Министерство образования Республики Молдова
Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2002
Реальный профиль

Время работы: 180 минут.

1. Определите истинность высказывания "$(\forall)x \in \mathbb{R},\ \ x^2+9-6x>0$".

2. Вычислите $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^2$.

3. Постройте в одной системе координат графики функций $f, g : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, для которых выполняются условия $f(x) < g(x)$ и $f'(x) > g'(x)$.

4. Найдите расстояние от центра окружности $x^2+y^2+6x+10y-135=0$ до начала координат.

5. При каких действительных значениях x и y числа $z_1 = x^2+4y-yi$ и $z_2 = 4+y-\dfrac{2}{i}-x^2i$ будут сопряженными?

6. Решите уравнение $\sqrt{\log_3(9x-3)} = \log_3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

7. Найдите интервалы монотонности функции $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}$.

8. Отношение площади основания конуса к площади его осевого сечения равно π. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

9. Найдите корни многочлена $P(X) = X^3-15X^2+74X-120$, если известно, что один из его корней является средним арифметическим двух других корней.

10. Вокруг трапеции описана окружность. Боковая сторона трапеции образует с большим основанием угол α, а диагональ трапеции образует с этим основанием угол β. Найдите отношение площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

11. Задана функция $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x-x^2$. Найдите действительный параметр m, при котором прямая $y = mx$ делит подграфик функции на две равновеликие части.

12. При каких действительных значениях параметра a уравнение $a(2^x+2^{-x}) = 5$ имеет одно решение?

Решения

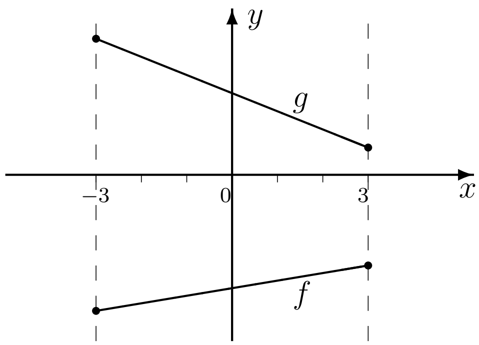
1. Утверждение является ложным. Заметим, что $x^2+9-6x = (x-3)^2$ и для $x = 3$ получим $(x-3)^2 = 0$, следовательно, $\exists\, x,\ \ x = 3 \in \mathbb{R}$, при котором x^2+9-6x не будет строго больше нуля.

2. $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^2 \ = \ 2\log_{2+\sqrt{3}}|2-\sqrt{3}| \ = \ 2\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) \ =$

$$= \ 2\log_{2+\sqrt{3}}\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} \ = \ 2\log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{(2+\sqrt{3})} \ = \ 2\log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1} \ =$$

$$= \ -2\log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}) \ = \ -2.$$

3. Например:



Действительно, поскольку g — строго убывающая функция, получим $g'(x) < 0$ и, так как f — строго возрастающая, $f'(x) > 0$, следовательно, $g'(x) < f'(x) \quad (x \in [-3, 3])$.

4. Найдем каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y - 135 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 + 10y + 25) - 25 - 135 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 169.$$

Следовательно, координаты центра окружности $O_1(-3; -5)$. Используя формулу расстояния между двумя данными точками, получим: $d = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (-5 - 0)^2} = \sqrt{34}$.

5. $z_2 = 4 + y - \dfrac{2}{i} - x^2 i = 4 + y - \dfrac{2i}{i^2} - x^2 i = (4 + y) + (2 - x^2)i.$

Так как $z_1 = \overline{z_2}$, то $\begin{cases} Re\, z_1 = Re\, z_2, \\ Im\, z_1 = -Im\, z_2, \end{cases}$ следовательно, $\begin{cases} x^2 + 4y = 4 + y, \\ -y = x^2 - 2, \end{cases}$ откуда $y = 1$ и $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$, $y = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 1$ или $x = -1$, $y = 1$.

6. $\sqrt{\log_3(9x - 3)} = \log_3\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\log_3 3(3x - 1)} = \log_3 \dfrac{(3x - 1)}{3} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3(3x - 1) + 1} = \log_3(3x - 1) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3x - 1) + 1 = (\log_3(3x - 1) - 1)^2, \\ \log_3(3x - 1) - 1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2(3x - 1) - 3\log_3(3x - 1) = 0, \\ \log_3(3x - 1) \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3(3x - 1) = 0, \\ \log_3(3x - 1) = 3, \end{array} \right. \\ \log_3(3x - 1) \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_3(3x - 1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 1 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{28}{3}.$$

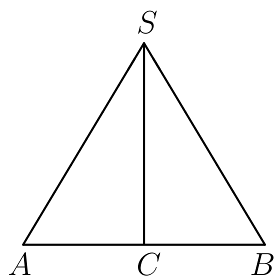
7. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 4 \cdot \left(\left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(x^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{4x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Найдем критические точки функции f: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (заметим, что для $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists\ f'(x)$).

Определим знак производной и интервалы монотонности: для $x < 0$, $f'(x) > 0$, то есть при $x \in (-\infty, 0]$ функция возрастает, для $x > 0$, $f'(x) < 0$, следовательно, при $x \in [0, +\infty)$ функция убывает.

8.



Пусть $BC = AC = r$ — радиус конуса, $SB = l$ — его образующая, $SC = h$ — высота.

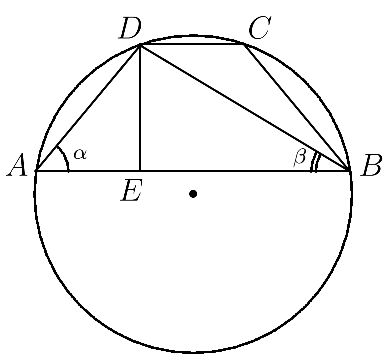
Поскольку площадь основания конуса равна $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, площадь осевого сечения $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = rh$ и $\dfrac{S_{\text{осн.}}}{S_{\triangle SAB}} = \pi$, следует, что $\dfrac{\pi r^2}{rh} = \pi$, то есть $r = h$. Таким образом, прямоугольный треугольник SCB является равнобедренным и, значит, $\angle SBC$ (угол между образующей и основанием конуса) равен 45^o.

9. Используя теорему Виета и условия задания, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 74, \\ x_1x_2x_3 = 120, \\ x_1 + x_3 = 2x_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_2 = 15, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 74, \\ x_1x_2x_3 = 120, \\ x_1 + x_3 = 2x_2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ 5x_1 + x_1x_3 + 5x_3 = 74, \\ x_1x_3 = 24, \\ x_1 + x_3 = 10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ x_1 + x_3 = 10, \\ x_1x_3 = 24, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 6. \end{cases}$$

10.



Так как около трапеции $ABCD$ описана окружность, следует, что трапеция является равнобедренной. Следовательно, $\angle DAB = \angle CBA = \alpha$, $AC = BD$. Тогда $\angle DBC = \alpha - \beta$. Пусть радиус окружность равен R. По теореме синусов получим:

$$CD = 2R\sin(\alpha - \beta)$$

$$AB = 2R\sin(180^o - (\alpha + \beta)) = 2R\sin(\alpha + \beta).$$

Обозначим за $DE = h$ высоту трапеции. Тогда

$$DE = BD\sin\beta = 2R\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

таким образом,

$$S_{\text{трап.}} = \frac{AB+CD}{2}\cdot DE = \frac{2R\sin(\alpha-\beta)+2R\sin(\alpha+\beta)}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot\sin\beta =$$

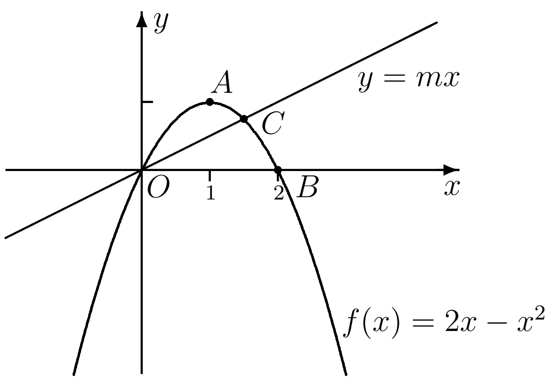
$$= \frac{2R(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))}{2}\cdot 2R\sin\alpha\sin\beta = 2R^2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta =$$

$$= 2R^2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{трап.}}} = \frac{\pi R^2}{2R^2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\beta} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\beta}.$$

11.



Найдем площадь подграфика функции f:

$$S_{OACB} = \int\limits_0^2 (2x-x^2)dx = \left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Найдем абсциссу точки C:

$$2x-x^2 = mx \quad\Rightarrow\quad x^2+(m-2)x = 0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\\ x_2 = 2-m.\end{array}\right.$$

Так как $x_2\in[0,2] \Rightarrow 0\le 2-m\le 2$, откуда $m\in[0,2]$.

Найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2x-x^2$ и $y = mx$:

$$S_{OAC} = \int\limits_0^{2-m}(2x-x^2-mx)dx = \left[\ (2-m)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\ \right]\Big|_0^{2-m} = \frac{(2-m)^3}{2}-\frac{(2-m)^3}{3} = \frac{(2-m)^3}{6}.$$

Поскольку $S_{OAC} = \frac{1}{2}S_{OACB}$, получим $\frac{(2-m)^3}{2} = \frac{2}{3}$, откуда $(2-m)^3 = 4$, $2-m = \sqrt[3]{4}$, то есть, $m = 2-\sqrt[3]{4}$. Заметим, что $m = 2-\sqrt[3]{4}\in[0,2]$, значит, удовлетворяет условиям задания.

Ответ: $m = 2 - \sqrt[3]{4}$.

12. Так как $2^x + 2^{-x} > 0$, следует, что уравнение имеет решения только при $a > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{a}.$$

Поскольку функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2^x + 2^{-x}$ является четной и строго возрастающей, последнее уравнение имеет единственное решение если и только если $x = 0$, откуда $a = \dfrac{5}{2}$.

Оценочная схема

Максимальное число баллов

N 1 — 2 балла
N 2 — 4 балла
N 3 — 4 балла
N 4 — 4 балла
N 5 — 5 баллов
N 6 — 6 баллов
N 7 — 5 баллов
N 8 — 6 баллов
N 9 — 7 баллов
N 10 — 9 баллов
N 11 — 10 баллов
N 12 — 10 баллов
всего: 72 балла

Оценка

"10" — 69-72 балла
"9" — 63-68 баллов
"8" — 54-62 балла
"7" — 42-53 балла
"6" — 31-41 балл
"5" — 23-30 баллов
"4" — 15-22 балла
"3" — 7-14 баллов
"2" — 2-6 баллов
"1" — 0-1 балл