ -3x+b>0, \end{cases}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=0, \\ x<\frac{b}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x<\frac{b}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ x<\frac{b}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ x<\frac{b}{3}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ b>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ b>-6, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \varnothing, \\ b \in (-\infty; -6], \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ b \in (-6; 0], \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \end{array} \right. \\ b \in (0; +\infty). \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $S = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } b \in (-\infty; -6]; \\ \{-2\}, & \text{если } b \in (-6; 0]; \\ \{-2; 0\}, & \text{если } b \in (0; +\infty). \end{cases}$

12.



Пусть $\{AM\} \bigcap \{BN\} = \{O\}$. Так как $BN \perp AM$ и $AO = \dfrac{2}{3}a$ (медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины), $S_{\triangle ABN} = \dfrac{1}{2} BN \cdot AO = \dfrac{1}{2} b \cdot \dfrac{2}{3} a = \dfrac{ab}{3}$. Поскольку $S_{\triangle ABC} = 2 S_{\triangle ABN}$ (свойство медианы), следует, что

$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{ab}{3} = \frac{2ab}{3} (\text{кв. ед.})$$

Ответ: $S = \dfrac{2ab}{3}$ (кв. ед.).

Оценочная схема

Максимальное число баллов

N 1 — 3 балла
N 2 — 3 балла
N 3 — 3 балла
N 4 — 4 балла
N 5 — 5 баллов
N 6 — 5 баллов
N 7 — 5 баллов
N 8 — 4 баллов
N 9 — 7 баллов
N 10 — 8 баллов
N 11 — 8 баллов
N 12 — 6 баллов

всего: 61 балл

Оценка

”10” — 60-61 балл
”9” — 55-59 баллов
”8” — 48-54 балла
”7” — 39-47 баллов
”6” — 30-38 баллов
”5” — 21-29 баллов
”4” — 13-20 баллов
”3” — 6-12 баллов
”2” — 2-5 баллов
”1” — 0-1 балл