**Министерство Образования и Науки**
**Экзамен по математике на соискание звания бакалавра, 2001**
**Технический профиль**

Время работы: 180 минут.

**1.** Между какими последовательными целыми числами находится число $\log_{\frac{1}{7}} 143$?

**2.** Привести пример функции, которая не определена в точке $x = 3$, но имеет конечный предел в этой точке.

**3.** Определите четвертый член в разложении бинома $\left(\sqrt{2x} - \dfrac{x}{2}\right)^6$.

**4.** Окружности, заданные уравнениями $x^2 + y^2 = -4x$ и $x^2 + y^2 = 4y$ имеют общую хорду. Напишите уравнение прямой, содержащую эту хорду.

**5.** Дан многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 3$. Найдите остаток деления многочлена $P(x)$ на бином $x - a$, где $\alpha = 3 - i$.

**6.** Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 3}}{3x^2 - 4} \geq 0$.

**7.** Вычислить объем тела вращения, определенного функцией $f(x) = -x^2 + 4x$, если $x \in [0; 2]$.

**8.** Определите радиус описанной окружности прямоугольного треугольника с длиной одного катета равной 5см и радиусом вписанной окружности, равным 2см.

**9.** Решить уравнение

$$2 - 3\log_{125}(x + 3)^2 = 4\log_{25}\frac{x - 5}{x - 3}.$$

**10.** При каких значениях действительного параметра $m$ функция $f : R \longrightarrow R$, $f(x) = 2(m^2x + 3) - x(21 - mx)$ имеет минимум в точке $x = 0,5$.

**11.** Решить систему уравнений в множестве действительных чисел:

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{y} + z^2 = 14, \\ 2\sin x + \sqrt{y} - z^2 = -3, \\ 3\sin x + \sqrt{y} - 2z^2 = -11. \end{cases}$$

**12.** Площадь диагонального сечения четырехугольной правильной пирамиды равна площади основания. Определите объем пирамиды, если длина бокового ребра равна 5см.

## Решения

**1.** Так как $49 < 143 < 343$, то $\log_{\frac{1}{7}} 343 < \log_{\frac{1}{7}} 143 < \log_{\frac{1}{7}} 49$ (логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ при $a \in (0; 1)$ строго убывает) или

$$-3 < \log_{\frac{1}{7}} 143 < -2$$

то есть число $\log_{\frac{1}{7}} 143$ находится между целыми последовательными числами $-3$ и $-2$.

**2.** Например, $f : R \setminus \{3\} \longrightarrow R$, $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. Действительно,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

**3.** Используя формулу $(k+1)$-го члена в разложении бинома $(a+b)^n$

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $n = 6$, $k+1 = 4$, откуда $k = 3$, $a = (2x)^{\frac{1}{2}}$ и $b = -\frac{x}{2}$, получим $T_4 = C_6^3 (2x)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{x}{2}\right)^3 =$ $= -5\sqrt{2}x^4\sqrt{x}$.

**4.** Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 = -4x, \\ x^2+y^2 = 4y, \end{cases}$$

получим точки пересечения окружностей: $A(0;0)$ и $B(-2;2)$. Напишем уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{2-0}$$

откуда $y = -x$. Таким образом, уравнение прямой, содержащей данную хорду, есть $y = -x$.

**5.** Поскольку $P(3-i) = (3-i)^3 - 2(3-i) - 7(3-i) - 3 = 27 - 27i + 9i^2 - i^3 - 18 + 12i-$ $-2i^2 - 21 + 7i - 3 = -22 - 7i$, следует, что остаток деления данного многочлена на $x - \alpha$, где $\alpha = 3 - i$ равен $-22 - 7i$.

**6.**

$$\frac{\sqrt{3x^2-3}}{3x^2-4} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2-3 = 0, \\ 3x^2-4 \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2-3 > 0, \\ 3x^2-4 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -1, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right), \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$$

**7.** Используя формулу для определения объема тела вращения, образованного вращением вокруг оси $Ox$ подграфика функции $f : [a,b] \longrightarrow R$

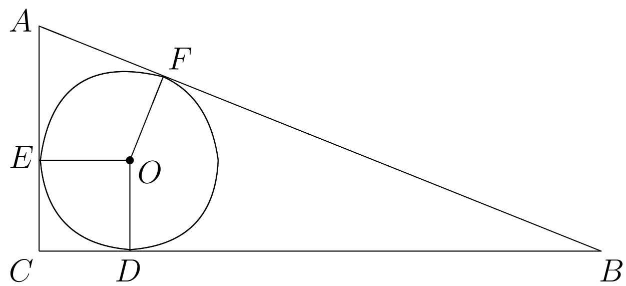
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

получим

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2+4x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 - 8x^3 + 16x^2) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{32}{5} - 32 + \frac{128}{3}\right) = \frac{256}{15}\pi(\text{куб.ед.})$$

**8.**




Пусть $ABC$ - прямоугольный треугольник ($AC \perp BC$) с $AC = 5$см и $OD = OE = OF = = r = 2$см. ($O$ - центр вписанной в треугольнике $ABC$ окружности). Пусть $BF = x$. Тогда $BD = x$ и поскольку $CE = 2$см, ($OECD$ - квадрат), то $AE = AF = 3$см и $AB = 3 + x$. Используя теорему Пифагоры, получим

$$5^2 + (2 + x)^2 = (3 + x)^2,$$

откуда $x = 10$см. Следовательно, гипотенуза $AB = 3 + 10 = 13$(см), а радиус описанной окружности $R = \frac{c}{2} = 6,5$(см) (центр описанной прямоугольному треугольнику окружности находится в середине гипотенузы).

**9.** Область допустимых значений (*ОДЗ*) уравнения находится, решая систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-3} > 0, \\ (x+3)^2 > 0 \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$.

В *ОДЗ* уравнение эквивалентно уравнению

$$2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \log_5 |x + 3| = 4 \cdot \frac{1}{2} \log_5 \frac{x-5}{x-3}$$

или

$$1 - \log_5 |x + 3| = \log_5 \frac{x-5}{x-3},$$

$$1 = \log_5 \left( \frac{x-5}{x-3} \cdot |x + 3| \right)$$

откуда получим

$$5 = \frac{x-5}{x-3} |x + 3|.$$

Учитывая *ОДЗ* рассмотрим два случая:

1. $x \in (-\infty; -3)$. Тогда $|x + 3| = -(x + 3)$ и уравнение примет вид $5(x - 3) = -(x - 5)(x + 3)$. Решив полученное квадратное уравнение $x^2 + 3x - 30 = 0$ найдем $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{129}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{129}}{2}$ (не удовлетворяет условию $x < -3$).

2. $x \in (-3; 3) \cup (5; +\infty)$. Тогда $|x + 3| = x + 3$ и уравнение примет вид

   $$5(x - 3) = (x - 5)(x + 3)$$

   или $x^2 - 7x = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 7$.

Таким образом, множество решений данного уравнения есть $\left\{\frac{-3-\sqrt{129}}{2};0;7\right\}$.

**10.** Данная функция, $f(x) = mx^2 + (2m^2 - 21)x + 6$ для $m \neq 0$, представляет собой квадратный трехчлен, который имеет минимум в точке $x = \frac{1}{2}$, если

$$\begin{cases} m > 0, \\ -\dfrac{2m^2 - 21}{2m} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

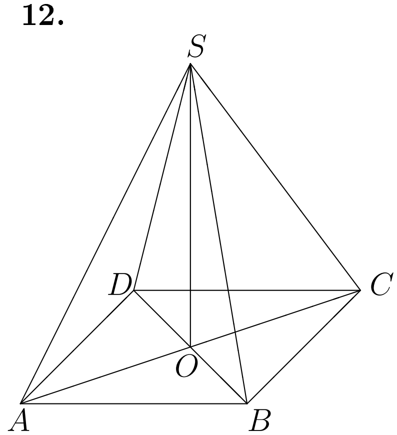
(ветви параболы направлены вверх и ее вершина находится в точке $x = \frac{1}{2}$). Решая систему, получим $m = 3$.

При $m = 0$ функция $f$ линейная функция и не имеет минимума. Следовательно $m = 3$.

**11.** Сложив первые два уравнения получим $3\sin x + 2\sqrt{y} = 11$. Умножив первое уравнение на 2 и сложив с третьим уравнением получим: $5\sin x + 3\sqrt{y} = 17$. Из полученной системы следует $\sqrt{y} = 4$ или $y = 16$. Далее $\sin x = 1$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. Подставив $x$ и $y$ например в первое уравнение, получим $z^2 = 9$, откуда $z = \pm 3$. Таким образом

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \qquad y = 16, \qquad z = \pm 3.$$

**12.**




Пусть $SABCD$ - правильная четырехугольная пирамида с $SB = SC = SD = SA = 5$см, $AB = a$ (сторона основания), $SO \perp AC$ ($h = SO$ - высота пирамиды). Тогда $AC = a\sqrt{2}$, $S_{\triangle SAC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}ah = \dfrac{1}{\sqrt{2}}ah$. $S_{ABCD} = a^2$. Согласно гипотезе $a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}ah$, откуда $h = \sqrt{2}a$. Из прямоугольного треугольника $SOC$ получим

$$OC^2 + SO^2 = SC^2, \quad \text{то есть} \quad \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2 = 5^2$$

или $\dfrac{a^2}{2} + 2a^2 = 25$, откуда $a^2 = 10$ и $a = \sqrt{10}$(см).

Таким образом

$$V = \frac{1}{3}a^2 h = \frac{1}{3}10\sqrt{2}\sqrt{10} = \frac{20\sqrt{5}}{3}(\text{см}^3)$$